K. RIBNIKOV

ANALISIS COMBINATORIO

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

ANÁLISIS COMBINATORIO

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Задачи и упражнения

Под редакцией К. А. Рыбникова

Москва «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы

ANÁLISIS COMBINATORIO

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

Dirigido por el Prof. Dr. K. Ríbnikov

Editorial Mir Moscú

Colegio de autores: K. Ríbnikov, M. Ménshikov, A. Reviakin, A. Kopilova, Yu. Makárov, B. Stechkin

Traducido del ruso por K. Medkov

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000693-1

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1982

© traducción al español, revisada y ampliada, editorial Mir, 1989

ÍNDICE

Prefacio 7

CAPÍTULO I. ESQUEMAS COMBINATORIOS 9
§ 1. Relaciones combinatorias 10
§ 2. Muestras y ordenaciones 12
§ 3. Particiones 14
§ 4. Problemas mixtos 18

CAPÍTULO II. MÉTODO DE FUNCIONES GENERATRICES 23
§ 1. Funciones generatrices: propiedades y operaciones 24
§ 2. Números especiales y funciones especiales . . . 29
§ 3. Teorías de Polya 39

CAPÍTULO III. MÉTODOS LÓGICOS 45
§ 1. Método de inclusión y exclusión 45
§ 2. Sistemas de representantes de los conjuntos 48
§ 3. Teorema y números de Ramsey 50

CAPÍTULO IV. TABLAS Y ESQUEMAS COMBINATORIOS 52
§ 1. Matrices especiales 52
§ 2. Rectángulos y cuadrados latinos 56
§ 3. Sistemas de ternas de Steiner y juegos semejantes 60
§ 4. Bloque-esquemas 67
§ 5. Problemas de Van der Waerden 71

CAPÍTULO V. MÉTODOS GEOMÉTRICOS 75
§ 1. Interpretaciones y problemas referentes a los grafos 75
§ 2. Problemas enumerativos en los grafos 85
§ 3. Planos finitos 92

CAPÍTULO VI. SISTEMAS DE CONJUNTOS 98
§ 1. Problemas extremales en los grafos e hipergrafos 98
§ 2. Problemas extremales sobre la partición de los números 108
§ 3. Constantes geométricas extremales 115

CAPÍTULO VII. ANÁLISIS COMBINATORIO SOBRE LOS CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS 118
§ 1. Conjuntos parcialmente ordenados 118
§ 2. Retículos 128
§ 3. Funciones de incidencia e inversión de Moebius 143
§ 4. Problemas mixtos sobre conjuntos parcialmente ordenados 151

CAPÍTULO VIII. MATROIDES 158
§ 1. Conceptos fundamentales y ejemplos 158
§ 2. Construcciones y operaciones sobre los matroides 174
§ 3. Coordinatización y representabilidad de los matroides 187
§ 4. Problemas mixtos en los matroides 202

RESPUESTAS, SOLUCIONES, INDICACIONES 208
Capítulo I 208
Capítulo II 230
Capítulo III 259
Capítulo IV 268
Capítulo V 295
Capítulo VI 327
Capítulo VII 372
Capítulo VIII 404
Bibliografía 436
Indice alfabético 438

PREFACIO

Tras la publicación en castellano de la obra de K. A. *Ríbnikov* «Análisis combinatorio», la editorial «Mir» presenta ahora la versión española de «Análisis combinatorio. Problemas y ejercicios». El colectivo de autores de este libro (incluso el autor del Prefacio) se ha formado en el transcurso del trabajo conjunto en la facultad mecánico-matemática de la Universidad Estatal de Moscú M. V. Lomonósov, en la que se lleva a cabo una iniciativa importante de preparación de cuadros y de desarrollo de investigaciones científicas en el campo de la matemática discreta.

El contenido de ambos libros está estrechamente ligado entre sí y obedece a un objetivo común: ayudar al lector a asimilar tanto los hábitos de investigación de los problemas teóricos del análisis combinatorio, como la técnica de resolución de los problemas combinatorios. La experiencia enseña que el uso de estos libros hace más amplia la erudición teórica y eleva la importancia de la preparación práctica de los matemáticos jóvenes.

En la edición rusa hicieron su aportación el doctor D. Katona (RP de Hungría) y V. N. Luzguín (URSS) quienes participaron en la preparación del capítulo VI y del § 5 del capítulo IV, respectivamente, lo que influyó positivamente en el contenido de éstos.

Especialmente para la versión española K. A. Ríbnikov, A. M. Reviakin y B. S. Stechkin prepararon dos capítulos nuevos: «Análisis combinatorio en los conjuntos parcialmente ordenados» y «Matroides», como también un nuevo párrafo, «Problemas extremales sobre

la partición de los números» del capítulo VI. Han sido minuciosamente revisados los textos de los problemas, las resoluciones y las indicaciones. A nuestro parecer esto nos permitió tomar en consideración, en sumo grado, los avances ulteriores del análisis combinatorio.

Moscú, 1988 *K. A. Ribnikov*

ESQUEMAS COMBINATORIOS

Introduzcamos las siguientes designaciones:

n-conjunto será un conjunto de n elementos distintos;

(n)-conjunto será un conjunto que contiene elementos de n tipos diferentes (se supone, si no se especifica de antemano, que el número de elementos de cada tipo es suficientemente grande);

r-muestra de cierto conjunto será una totalidad de r elementos (no forzosamente diferentes para el *(n)-conjunto*) de dicho conjunto.

El número de r-muestras de un n-conjunto (*r-combinaciones*) será:

$$\binom{n}{r} = C_n^r = \begin{cases} 0, \text{ si } r < 0, \text{ ó bien } 0 \leqslant n < r; \\ n!/(r!\,(n-r)!), \text{ si } n \geqslant r \geqslant 0. \end{cases}$$

El número de r-muestras ordenadas de un n-conjunto (*r-permutaciones*) será:

$$A_n^r = n!/(n-r)!, \quad n \geqslant r \geqslant 0.$$

El número de r-muestras de un (n)-conjunto (*combinaciones con repetición*) será:

$$C_{(n)}^r = C_{n+r-1}^r.$$

El número de r-muestras ordenadas de un (n)-conjunto es igual a

$$A_{(n)}^r = n^r.$$

El número de n-permutaciones de un n-conjunto (n-sustituciones), cada una de las cuales contiene k_1 ciclos de longitud 1, k_2 ciclos de longitud 2, etc., k_n ciclos de longitud n $(\sum_{i=1}^{n} ik_i = n)$ será:

$$P_1(k_1, \ldots, k_n) = \frac{n!}{1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n} k_1!\, k_2! \ldots k_n!}.$$

El número de permutaciones de un (k)-conjunto que contiene n_1 elementos del primer tipo, n_2 elementos del segundo tipo, etc., n_k elementos del k-ésimo tipo $(\sum_{i=1}^{k} n_i = n)$, es igual a

$$P(n_1, \ldots, n_k) = n!/(n_1! \ldots n_k!)$$

(en particular, $P(r, n-r) = C_n^r$).

§ 1. Relaciones combinatorias

1.1. Demuéstrense, por medio de los razonamientos combinatorios (es decir, empleando solamente ciertos números de combinaciones), las identidades:

a) $C_n^h = C_{n-1}^h + C_{n-1}^{h-1}$, $n > 0$;

b) $C_n^h = C_{n-1}^h + C_{n-2}^{h-1} + \ldots + C_{n-h-1}^0$, $n > k$.

1.2. Demuéstrese la identidad

$$C_{n+m}^m = \sum_{h=0}^{m} C_{n+h-1}^h, \quad m.\ n > 0.$$

1.3. Demuéstrese, para cualquier $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, la identidad

$$C_n^r = \sum_{h=0}^{n} C_{n-m}^h C_m^{r-h}.$$

1.4. Demuéstrense las identidades

a) $\sum_{h=0}^{n} C_n^h = 2^n$, $n \geqslant 0$;

b) $\sum_{h=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$;

c) $\sum_{h=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)\,2^{n-2}$.

1.5. Demuéstrese, con ayuda de los razonamientos combinatorios, la identidad

$$\sum_{h=0}^{n} C_n^h (m-1)^{n-h} = m^n.$$

1.6. Demuéstrese la identidad

$$\sum \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} = k^n,$$

donde la sumación se extiende a todas las particiones ordenadas de n en k sumandos: $n = n_1 + \ldots + n_k$, $n_i \geqslant 0$ son números enteros.

1.7. a) Demuéstrese la identidad

$$\sum_{m_1, \ldots, m_q} C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_q}^{m_q} = C_n^m,$$

donde $n=\sum_{i=1}^{q} n_i$, los números n_i son arbitrarios, y la sumación se extiende a todos los juegos de números $m_1, \ldots, m_q$ tales que $m=\sum_{i=1}^{q} m_i$, $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$.

b) Demuéstrese que

$$\sum C_{n_1+m_1-1}^{m_1} C_{n_2+m_2-1}^{m_2} \ldots C_{n_q+m_q-1}^{m_q} = C_{n+m-1}^{m},$$

$$n=\sum_{i=1}^{q} n_i, \quad m=m_1+\ldots+m_q,$$

donde la sumación se realiza respecto de los juegos $(m_1, \ldots, m_q)$.

1.8. Demuéstrese que

$$\frac{(C_{n+1}^{r+1}-C_n^r)\,C_{n-1}^{r-1}}{(C_n^r)^2-C_{n+1}^{r+1}C_{n-1}^{r-1}}=r, \quad n>1, \quad 0<r<n.$$

1.9. Demuéstrese que

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^{x}}=\frac{2}{n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

1.10. Demuéstrese que

$$\sum_{x+1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^{x}}=\frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}, \quad n \geqslant 1.$$

1.11. Demuéstrese la identidad

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}}=\frac{2n+1}{n+1}.$$

1.12. Demuéstrese que

a) $\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} 2^{n-2i}=\frac{3^n+1}{2}$;

b) $\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} k^{n-2i}=\frac{(k+1)^n+(k-1)^n}{2}$.

1.13. Demuéstrese para cualquier $p=0, 1, \ldots, n$ la identidad

$$\sum_{x=0}^{m} C_{p+x-1}^{x} C_{n+m-p-x-1}^{m-x}=C_{n+m-1}^{m}.$$

1.14. Demuéstrese la identidad

$$\sum_{i_n=1}^{m} \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \cdots \sum_{i_2=1}^{i_3} \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1 = C_{n+m}^{n+1}.$$

1.15. Demuéstrese la identidad

$$C_{n+m}^{m} = \sum P(k_1, \ldots, k_m, n - k_1 - k_2 - \ldots - k_m + 1),$$

donde la sumación viene extendida a todas las soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m = n.$$

1.16. Supongamos que para n, $r > 0$ enteros se tiene: $C_{-n}^{r} = (-1)^r C_{n+r-1}^{r}$. Demuéstrese que para cualquier r natural y n entero se verifica la igualdad

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}.$$

§ 2. Muestras y ordenaciones

1.17. n hombres ($n > 2$) se encuentran sentados a una mesa redonda. Convengamos en considerar coincidentes dos disposiciones respecto a los sitios, siempre que cada hombre tenga los mismos vecinos en ambos casos. ¿Cuántos son los modos de sentarse a la mesa?

1.18. ¿Mediante cuántos métodos pueden sentarse a una mesa redonda n hombres y n mujeres de tal modo que de cada dos personas de un mismo sexo ninguna esté sentada al lado de otra?

1.19. De una baraja que contiene 52 cartas se sacaron 10. ¿En cuántos casos entre las cartas sacadas habrá:

a) por lo menos un as; b) exactamente un as; c) no menos de dos ases; d) exactamente dos ases?

1.20. ¿Mediante cuántos procedimientos se pueden componer tres pares de n ajedrecistas?

1.21. ¿Cuántas funciones con valores en un conjunto de m elementos pueden construirse, si las funciones citadas dependen de n variables $x_1, \ldots, x_n$, donde x_i puede tomar uno de k_i valores?

1.22. ¿Cuántos divisores tiene el número $q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, donde p_i son diferentes números primos distintos de la unidad y α_i son ciertos números naturales? ¿A qué es igual la suma de los divisores?

1.23. ¿Cuántas permutaciones pueden componerse de n elementos, en las cuales los m elementos dados no se disponen juntos en cualquier orden?

1.24. ¿Cuántos son los números desde 0 hasta 10^n, en los cuales no figuran cifras iguales sucesivas?

1.25. ¿Mediante cuántos métodos se pueden escoger 6 cartas de una baraja, que contiene 52 cartas, de tal modo que entre las cartas sacadas se encuentren cartas de cada palo?

1.26. ¿Cuántos son los números naturales de n cifras en los que éstas se disponen en orden no decreciente?

1.27. [1]) Hállese el número de métodos que permiten repartir n bolas diferentes entre m urnas distintas?

1.28. ¿Cuántos son los métodos que permiten colocar n bolas iguales en m urnas diferentes?

1.29. ¿Mediante cuántos métodos pueden colocarse n bolas iguales en m urnas diferentes, observándose las siguientes condiciones:

a) no hay urnas vacías;

b) en la segunda urna hay k bolas;

c) en las primeras s urnas hay $a_1, a_2, \ldots, a_s$ bolas, respectivamente $(a_1 + a_2 + \ldots + a_s \leqslant n)$;

d) en la i-ésima urna se encuentran no menos de a_i bolas $(i = 1, 2, \ldots, m)$?

1.30. ¿Cuántos son los métodos que permiten colocar en m urnas diferentes n_1 bolas blancas, n_2 bolas negras y n_3 bolas azules?

1.31. Hállese el número de métodos de distribución de n bolas iguales entre a) dos urnas, b) tres urnas, c) i urnas, todas ellas indistinguibles. Obténgase la relación recurrente para el caso c).

1.32. ¿Cuántos son los métodos para colocar $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ diferentes bolas en k urnas distintas de tal modo que en la primera urna caigan n_1 bolas, en la segunda k_2, etc., en la k-ésima urna, n_k bolas?

1.33. Hállese el número de métodos de colocación de n bolas diferentes en m urnas de tal modo que m_1 urnas contengan p_1 bolas cada una; m_2 urnas, p_2 bolas, etc., m_k urnas, p_k bolas $(m = m_1 + \ldots + m_k,\ n = m_1 p_1 + \ldots + m_k p_k)$, si

a) las urnas son diferentes;

b) las urnas, en las que están contenidas un número igual de bolas, son indistinguibles.

1.34. a) ¿Cuántos son los números de n cifras, en los cuales la suma de las cifras es igual a k, donde $k \leqslant 9$ (la primera cifra es distinta de cero)?

b) El mismo problema, pero para los números de 0 a 10^n.

1.35. ¿Cuántos números de cinco cifras pueden componerse, empleando las cifras del número 75 226 522?

1.36. ¿Cuántas sucesiones de longitud $n + m$ pueden componerse a partir de n ceros y m unidades, en cuya notación el número total de pares 01 y 10 sería igual a: a) $2r - 1$; b) $2r$?

1.37. Hállese el número S tal que entre los números del primer millar haya exactamente 10 números, en cada uno de los cuales la suma de las cifras sea igual a S.

---

[1]) En los problemas 1.27—1.33 la capacidad de las urnas se considera ilimitada.

1.38. ¿Cuál es la probabilidad de que, al comprar un billete de lotería deportiva, puedan adivinarse:

a) k números ($k = 1, 2, \ldots, 6$) de 49;

b) por lo menos k números?

1.39. LOTERÍA GENOVESA. Los participantes de esta lotería compran billetes, en los cuales figuran los números del 1 al 90. Algunos billetes tienen a la vez 2, 3, 4 ó 5 números. En el día de sorteo se escogen al azar 5 fichas con los números del 1 al 90. Ganan aquellos participantes en los billetes de los cuales todos los números resultan ser entre los elegidos. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio en el caso de un billete comprado con un número? ¿Con k números ($1 \leqslant k \leqslant 5$)?

1.40. Se analizan todas las sucesiones de longitud n de los números $0, 1, \ldots, k$. ¿Cuántas son las sucesiones entre ellas que contienen un número par de ceros?

1.41. Para ingresar en un centro de enseñanza superior es necesario dar cuatro exámenes. Se supone que para el ingreso es suficiente adquirir 17 puntos. ¿De cuántas formas el que ingresa puede dar los exámenes acumulando no menos de 17 puntos y no sacando ni un solo dos?

1.42. En un portamonedas hay monedas de 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 y 50 kopeks de valor, a razón de una moneda de cada valor. ¿De cuántos modos se puede pagar, empleando dichas monedas, por una compra de 73 kopeks de valor?

1.43. Por el envío de un impreso hay que pagar 18 kopeks. ¿De cuántos modos puede pagarse el envío con sellos de 4, 6 y 10 kopeks de valor, si dos modos que se diferencian en el orden de los sellos se consideran distintos?

§ 3. Particiones

1.44. Dese la explicación de las siguientes igualdades:

a) $$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)\, x^n,$$

donde $\lambda(n)$ es el número de representaciones de n en forma de la suma no ordenada de los sumandos enteros positivos desiguales;

b) $$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n z) = 1 + \sum_{n,\, m=1}^{\infty} \lambda(n,\ m)\, x^n z^m,$$

donde $\lambda(n,\ m)$ es el número de representaciones de n en forma de la suma no ordenada de m sumandos enteros positivos desiguales;

c) $$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(n)\, x^n,$$

donde $\overline{\mu}(n)$ es el número de representaciones no ordenadas de n en forma de la suma de sumandos enteros positivos iguales o desiguales;

$$d) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n z} = 1 + \sum_{n,\, m=1}^{\infty} \mu(n,\ m)\, x^n z^m,$$

donde $\mu(n,\ m)$ es el número de representaciones no ordenadas de n en forma de la suma de m sumandos enteros positivos, iguales o desiguales;

$$e) \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2n-1}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(n)\, x^n,$$

donde $\nu(n)$ es el número de representaciones de n en forma de la suma no ordenada de sumandos impares positivos desiguales;

$$f) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2n-1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n)\, x^n,$$

donde $\rho(n)$ es el número de representaciones de n en forma de la suma no ordenada de sumandos impares positivos iguales o desiguales;

$$g) \quad \frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_m(n)\, x^n,$$

donde $\sigma_m(n)$ es el número de particiones ordenadas o la cantidad de representaciones de n en forma de la suma ordenada de no más de m sumandos enteros no negativos iguales o desiguales, o bien el número de soluciones de la ecuación $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, donde $x_i \geqslant 0$ son los números enteros, $i = 1, \ldots, m$;

$$h) \quad \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-x^{n_i}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n_1,\ \ldots,\ n_m,\ n)\, x^n,$$

donde $\sigma(n_1, \ldots, n_m, n)$ es el número de soluciones de la ecuación $n = n_1 x_1 + \ldots + n_m x_m$ y $x_i \geqslant 0$ son los números enteros;

$$i) \quad \left(\frac{[x}{1-x}\right)^m = \sum_{n=m}^{\infty} \sigma(m,\ n)\, x^n,$$

donde $\sigma(m,\ n)$ es el número de particiones ordenadas de n en m sumandos enteros positivos iguales o desiguales, o bien el número de soluciones de la ecuación $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ y $x_i \geqslant 1$ son números enteros.

1.45. Demuéstrese que el número de particiones ordenadas del número n en k sumandos naturales, es decir, el número de soluciones de la ecuación

$$n = x_1 + \ldots + x_k, \quad x_i > 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

es igual a

$$C_{n-1}^{k-1} = \sigma(k, n),$$

mientras que el número total de particiones ordenadas de n en sumandos es igual a 2^{n-1}.

1.46. Denotemos con $\lambda(n)$ el número de particiones no ordenadas de n en diferentes sumandos, y con $\rho(n)$, el número de particiones no ordenadas de n en sumandos impares (iguales o desiguales). Demuéstrese que $\lambda(n) = \rho(n)$.

1.47. Los números $w_k = (3k^2 - k)/2$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ se denominan *pentagonales*. Demuéstrese la siguiente afirmación (*teorema de Euler—Legendre*): la diferencia entre el número de representaciones no ordenadas de un número natural dado n en forma de la suma de números par e impar de los sumandos desiguales es igual a cero, si n es el número no pentagonal, y a $(-1)^k$, si n es el número pentagonal w_k.

1.48. Demuéstrese la siguiente afirmación: para todo $n > 0$ se tiene

$$\sum_{k\,:\,w_k \leqslant n} (-1)^k S(n - w_k) = \left\{ \begin{matrix} (-1)^{S-1} n \\ n = w_S \end{matrix} \right\},$$

donde $S(n)$ es la suma de divisores del número natural n; la suma en el primer miembro se toma respecto de todos los números $k \geqslant 0$, para los cuales $w_k \leqslant n$, y el símbolo $\left\{ \begin{matrix} (-1)^{S-1} n \\ n - w_S \end{matrix} \right\}$ denota 0 para n distinto de un número pentagonal, y $(-1)^{S-1} n$, para $n = w_S$.

1.49. Designemos $\overline{\mu}(n)$, el número de representaciones no ordenadas de un número natural n, como la suma de números naturales iguales o desiguales. Demuéstrese que

$$\sum_{k\,:\,w_k \leqslant n} (-1)^k \overline{\mu}(n - w_k) = 0,$$

donde $w_k = (3k^2 - k)/2$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ son los números pentagonales, $\overline{\mu}(0) = 1$.

1.50. Sean $f(n)$ y $F(n)$ unas funciones de números enteros y supongamos que

$$\sum_{S\,:\,w_S \leqslant n/h} (-1)^S f(n - hw_S) = F(n).$$

donde $h > 0$ es un número entero prefijado. Demuéstrese la fórmula de inversión

$$f(n) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/h} \overline{\mu}(k)\, F(n - hk),$$

donde $\mu(k)$ es la cantidad de particiones del número k en sumandos iguales o desiguales (análogo de la función de Moebius $\mu(n)$).

1.51. Sea $\lambda(n)$ el número de particiones de n en sumandos desiguales, $\lambda(0) = 1$. Demuéstrense las igualdades:

$$\text{a)} \sum_{k\,:\, w_k \leqslant n} (-1)^k \lambda(n - w_k) = \begin{cases} (-1)^S, & n = 2w_S, \\ 0, & n \neq 2w_S, \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \lambda(n) = \sum_{k\,:\, 2w_k \leqslant n} (-1)^k \overline{\mu}(n - 2w_k).$$

1.52. Sea $\nu(n)$ el número de particiones de n en una suma de sumandos positivos impares desiguales ($\nu(0) = 1$). Demuéstrense las desigualdades:

$$\text{a)} \sum_{k\,:\, 2w_k \leqslant n} (-1)^k \nu(n - 2w_k) = \begin{cases} (-1)^{n+S}, & n = w_S, \\ 0, & n \neq w_S; \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \nu(n) = \sum_{S\,:\, w_S \leqslant n} (-1)^{n+S} \overline{\mu}\left(\frac{n - w_S}{2}\right).$$

1.53. Hállese el número de soluciones no ordenadas de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = m$, si todas las incógnitas satisfacen la desigualdad $0 \leqslant l \leqslant x_k \leqslant n$.

1.54. ¿En cuántas partes puede dividirse la superficie de una esfera mediante los planos que pasan por el centro de ella, a condición de que cualesquiera tres planos no pasan por un mismo diámetro?

1.55. Hállese el número de todos los polígonos convexos de k lados de cuyos vértices sirven k de n vértices del polígono convexo de n lados, con la particularidad de que dos vértices adyacentes han de estar separados al menos por s vértices del polígono de n lados.

1.56. ¿De cuántos modos puede dividirse un polígono convexo de $(n + 2)$ lados en triángulos mediante las diagonales que no se intersecan en el interior del polígono?

1.57. ¿En cuántas partes dividen un plano n rectas que se intersecan, si cualesquiera tres de ellas no se cortan en un mismo punto?

1.58. En un plano están trazadas n rectas. Se denominará *multiplicidad* de un punto al número de rectas que pasan por el punto citado. Están prefijados los números: k_2 que representa el número de vértices de multiplicidad dos, k_3 que expresa el número de vértices de multiplicidad tres, etc., k_n que expresa el número de vértices de multiplicidad n. Hállese el número de pares de rectas paralelas.

1.59. En un plano están trazadas n rectas. Están prefijados los números: k_2 que expresa el número de vértices de multiplicidad dos, k_3 que expresa el número de vértices de multiplicidad tres, etc., k_n que expresa el número de vértices de multiplicidad n. ¿En cuántas partes dividen el plano dichas rectas?

1.60. ¿En cuántas partes dividen un espacio n planos, de los cuales cualesquiera cuatro de ellos no pasan por un mismo punto, cualesquiera tres no pasan por una misma recta y cualesquiera dos no son paralelos, y cualesquiera tres planos tienen un punto común?

1.61. Por un punto A en un espacio pasan k planos, con la particularidad de que de tres de ellos ninguno pasa por una misma recta. ¿En cuántas partes los planos dividen el espacio?

1.62. En un espacio están trazados n planos. Se sabe: l_2 es el número de rectas de intersección de dos planos exactamente; l_3 es el número de rectas de intersección de tres planos exactamente, etc., l_n es el número de rectas de intersección de n planos exactamente. Hállese el número de pares de planos paralelos.

1.63. ¿En cuántas partes dividen un espacio n planos, si de tres de ellos ninguno pasa por una misma recta, de dos, ninguno es paralelo y k_3 es el número de puntos de intersección de tres planos, k_4 es el número de puntos de intersección de cuatro planos, etc., y k_n es el número de puntos de intersección de n planos.

§ 4. Problemas mixtos

1.64. Demuéstrese que los números que siguen más abajo son enteros:

a) $\frac{(2n)!}{2^n}$; b) $\frac{(3n)!}{2^n 3^n}$; c) $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$; d) $\frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}$; e) $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$

1.65. ¿Cuántos son los pares diferentes de números enteros x e y desde 1 hasta 1000, para los cuales $(x^2 + y^2)/49$ es un número entero. (Los pares (x, y) y (y, x) se consideran iguales.)

1.66. Partiendo de los números del 1 al n han sido compuestos toda clase de productos, que constan de k diferentes factores (k está fijado). ¿Cuántos productos obtenidos se dividen por un número primo $p \leqslant n$?

1.67. Teniendo por condición de que de tres diagonales del polígono convexo de n lados ($n \geqslant 5$) ninguna se interseca en un punto, hállese el número de segmentos en los cuales se dividen las diagonales mediante los puntos de intersección.

1.68. Se dan cinco puntos en un plano. Entre las rectas que unen dichos puntos no hay paralelas, perpendiculares y coincidentes. Por cada punto trazamos perpendiculares a todas las rectas que pueden construirse uniendo dos a dos los cuatro puntos restantes. ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección de las perpendiculares citadas entre sí sin tomar en consideración los cinco puntos dados?

1.69. En una circunferencia están dados n puntos y están trazadas toda clase de cuerdas que unen los puntos mencionados. Se sabe que de tres de las cuerdas trazadas ninguna se interseca en un punto. ¿En cuántas partes se divide el círculo?

1.70. En el campeonato de fútbol de un país participan 20 equipos. ¿Cuál es el número mínimo de partidos que deben jugarse, para que entre cualesquiera tres equipos haya dos que ya hayan jugado entre sí?

1.71. En un tablero de ajedrez están colocadas de un modo arbitrario dos torres (negra y blanca). ¿Qué es lo más probable: que dichas torres puedan comerse una a la otra o que no puedan?

1.72. Un tablero de ajedrez de 6×6 de dimensión está cubierto con 18 fichas de dominó de 2×1 de dimensión (de tal modo que cada ficha cubre dos casillas). Demuéstrese que, cualquiera que sea la forma en que las fichas cubren el tablero, éste puede ser cortado en dos partes horizontal o verticalmente sin perjudicar ni a una sola ficha de dominó.

1.73. Las casillas (escaques) de un tablero de ajedrez están enumeradas por orden con los números del 1 al 64: la primera fila horizontal con los números del 1 al 8 de izquierda a derecha; la segunda fila horizontal, con los números del 9 al 16 de izquierda a derecha, etc. En el tablero están colocadas 8 torres de tal modo que no se capten una a la otra. ¿Qué valor puede tomar la suma de números de los escaques en los cuales están colocadas las torres?

1.74. En cada escaque de un tablero de ajedrez de dimensión $n \times n$ se ha puesto un número que indica la cantidad de rectángulos que contienen dicho escaque. ¿A qué es igual la suma de todos los números escritos?

1.75. Demuéstrese que de cualesquiera cinco hongos que crecen en un bosque y que no están dispuestos en una recta, siempre hay cuatro hongos tales que sirven de vértices de un cuadrilátero convexo.

1.76. En la ciudad N vive un hombre que cada día realiza un paseo y cubre un camino de longitud n. La distancia entre los cruces

Fig. 1.1.

vecinos es igual a 1 (fig. 1.1). El hombre nunca se mueve en dirección del noroeste o del nordeste. En cada cruce él dobla, o bien al sudeste o bien al sudoeste, con una probabilidad igual a 1/2. Si el camino

comienza en el punto A, entonces ¿cuál es la probabilidad de que el hombre llegue al final del paseo al k-ésimo cruce de la n-ésima fila?

1.77. Demuéstrese que la probabilidad de caer en los cruces pares de la n-ésima fila es igual a la probabilidad de caer en los cruces impares de la n-ésima fila (véase el dibujo del problema anterior). ¿Qué propiedad de las combinaciones C_n^k se deduce de lo descrito?

1.78. En la ecuación $ax = b$ los parametros a y b se eligen al azar de los segmentos $1 \leqslant a \leqslant m$, $1 \leqslant b \leqslant n$, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que la raíz de esta ecuación sea superior a 1, a condición de que m, n, a, b son todos números naturales?

1.79. (m, n) es un punto de coordenadas enteras no negativas m y n. Hállese el número de diferentes caminos de longitud $m + n$ que llevan desde el origen de coordenadas al punto (m, n) y que están compuestos de segmentos paralelos a los ejes de coordenadas, a condición de que de extremos de dichos segmentos sirven los puntos con coordenadas de números enteros.

1.80. En un papel cuadriculado está dibujado el rectángulo $ABCD$ cuyos lados yacen en la línea de un retículo, con la particularidad de que AD es k veces mayor que AB (k es un entero). Se examinan toda clase de caminos que pasan por las líneas del retículo y que son los más cortos entre A y C. Demuéstrese que entre los caminos que se consideran hay en k veces más aquellos, donde el primer eslabón yace en AD, que aquellos donde el primer eslabón yace en AB (fig. 1.2).

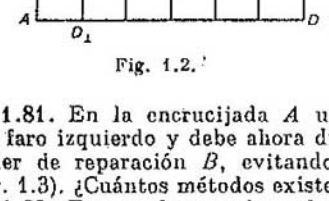


Fig. 1.2.

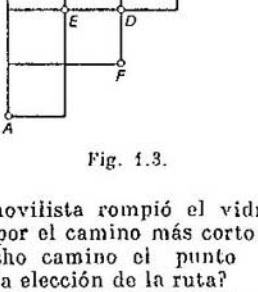


Fig. 1.3.

1.81. En la encrucijada A un automovilista rompió el vidrio del faro izquierdo y debe ahora dirigirse por el camino más corto al taller de reparación B, evitando en dicho camino el punto M (fig. 1.3). ¿Cuántos métodos existen para la elección de la ruta?

1.82. En un plano se han elegido 9 puntos dispuestos en forma del cuadrado 3×3. ¿Cuántos son los triángulos en los que un vértice se encuentra en el punto fijo A, y los otros dos, en los 8 puntos restantes?

1.83. Cierta comisión se reunía 40 veces. Cada vez en las sesiones estaban presentes 10 hombres, con la particularidad de que cuales-

quiera dos de los miembros de la comisión no presenciaban juntos las sesiones más que una vez. Demuéstrese que el número de miembros de la comisión es superior a 60.

1.84. En una oficina hay 25 empleados. Demuéstrese que de dichos empleados no pueden formarse más de 30 comisiones de 5 personas en cada una de tal modo que ningún par de comisiones tenga más de un miembro común.

1.85. Después de la presentación de 20 deportistas de patinaje artístico cada uno de 9 jueces distribuye según su propio parecer los puestos desde el 1 hasta el 20. Resultó que los puestos de cada deportista atribuidos a él por los distintos jueces difieren en no más de 3. Calculemos las sumas de los puestos obtenidos por cada deportista y dispongámoslas en orden de crecimiento: $C_1 \leqslant C_2 \leqslant \ldots \leqslant C_{20}$. ¿Qué valor máximo puede tener C_1?

1.86. La distancia de A a B es de 999 km. A lo largo del camino están instalados postes en los cuales la distancia entre A y B se marca de la manera siguiente:

$$\boxed{0 \mid 999}, \quad \boxed{1 \mid 998}, \quad \boxed{2 \mid 997}, \quad \ldots, \quad \boxed{999 \mid 0}.$$

¿Cuántos son los postes, en los cuales hay solamente dos cifras diferentes?

1.87. Imaginémonos un juego entre dos hombres. Sin ver el número de un coche que se aproxima el primero de ellos «toma para sí» dos cualesquiera cifras del número (por ejemplo, la primera y la tercera, o bien la segunda y la cuarta), dejando las otras dos cifras para el segundo jugador; cuando se detecta el número, ambos jugadores suman sus cifras y gana aquel de ellos cuya suma de las cifras da un mayor número de unidades (o en ella es mayor la última cifra). ¿Entre los números del 0001 al 9999 cuántos son tales que el juego termina con un empate independientemente de la elección del primer jugador?

1.88. Para pintar una cara de un cubo hacen falta 5 segundos. ¿Cuál es el tiempo mínimo en el transcurso del cual 3 hombres pueden pintar 188 cubos? (Se supone que dos hombres no pueden pintar simultáneamente un cubo).

1.89. En un campeonato gimnástico dos equipos contaban con un número igual de participantes. En total la suma general de tantos obtenidos por todos los participantes era igual a 156. ¿Cuál fue el número de participantes, si cada uno de ellos obtuvo notas sólo de 8 y 9 tantos.

1.90. Se tienen 9 palos de diferente longitud desde 1 hasta 9 cm. ¿De cuántos métodos y con qué lados pueden formarse cuadrados, haciendo uso de dichos palos? (No es obligatorio que se usen todos los palos; los métodos de formación de un cuadrado se consideran diferentes, si se emplean palos distintos.)

1.91. Un grupo de 41 estudiantes aprobó los exámenes de tres disciplinas. Las calificaciones posibles son: 5, 4 y 3. Demuéstrese

que por lo menos cinco estudiantes aprobaron los exámenes con calificaciones iguales.

1.92. Conservando las condiciones del problema antecedente hállese la probabilidad de que en el grupo no resulten 8 estudiantes que hayan aprobado los exámenes con calificaciones iguales.

1.93. ¿Qué números hay más entre el primer millón: aquellos en cuya notación se encuentra 1, o aquellos en cuya notación la unidad no está contenida?

1.94. Escribamos una oración: "Cuatro caminantes cansados y tácitos estuvieron esperando durante mucho tiempo a que cesara la tormenta que se desató tan súbitamente". Vamos a tachar las palabras en esta oración de una manera tal que se obtenga cada vez, como resultado, una oración correcta (por ejemplo, no se puede tachar la palabra "cuatro", pero sí podemos eliminar la palabra "cansados"). Se permite tachar las palabras en cualquier orden una tras otra. ¿De cuántos modos se puede llegar a una oración, de la cual no se podrá tachar ya ninguna palabra?

1.95. Demuéstrese que si una partida de ajedrez se desarrolla llegando a un número infinito de jugadas, entonces por lo menos una posición se repetirá un número infinito de veces. Demuéstrese que existe una sucesión de jugadas de longitud tan grande como se quiera, la cual se repetirá un número infinito de veces.

1.96. Un tal A sabe $X \cdot Y$ (se conoce que $X + Y < 100$; $X, Y > 1$ son números enteros) y un tal B sabe $X + Y$. Entre A y B tiene lugar el diogálo siguiente:

A: no conozco X e Y,
B: esto yo lo sabía,
A: entonces conozco X e Y,
B: en tal caso también yo conozco X e Y.

Hállense los números X e Y.

1.97. Demuéstrese que en cada fracción decimal infinita existe una sucesión de signos decimales de longitud arbitraria, la cual en el desarrollo de la fracción se encuentra un número infinito de veces.

1.98. Demuéstrese que en el desarrollo del número $n!$ en factores primos un número primo p figura con el exponente

$$\alpha = [n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \ldots$$

(los corchetes denotan la parte entera del número).

1.99. ¿Cuántos ceros tiene al final el número $3!!!$ en la notación decimal?

1.100. Supongamos que n números, 1, 2, . . ., n están dispuestos uno tras otro en círculo. Desplazándonos por el círculo, tachamos cada segundo número. Hállese el último número N no tachado. Demuéstrese que

$$N = 2n - 2^{[\log_2 n]+1} + 1.$$

CAPÍTULO II

MÉTODO DE FUNCIONES GENERATRICES

Se denomina *función generatriz*, o función generatriz ordinaria, de una sucesión de números $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ a una serie formal

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots,$$

donde t es una variable formal. En este caso escribiremos $a_n = \mathrm{Coef}_{t^n}\{A(t)\}$. Por definición, dos funciones generatrices

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

son iguales, si $a_n = b_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Para las funciones generatrices ordinarias se introduce el álgebra de las series formales de potencias, o bien álgebra de Cauchy con operaciones de adición, multiplicación, superposición, sustitución, diferenciación e integración. En particular, una función generatriz $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ es, por definición, un producto de las funciones generatrices

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

cuando y sólo cuando, para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}.$$

Una sucesión de números $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ lleva el nombre de *convolución de sucesiones* $b_0, b_1, \ldots, b_n$ y $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$, si $A(t) = B(t)\,C(t)$.

Se llama *función generatriz exponencial* de la sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ a una serie

$$E(t) = a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + \ldots + a_n \frac{t^n}{n!} + \ldots,$$

donde, al igual que en el caso anterior, t es una variable formal. Aquí, $a_n = \mathrm{Coef}_{t^n}\{E(t)\}$. En el álgebra de funciones generatrices

exponenciales el producto $E(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ de funciones generatrices exponenciales $F(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$ y $C(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ se define, a diferencia del álgebra de Cauchy, por la igualdad $a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_n c_{n-k}$, $n=0, 1, 2, \ldots$

Observemos que si por t entendemos una variable compleja, entonces, para t inferior al radio de convergencia de la serie correspondiente, la función generatriz será analítica. Con este motivo surge un problema recíproco: hallar los coeficientes de un desarrollo potencial según la función analítica.

§ 1. Funciones generatrices: propiedades y operaciones

Hállense las funciones generatrices de las siguientes sucesiones:

2.1. $f(n)=\begin{cases} 1, & n=0, 1, \ldots, N, \\ 0, & n>N. \end{cases}$

2.2. $f(n)=\begin{cases} n+1, & n=0, 1, \ldots, N, \\ 0, & n\geqslant N+1. \end{cases}$

2.3. $f(n)=\begin{cases} (n+1)(n+2), & n=0, 1, \ldots, N-1, \\ 0 & n\geqslant N, \end{cases}$

2.4. $f(n)=1$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.5. $f(n)=\alpha^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.6. $f(n)=\alpha n$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.7. $f(n)=n^2$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.8. $f(n)=n^k$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.9. $f(n)=n\alpha^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.10. $f(n)=C_{n+p-1}^n \alpha^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.11. $f(n)=C_{n+p-2}^{n-1} \alpha^n$, $n=1, 2, \ldots$

2.12. $f(n)=\begin{cases} 0, & n=0, \\ \alpha^n/n, & n=1, 2, \ldots \end{cases}$

2.13. $f(n)=\begin{cases} 0, & n=0, \\ \alpha^n/n! & n=1, 2, \ldots \end{cases}$

2.14. $f(n)=\begin{cases} 0, & n \text{ es par}, \\ \alpha^n/n!, & n \text{ es impar}. \end{cases}$

2.15. $f(n)=\begin{cases} 0, & n \text{ es impar}, \\ \alpha^n/n!, & n \text{ es par}. \end{cases}$

2.16. $f(n) = \operatorname{sen} \alpha n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.17. $f(n) = \cos \alpha n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Hállese la función generatriz de la sucesión $F(n)$ a través de la función generatriz de la sucesión $f(n)$, si

2.18. $F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ f(n-1), & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$

2.19. $F(n) = f(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.20. $F(n) = f(n+k)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $k \in \mathrm{N}$, $k > 0$,

2.21. $F(n) = \alpha^n f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.22. $F(n) = nf(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.23. $F(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.24. $F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, \ldots, k-1, \\ f(n-k), & n \geqslant k. \end{cases}$

2.25. $F(n) = f(n+1) - f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.26. $F(n) = \sum_{r=0}^{n} f(r)\, g(n-r)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Hállese la función generatriz exponencial $F^e(z)$ de la sucesión $F(n)$ expresada a través de $f^e(z)$:

2.27. $F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ f(n-1), & n = 1, 2\ldots \end{cases}$

2.28. $F(n) = f(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.29. $F(n) = nf(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.30. $F(n) = \alpha^n f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.31. $F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, 2, \ldots, k-1, \\ f(n-k), & n \geqslant k. \end{cases}$

2.32. $F(n) = f(n+1) - f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.33. $F(n) = \sum_{r=0}^{n} C_n^r f(n-r)\, g(r)$.

2.34. $F(n) = \sum \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!} f_1(k_1)\, f_2(k_2) \ldots f_m(k_m)$.

2.35. ¿Cómo son las sucesiones a las cuales corresponden las funciones generatrices

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1 + x + x^2 + \ldots)^n, \quad \frac{x^n}{(1-x)^n} = (x + x^2 + x^3 + \ldots)^n?$$

2.36. Sea $A(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ una función generatriz corriente y sea α una raíz primitiva de n-ésima potencia de 1, $\alpha = \exp\{2\pi i/n\}$, donde i es la unidad imaginaria.

Dividamos $A(z)$ en n secciones, de las cuales la k-ésima será $A_k^{(n)}(z) = a_k z^k + a_{k+n} z^{k+n} + \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (2.1) (*método de división en secciones de Morgan*). Muéstrese que

$$A_k^{(n)}(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha^{kj}} A(\alpha^j z). \tag{2.2}$$

2.37. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ unas variables. Muéstrese que

$$(1 + x_1 z)(1 + x_2 z) \ldots (1 + x_k z) =$$
$$= 1 + \sigma_1(x_1, \ldots, x_k) z + \sigma_2(x_1, \ldots, x_k) z^2 + \ldots + \sigma_k(x_1, \ldots, x_k) z^k,$$

donde $\sigma_m(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$ $(m = 1, 2, \ldots, k)$ es la m-ésima función simétrica elemental. En particular, si

$$C_k^m = \binom{k}{m} = \sigma_m(x_1, \ldots, x_k)|_{x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1}$$

es el número de combinaciones de k según m, entonces

$$C_k(z) = (1 + z)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m z^k, \tag{2.3}$$

donde $C_k^0 = 1$.

2.38. Demuéstrense las siguientes propiedades de las combinaciones:

a) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$, $n = 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots, n+1$; las condiciones iniciales son: $C_1^0 = C_1^1 = 1$;

b) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$;

d) para $m = 0, 1, \ldots, n-1$ es válida la identidad de Van der Monde

$$C_n^k = \sum_{j=0}^{k} C_{n-m}^j C_m^{k-j}.$$

2.39. Sean

$$S_m(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i^m,$$

$$\sigma_m(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}, \quad 1 \leqslant m \leqslant k,$$

sumas potenciales y funciones simétricas elementales, respectivamente. Demuéstrese que

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\sigma_m(x_1,\ \ldots,\ x_h)\,z^m=$$

$$=\exp\left\{-\sum_{j=1}^{\infty}S_j(x_1,\ \ldots,\ x_h)\frac{z^j}{j}\right\}. \tag{2.4}$$

(La fórmula (2.4) se llama a veces fórmula de Waring.) Observemos que el primer miembro de (2.4) contiene sólo un número finito de sumandos.

2.40. Sea $\pi=\pi(n)$ una partición no ordenada $\{1^{k_1}2^{k_2}\ \ldots\ n^{k_n}\}$ del número n, donde k_i es el número de partes iguales a i, de suerte que $n=k_1+2k_2+\ \ldots\ +nk_n$; $k(\pi)$ es el número de partes en la partición π, es decir, $k(\pi)=\sum_{i=1}^{n}k_i$, y para cada $j=1,\ 2,\ \ldots$

$$A_j(x)=a_0(j)+a_1(j)\,x+\ \ldots\ +a_h(j)\,x^h+\ \ldots$$

es una función generatriz de la sucesión $a_0(j)\,a_1(j),\ \ldots,\ a_h(j),\ \ldots$ Demuéstrese que

$$\prod_{j=1}^{\infty}A_j(x^j)=\prod_{j=1}^{\infty}a_0(j)+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sum_{\pi(n)}a_{k_1}(1)\ \ldots\ a_{k_n}(n)\prod_{m=n+1}^{\infty}a_0(m), \tag{2.5}$$

donde $\sum_{\pi(n)}$ significa la sumación respecto de todas las particiones del número n.

2.41. Sea p_n el número de particiones no ordenadas de n, $n\geqslant 1$, $p_0=1$. Introduzcamos la función generatriz $p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n$. Demuéstrese que

$$p(x)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^j}. \tag{2.6}$$

2.42. Denotemos con $p_{n,\,k}$, para $n\geqslant 1$, el número de particiones de n en k partes; $p_{00}=1$. Demuéstrese que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p_{n,\,k}y^k\right)x^n=\prod_{j=1}^{\infty}(1-yx^j)^{-1}. \tag{2.7}$$

2.43. Muéstrese que

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1-y_jx^j)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\pi(n)}y_1^{k_1}y_2^{k_2}\ \ldots\ y_n^{k_n}\right)x^n. \tag{2.8}$$

2.44. Muéstrese que

$$\exp\left\{\frac{xy}{1-x}\right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n \sum_{\pi(n)} \frac{y^{h(\pi)}}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}\right). \tag{2.9}$$

2.45. Sea a_1, a_2 cierta sucesión numérica y supongamos que para toda partición $\pi = \{1^{k_1}2^{k_2} \ldots n^{k_n}\}$ del número n se verifica

$$L(\pi) = a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n.$$

Demuéstrese que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n \sum_{\pi(n)} L(\pi)\right) = p(x) \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{x^j}{1-x^j}, \tag{2.10}$$

donde $p(x)$ es la función generatriz de las particiones definida en el problema 2.41.

2.46. Demuéstrese la identidad

$$\sum_{\pi(n)} \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} = \binom{n-1}{k-1}, \tag{2.11}$$

donde la sumación se realiza respecto de todas las particiones $\pi = \{1^{k_1}2^{k_2} \ldots n^{k_n}\}$ del número n tal que $k(\pi) = k$.

2.47. Demuéstrese que en las designaciones de los problemas 2.41 y 2.45 tiene lugar la identidad

$$\sum_{\pi(n)} L(\pi) = \sum_{u+v=n} p_u \sum_{d \mid v} a_d, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

2.48. Pruébese que

$$np_n = \sum_{h=0}^{n-1} p_h \sigma_{n-h}, \tag{2.13}$$

donde $\sigma_v = \sum_{d \mid v} d$ es la suma de divisores v.

2.49. Demuéstrese que

$$\sum_{\pi(n)} (k_1 + \ldots + k_n) = \sum_{h=0}^{n-1} p_h \tau(n-k),$$

donde $\tau(v) = \sum_{d \mid v} 1$ es el número de divisores v.

2.50. Sea $\sigma(x) = \sigma_1 + \sigma_2 x + \ldots + \sigma_n x^{n-1} + \ldots$ una función generatriz de los números σ_n definidos en el problema 2.48. Demuéstrese que

a) $$dp(x)/dx = \sigma(x)\, p(x)$$

y que, por consiguiente,

b) $$p(x) = \exp\left\{\sigma_1 x + \frac{\sigma_2}{2} x^2 + \ldots + \frac{\sigma_n}{n} x^n + \ldots\right\};$$

c) $$p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\frac{x^n}{n!},$$

donde $C_n(y_1, \ldots, y_n)$ es el índice cíclico del grupo simétrico de grado n; en particular,

d) $$p_n = \frac{1}{n!} C_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

2.51. Sean $E(x)$ y $F(x)$ funciones generatrices exponenciales de las sucesiones $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ y $b_0, b_1, \ldots, b_k$, respectivamente, donde $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Demuéstrese que $E(x)$ y $F(x)$ satisfacen la relación

$$F(x) = \exp\{E(x)\}, \tag{2.14}$$

cuando y sólo cuando para cada $n \geqslant 0$ se cumplen las igualdades

$$b_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a_{j+1} b_{n-j}. \tag{2.15}$$

§ 2. Números especiales y funciones especiales

2.52. Denominemos $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$-*partición* del n-conjunto M a un juego ordenado $M_1, M_2, \ldots, M_k$ de subconjuntos M tales que $M_i \cap M_j = \varnothing$, siempre que $i \neq j$, y $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k = M$, con la particularidad de que $|M_1| = r_1, \ldots, |M_k| = r_k$. Los números r_i son no negativos y satisfacen la relación $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$. Demuéstrese que el número de $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$-particiones es

$$\sigma(r_1, r_2, \ldots, r_k) = n!/(r_1! r_2! \ldots r_k!).$$

2.53. Sean $k_1, k_2, \ldots, k_n$ unos números enteros no negativos tales que

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n.$$

Muéstrese que el número de particiones de un n-conjunto que contienen k_i i-subconjuntos $(i = 1, 2, \ldots)$, es

$$B_n(k_1, \ldots, k_n) = \frac{n!}{(1!)^{k_1}(2!)^{k_2} \ldots (n!)^{k_n} k_1! k_2! \ldots k_n!}.$$

2.54. Designemos con $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ el número de permutaciones (sustituciones) de n símbolos que contienen k_1 ciclos de longitud 1, k_2 ciclos de longitud 2, etc., k_n ciclos de longitud n.

Muéstrese que

a) $$P_n(k_1, \ldots, k_n) = (0!)^{k_1}(1!)^{k_2}(2!)^{k_3} \ldots \ldots ((n-1)!)^{k_n} B_n(k_1, \ldots, k_n)$$

y, por consiguiente,

b) $$P_n(k_1, \ldots, k_n) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!\, 1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}}.$$

2.55. Designemos con B_n el número de toda clase de particiones de un conjunto compuesto por $n \geqslant 1$ elementos. Estos números llevan el nombre de Bell. Pongamos, además, $B_0 = 1$. Demuéstrese que los números de Bell satisfacen la relación recurrente

$$B_{n+1} = \binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \ldots + \binom{n}{n} B_n, \quad n \geqslant 0. \tag{2.16}$$

2.56. Muéstrese que el número de particiones diferentes de n-conjunto (número de Bell) puede escribirse en la forma

$$B_n = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \frac{n!}{\prod_{s=1}^{n} (s!)^{k_s} k_s!},$$

donde la sumación se realiza respecto de diferentes particiones del número n tal que $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$.

2.57. Examinemos, para cada $n \geqslant 1$, un polinomio de n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

a) $$Y_n(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} B_n(k_1, \ldots, k_n)\, y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots y_n^{k_n}, \tag{2.17}$$

donde $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$, y los números $B_n(k_1, \ldots, k_n)$ están definidos en el problema 2.53. Muéstrese que la función generatriz exponencial de estos polinomios es

$$1 + \sum_{n=1} Y_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \exp\left\{\sum_{n=1} y_n \frac{z^n}{n!}\right\}. \tag{2.18}$$

(Estos polinomios llevan el nombre de *polinomios de Bell*).

b) Sea $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$ una función generatriz exponencial de los números de Bell, definidos en el problema 2.55. Muéstrese que

$$B(x) = \exp\{e^x - 1\}. \tag{2.19}$$

2.58. Sea $c_0 = 1$ y supongamos que para cada $n \geqslant 1$, $c_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es un polinomio de las variables $y_1, \ldots, y_n$ de la forma

$$c_n(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} P_n(k_1, \ldots, k_n)\, y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}, \quad (2.20)$$

donde $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$, y los números $P_n(k_1, \ldots, k_n)$ están definidos en el problema 2.54. Muéstrese que la función generatriz exponencial de los polinomios $c_n(y_1, \ldots, y_n)$ es

$$1 + \sum_{n=1} c_n(y_1, \ldots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n}\right\}. \quad (2.21)$$

2.59. Introduzcamos los polinomios de n variables:

$$Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} B_n(k_1, \ldots, k_n)\, y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}, \quad (2.22)$$

donde $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$, y los números $B_n(k_1, \ldots, k_n)$ están definidos en el problema 2.53. Muéstrese que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n)\, x^k \frac{z^n}{n!} = \exp\left\{x \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!}\right\} \quad (2.23)$$

y, por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n) = Y_n(y_1, \ldots, y_n), \quad (2.24)$$

donde $Y_n(y_1, \ldots, y_n)$ son polinomios de Bell del problema 2.57, *a*); y, además, muéstrese que para $k \geqslant 1$

$$\sum_{n=k}^{\infty} Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!}\right]^k, \quad (2.25)$$

es decir,

$$Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n) = n!\, \mathrm{Coef}_{z^n}\left[\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!}\right]^k. \quad (2.26)$$

2.60. Demuéstrense las siguientes propiedades de los polinomios de Bell $Y_n(y_1, \ldots, y_n)$, definidos por la igualdad (2.17):

a) para $n = 0, 1, \ldots$ tiene lugar una relación recurrente

$$Y_{n+1} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} y_{s+1} Y_{n-s};$$

b) $Y_n(cy_1, c^2y_2, \ldots, c^ny_n) = c^nY_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$;

c_1) $\frac{\partial}{\partial y_1} Y_n(y_1, \ldots, y_n) = \binom{n}{j} Y_{n-j}(y_1, \ldots, y_{n-j})$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

c_2) para $r = 1, 2, \ldots, [n/j]$

$$\frac{\partial^r}{\partial y_j^r} Y_n(y_1, \ldots, y_n) = \frac{n!}{(j!)^r (n-rj)!} Y_{n-rj}(y_1, \ldots, y_{n-rj});$$

c_3) para $r > [n/j]$

$$\frac{\partial^r}{\partial y_j^r} Y_n(y_1, \ldots, y_n) = 0;$$

d) los polinomios $Y_n(y_1, \ldots, y_n)$ satisfacen el teoroma de adición

$$Y_n(y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Y_k(y_1, \ldots, y_k) \times$$

$$\times Y_{n-k}(x_1, \ldots, x_{n-k}), \quad n = 1, 2, \ldots;$$

e) $$Y_{n+1} = \left(y_1 + \sum_{s=1}^{n} y_{s+1} \frac{\partial}{\partial y_s}\right) Y_n.$$

2.61. Sea H un subconjunto de una serie natural $A_H(x) = \sum_{h \in H} \frac{x^h}{h!}$ y $B_n(H)$, el número de particiones del n-conjunto en partes, cuyas potencias representan precisamente los elementos de H. Entonces, para la función generatriz exponencial de los números $B_n(H)$ se verifica la relación

$$B_H(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(H) \frac{x^n}{n!} = \exp\{A_H(x)\}. \tag{2.27}$$

donde

$$B_n(H) = \sum_{\sum_{h=1}^{n} h l_h = n,\ h \in H} \frac{n!}{\prod_{\substack{h=1 \\ h \in H}}^{n} (h!)^{l_h} l_h!}, \tag{2.28}$$

y para los números $B_n(H)$ es válida la relación recurrente

$$B_{n+1}(H) = \sum_{h+1 \in H} \binom{n}{k} B_{n-k}(H). \tag{2.29}$$

2.62. Designemos con $S_1^1(n, k)$ el número de particiones de un n-conjunto en k partes no vacías, $n = 1, 2, \ldots$; $k = 1, \ldots, n$. Pongamos, por definición, $S(0, 0) = 1$, $S(0, m) = 0$, si $m \neq 0$,

y $S(n, k) = 0$, si $n > 0$ y $k \notin \{1, 2, \ldots, n\}$. Los números $S(n, k)$ se llaman *números de Stirling de 2° género*.

a) Cerciórese de que

$$S(n, 1) = 1, \quad S(n, n) = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} S(n, k) = B(n), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

donde $B(n) = B_n$ son los números de Bell.

b) Muéstrese que para los números de Stirling de 2° género se verifica la relación recurrente

$$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1), \quad n \geqslant 1,$$

con las condiciones iniciales $S(0, 0) = 1$, $S(0, k) = 0$, $k \neq 0$.

c) Demuéstrese que tiene lugar la representación

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!},$$

donde la sumación se realiza respecto de todos los juegos de números enteros positivos $r_1, \ldots, r_k$ tales que $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$.

Demuéstrese que

$$S(n, k) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n! (1)^{k_1} \ldots (n!)^{k_n}},$$

donde $k_1, k_2 + \ldots + k_n = k$, $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$.

e) Compruébese que

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}, \quad n \geqslant 2,$$

$$S(n, n-2) = \sum_{i=1}^{n-2} (n-i-1) \binom{n-i}{2}, \quad n \geqslant 3.$$

2.63. Llamemos *polinomios de Stirling* los siguientes

$$P_n(y) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) y^k, \quad P_n(1) = B_n,$$

y, además, pongamos $P_0(y) = 1$. Muéstrese que

$$P_n(y) = y [dP_{n-1}(y)/dy + P_{n-1}(y)] \tag{2.30}$$

y que (2.30) es equivalente a la solución

$$P_n(y) e^y / y = d[e^y P_{n-1}(y)]/dy. \tag{2.31}$$

2.64. Sea $S(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(y) \frac{x^n}{n!}$ una función generatriz exponencial de los polinomios de Stirling. Muéstrese que

$$S(x, y) = \exp\{y(e^x - 1)\}. \tag{2.32}$$

2.65. Introduzcamos para cada $k = 1, 2, \ldots$ las funciones generatrices exponenciales

$$Y_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!}. \tag{2.33}$$

Muéstrese que

$$Y_k(x) = (e^x - 1)^k/k!, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.34}$$

2.66. Muéstrese que las funciones generatrices $Y_k(x)$ del problema 2,65 satisfacen la correlación

$$dY_k(x)/dx = kY_k(x) + Y_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.35}$$

2.67. Demuéstrese la identidad

$$S(n+1, k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(j, k-1). \tag{2.36}$$

2.68. Muéstrese que para los polinomios de Stirling $P_n(x)$ quedan cumplidas las relaciones

$$P_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} P_k(x), \tag{2.37}$$

$$\frac{d}{dx} P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} P_k(x). \tag{2.38}$$

2.69. Demuéstrese la identidad

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{y^k}{k!} = e^y P_n(y), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.39}$$

donde $P_n(x)$ son polinomios de Stirling definidos en el problema 2.63, y, como consecuencia, para los números de Bell, la validez de la representación

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}. \tag{2.40}$$

2.70. Demuéstrese la identidad

$$x \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^n \frac{x^s}{s!} = e^x P_{n+1}(x) \tag{2.41}$$

y el caso particular:

$$B_{n+1} = \frac{1}{e} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^n \frac{1}{s!}. \tag{2.42}$$

2.71. Introduzcamos las funciones generatrices $S_0(z) = 1$ también para $k = 1, 2, \ldots$

$$S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k, k) z^n. \tag{2.43}$$

Demuéstrese la relación recurrente

$$(1 - kz) S_k(z) = S_{k-1}(z), \tag{2.44}$$

de suerte que

$$(1 - z)(1 - 2z) \ldots (1 - kz) S_k(z) = 1. \tag{2.45}$$

2.72. Demuéstrese para los números de Stirling de 2° género las siguientes fórmulas

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n, \tag{2.46}$$

$$S(n, k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i^n. \tag{2.47}$$

2.73. Obténgase para los números de Stirling de 2° género la representación

$$S(n, k) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_{n-k})} i_1 i_2 \ldots i_{n-k}, \tag{2.48}$$

donde $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{n-k} \leqslant k$, es decir, que $S(n, k)$ es igual a la suma de los productos de los elementos de las combinaciones de orden $n - k$ con repitición, mas sin permutaciones de los números $1, 2, \ldots, k$.

2.74. Muéstrese que los números de Stirling de 2° género $S(n, k)$ pueden ser definidos como coeficientes del desarrollo

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} x(x-1) \ldots (x-k+1) S(n, k), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.49}$$

2.75. Sea $q_0 = 1$ y supongamos que para $n \geqslant 1$

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} B_k B_{n-k}.$$

Muéstrese que la función generatriz exponencial de los números q_n es

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n \frac{z^n}{n!} = e^{e^z + e^{-z} - 2}. \tag{2.50}$$

2.76. Sea $C(0, 0) = 1$, $C(n, 0) = 0$ para cualquier $n \neq 0$ y $C(0, k) = 0$, siempre que $k \neq 0$. Para $n \geqslant 1$ designemos por

$C(n, k)$ el número de permutaciones de n símbolos con k ciclos. Los números

$$s(n, k) = (-1)^{n+k} C(n, k)$$

se denominan *números de Stirling de* 1er *género*. Muéstrese que

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + (n-1) C(n-1, k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.51}$$

y, por consiguiente,

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1) s(n-1, k), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.52}$$

2.77. Sea $C_0(x) = 1$ y supongamos que para $n \geqslant 1$

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) x^k.$$

Muéstrese que

$$\begin{aligned} C_n(x) &= (x + n - 1) C_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \\ C_n(x) &= x(x+1) \ldots (x+n-1), \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.53}$$

2.78. Compruébese que los números de Stirling de 1er género $s(n, k)$ son precisamente coeficientes en el desarrollo

$$(x)_n = x(x-1) \ldots (x-n+1) = \sum_{k=1}^{n} s(n, k) x^k. \tag{2.54}$$

2.79. Muéstrese que las magnitudes $(-1)^{n+k} s(n, k)$ son positivas para $n \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$ y son iguales a

$$(-1)^{n+k} s(n, k) = a_{n-k}(1, 2, \ldots, n-1) =$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_{n-k})} i_1 i_2 \ldots i_{n-k}, \text{ donde } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k} \leqslant n-1. \tag{2.55}$$

2.80. Muéstrese que la función generatriz exponencial

$$y_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

($y_0(x) \equiv 1$), satisface la relación diferencial recurrente

$$(1 + x)\, dy_k(x)/dx = y_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.56}$$

Dedúzcase de aquí que

$$y_k(x) = [\ln(1 + x)]^k / k!. \tag{2.57}$$

2.81. Muéstrese que la función generatriz

$$s(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} s(n, k) x^k \frac{t^n}{n!}$$

es $s(t, x) = (1 + t)^x$.

2.82. Demuéstrese la identidad

$$s(n+1, k) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j j! \binom{n}{j} s(n-j, k-1). \tag{2.58}$$

2.83. Muéstrese que los números de Stirling de 1er y 2° género están ligados entre sí mediante las relaciones

$$\sum_{k=1} S(n, k) s(k, m) = \delta_{nm}, \tag{2.59}$$

$$\sum_{k=1} s(n, k) S(k, m) = \delta_{nm}, \tag{2.60}$$

donde $\delta_{nm} = 1$, si $n = m$, y $\delta_{nm} = 0$, si $n \neq m$, y las sumas se toman respecto de todos los valores k, para los cuales $s(k, m)$ y $S(n, k)$ son distintas de cero.

2.84. Sean $a_1, a_2, \ldots$ y $A_1, A_2, \ldots$ dos sucesiones numéricas tales que

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{n} s(n, \nu) a_\nu, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.61}$$

Muéstrese que en este caso

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{n} S(n, \nu) A_\nu, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.62}$$

y viceversa, de (2.62) se deduce (2.61).

2.85. Muéstrese que

$$\sum_{k=0}^{n} s(n, k) B_k = 1, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.63}$$

donde $s(n, k)$ son los números de Stirling de 1er género; B_k son los números de Bell.

2.86. Demuéstrese que los números de Stirling de 2° género $s(n, k)$ y los polinomios de Stirling $P_n(x)$ (véase el problema 2.63) están ligados mediante la relación

$$\sum_{k=0}^{n} s(n, k) P_k(x) = x^n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.64}$$

2.87. Pongamos

$$j_0(x) = 1, \; j_n(x) = x(x-1) \ldots (x-n+1), \; n = 1, 2, \ldots$$

Muéstrese que los polinomios $j_n(x)$ y los números de Stirling de 2° género están ligados mediante la relación

$$\sum_{k=0}^{n} S(n, k)\, j_k(x) = x^n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.65}$$

2.88. Muéstrese que el número de métodos para alojar n diferentes objetos (mostacillas) en m diferentes células, a condición de que ninguna de las células esté vacía, es igual a

$$\mu(n, m) = m!S(n, m) \tag{2.66}$$

(donde $S(n, m)$ es el número de Stirling de 2° género),

$$\mu(n, m) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n \tag{2.67}$$

y se expresa por la relación recurrente

$$\mu(n, m) = m\,[\mu(n-1, m) + \mu(n-1, m-1)]. \tag{2.68}$$

2.89. Muéstrese que el número de métodos para alojar n diferentes objetos en m cajones distinguibles, a condición de que p cajones estén ocupados y $(m-p)$ cajones libres, es igual a

$$\mu_p(n, m) = m(m-1) \ldots (m-p+1)\, S(n, p). \tag{2.69}$$

2.90. Dese la interpretación combinatoria de la identidad

$$m^n = \sum_{p=1}^{m} (m)_p\, S(n, p), \tag{2.70}$$

donde $(m)_p = m(m-1) \ldots (m-p+1)$, m es un número positivo entero.

2.91. Muéstrese que el número de métodos para distribuir n objetos distinguibles en m células iguales, a condición de que ninguna de ellas quede vacía, se determina por el número de Stirling de 2° género $S(n, m)$, y si la condición mencionada está ausente, por el número de Bell B_n.

2.92. Muéstrese que un número igual al producto de n diferentes factores simples puede ser representado en forma del producto de m factores mediante $S(n, m)$ diferentes métodos.

2.93. Introduzcamos los números generalizados de Stirling $S(n, m, k)$ que se definen como el número de métodos para alojar n objetos distinguibles en m células diferentes dividido por $k!$, a condición de que ninguna de las k células fijas citadas quede vacía. Muéstrese que

$$S(n, m, k) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (m-k)^{n-\nu} S(\nu, k). \tag{2.71}$$

2.94. Examinemos una función generatriz exponencial de los números generalizados de Stirling

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, m, k) \frac{x^n}{n!}. \tag{2.72}$$

Muéstrese que

$$\varphi_k(x) = e^{(m-k)x}(e^x - 1)^k/k! \tag{2.73}$$

§ 3. Teoría de Polya

Si la permutación (sustitución) de un n-conjunto se desarrolla en el producto de b_i ciclos de longitud i ($i = 1, \ldots, n$), suele decirse que la permutación es del tipo $(b_1, \ldots, b_n)$. Si G es un grupo de permutaciones del n-conjunto, entonces el polinomio

$$P_G(x_1, \ldots, x_n) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n},$$

donde $(b_1, \ldots, b_n)$ es el tipo g, se denomina *índice cíclico del grupo* G. Si G es un grupo de permutaciones del conjunto S, entonces dos elementos s_1 y s_2 se llaman equivalentes (la notación es $s_1 \sim s_2$), si $\exists g \in G$: $gs_1 = s_2$. Las clases de equivalencia se llaman *conjuntos transitivos*, o bien *órbitas*.

LEMA DE BERNSAID. *El número de conjuntos transitivos es igual a*

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} \psi(g), \quad \textit{donde} \quad \psi(g) = |\{s \in S: \ gs = s\}|.$$

Sean D y R unos conjuntos finitos y sea G un grupo de permutaciones del conjunto D. Designemos con R^D un conjunto de funciones, para las cuales D será el campo de definición y R, el campo de valores. Para $f_1, f_2 \in R^D$

$$f_1 \sim f_2, \quad \text{si} \quad \exists g \in G: f_1(g\alpha) = f_2(\alpha) \quad \forall \alpha \in D.$$

A todo elemento $r \in R$ se le atribuye el peso $\omega(r)$, esto es, el elemento de un anillo conmutativo. El peso de la función $f \in R^D$ es, por definición, $W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d))$. *El inventario* de cualquier conjunto Q con elementos provistos de peso será

$$\operatorname{Inv} Q = \sum_{q \in Q} \omega(q).$$

Si los elementos f_1 y f_2 son equivalentes, tienen un peso igual. Por eso resulta posible definir *el peso de la clase de equivalencia* $W(F)$ como el peso $W(f)$ de cualquier elemento $f \in F$.

TEOREMA FUDDAMENTAL DE POLYA. *El inventario de las clases de equivalencia es igual a*

$$\sum_F W(F) = P_G\left\{\sum_{r\in R}\omega(r),\ \sum_{r\in R}[\omega(r)^2],\ \sum_{r\in R}[\omega(r)]^3,\ \ldots\right\}.$$

En particular, si los pesos se han elegido iguales a 1, entonces obtenemos el número de clases de equivalencia igual a $P_G(|R|, |R|, |R|, \ldots)$.

2.95. Sea $N = \{1, \ldots, n\}$, y S_n, un grupo simétrico sobre N. Si $\pi \in S_n$ divide N en b_i ciclos de longitud i ($i = 1, \ldots, n$), se dice que la permutación π es *del tipo* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Demuéstrese que el número de permutaciones con el tipo dado $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ es igual a

$$n!\Big/\prod_{i=1}^{n}(i^{b_i}b_i!)$$

2.96. Sea G un subgrupo del grupo simétrico S_n. Para cada $g \in G$ formamos el producto $x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n}$, siempre que $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ es del tipo g.

Demuéstrese que

$$P_{S_n}(x_1, \ldots, x_n) = \sum{}^{*}\frac{x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n}}{\prod_{i=1}^{n}(i^{b_i}b_i!)},$$

donde el signo * significa que la sumación se realiza respecto de toda clase de números enteros no negativos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que satisfacen la condición $b_1 + 2b_2 + \ldots + nb_n = n$.

2.97. Demuéstrese el teorema de Cayley: todo grupo finito G es isomorfo a cierto subgrupo del grupo simétrico $S_{|G|}$. Dicho subgrupo lleva el nombre de *representación de Cayley* del grupo G.

2.98. Sea G un grupo finito. Se denomina *índice cíclico* P_G de este grupo el índice cíclico de su representación de Cayley. Demuéstrese que

$$P_G = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}[x_{k(g)}]^{n/k(g)} = \frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\nu(d)\,(x_d)^{n/d},$$

donde n es el orden del grupo G; $k(g)$ es el orden del elemento $g \in G$; $\nu(d)$, el número de elementos $g \in G$ cuyo orden es $k(g) = d$.

2.99. Sea G un grupo de todas las raíces de n-ésima potencia de la unidad, $G = \{e^{2\pi ij/n}\}$, donde $j = 1, \ldots, n$, e i, la unidad imaginaria.

Demuéstrese que $P_G = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_n/(n, j))^{(n, j)}$, donde (n, j) es el máximo común divisor de n y j.

2.100. Sea G el conjunto de todas las permutaciones de los vértices de un tetraedro que pueden obtenerse haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo G.

2.101. Sea G un conjunto de todas las permutaciones de las aristas de un tetraedro que pueden ser obtenidas haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo G.

2.102. Sea G un conjunto de todas las permutaciones de las caras de un tetraedro que pueden ser obtenidas haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo G.

2.103. Sea G un conjunto de permutaciones de los vértices de un cubo que pueden ser obtenidas mediante sus revoluciones. Hállese el índice cíclico del grupo G.

2.104. Sea G un conjunto de todas las permutaciones de las aristas de un cubo que pueden ser obtenidas haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo G.

2.105. Sea G un conjunto de todas las permutaciones de las caras de un cubo que pueden ser obtenidas haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo G.

2.106. Demuéstrese que el índice cíclico de un grupo simétrico S_n es igual al coeficiente de z^n en el desarrollo

$$\exp\{zx_1 + z^2x_2/2 + z^3x_3/3 + \ldots\}.$$

2.107. Sea G un grupo de permutaciones del conjunto S, y H, un grupo de permutaciones del conjunto T. Supongamos que $S \cap T = \varnothing$, y $S \cup T = U$. A cualquier opción de $g \in G$ y $h \in H$ le corresponde la permutación $g \times h$ del conjunto U definida del modo siguiente:

$$u \to gu, \quad \text{si} \quad u \in S; \qquad u \to hu, \quad \text{si} \quad u \in T.$$

a) Muéstrese que estas permutaciones forman un grupo cuyo orden es igual a $|G|\,|H|$. Este grupo lleva el nombre de *producto directo de los grupos* G y H y se denota $G \times H$.

b) Muéstrese que si $g \in G$ y $h \in H$ tienen los tipos $(b_1, \ldots, b_n)$ y $(c_1, \ldots, c_n)$, respectivamente, entonces $g \times h$ es del tipo $(b_1 + c_1,\ b_2 + c_2, \ldots)$.

c) Demuéstrese la fórmula $P_{G\times H} = P_G P_H$.

2.108. G es un grupo finito y S, un conjunto finito. Supongamos que existe una aplicación homomorfa π del grupo G en el grupo simétrico del conjunto S:

$$\pi\colon\ g \to \pi_g \quad \forall g \in G.$$

En este caso suele decirse que G actúa en S. Para $s_1,\ s_2 \in S$

$$s_1 \sim s_2 \iff \exists g \in G\colon\ \pi_g s_1 = s_2.$$

Demuéstrese que $\sim$ es una relación de equivalencia. (Las clases de equivalencia que le corresponden a esta relación se llaman conjuntos transitivos.)

2.109. Demuéstrese *el lema de Bernsaid*: el número de conjuntos transitivos definidos por el grupo G, que actúa sobre el conjunto S, es igual a

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi(g),\quad \psi(g)=|\{s\in S:\ \pi_g s=s\}|,$$

2.110. Sea $S=\{a, b, c, d\}$ y $G=\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ donde

$$\pi_1=\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ a & b & c & d\end{pmatrix},\qquad \pi_2=\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ b & a & c & d\end{pmatrix},$$
$$\pi_3=\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ a & b & d & c\end{pmatrix},\qquad \pi_4=\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ b & a & d & c\end{pmatrix}.$$

La relación de equivalencia en S viene inducida por el grupo G. Hállese el número de clases de equivalencia.

2.111. Partiendo de las letras a y b se forman palabras de longitud 3. Ellas se consideran equivalentes, si se obtienen una de la otra al cambiar de lugar las letras extremas, por ejemplo, $abb \sim bba$. Determínese el número de clases de equivalencia sirviéndose del lema de Bernsaid.

2.112. Se hacen collares de abalorios (cuentas de vidrio) de tres colores. Cada collar está compuesto por cinco abalorios. Se consideran iguales aquellos que se obtienen uno del otro por revolución en un plano (no se admiten reflexiones especulares). Determínese el número de diferentes collares.

2.113. Se hacen collares de abalorios de k colores. Cada collar está compuesto por n abalorios. Se consideran iguales aquellos collares que se obtienen uno del otro por revolución en un plano (no se admiten reflexiones especulares). Determínese el número de diferentes collares aplicando el teorema de Polya.

2.114. n hombres se sientan alrededor de una mesa. ¿Cuántos son en este caso los diferentes modos de sentarse, si se consideran iguales aquellos que se obtienen por desplazamiento de todas las personas en sentido horario en un número arbitrario (pero igual para todos) de asientos? (Hágase uso del lema de Bernsaid.)

2.115. Los números del 1 al 10^5 están escritos cada uno en hojas sueltas. Los números inferiores a 10^5 comienzan por el número correspondiente de ceros, por ejemplo, $346 = 000346$. Convengamos en considerar que las cifras 0, 1, 8 significan lo mismo tanto en la inscripción directa (normal), como en la forma volcada, mientras que la cifra 6 se convierte, al volcarla, en 9, y viceversa. Por eso, para los números, por ejemplo, 89166 y 99168 podemos preparar tan solo una hoja. ¿Cuántas hojas nos harán falta?

2.116. D, R son unos conjuntos finitos. Designemos con R^D el conjunto de aplicaciones de D en R; G es el grupo de permutaciones

del conjunto D. Se escribe

$$f_1 \sim f_2, \quad \text{si} \quad \exists g \in G: f_1(gd) = f_2(d) \quad \forall d \in D.$$

Demuéstrese que: a) $|R^D| = |R|^{|D|}$; b) $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto R^D.

2.117. Las caras de un cubo están pintadas de dos colores: azul y rojo. Las coloraciones de dos cubos se consideran equivalentes, si uno de ellos se puede girar de un modo tal que los cubos dejen de parecer diferentes. ¿Cuántas son las clases de equivalencia y cuál es la potencia de cada una de ellas?

2.118. D, R son unos conjuntos finitos; G es un grupo de permutaciones del conjunto D. A todo elemento $r \in R$ se le está atribuido un peso $\omega(r)$, esto es, el elemento de un anillo conmutativo. El peso $W(f)$ de la función $f \in R^D$ se define como el producto $W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d))$. Demuéstrese que si las funciones f_1 y f_2 son equivalentes, entonces tienen un peso igual.

2.119. Se denomina *inventario* $\operatorname{Inv} Q$ de un conjunto Q a

$$\operatorname{Inv} Q = \sum_{q \in G} \omega(q),$$

donde $\omega(q)$ es un elemento del anillo conmutativo.

Sean D y R unos conjuntos finitos. Demuéstrese que

a) $\operatorname{Inv} R^D = (\operatorname{Inv} R)^{|D|}$;

b) Si D está dividido en varios componentes disjuntos $D_1, \ldots, D_k$, y S es el conjunto de todas las funciones que son constantes en cada componente, entonces se verifica la relación

$$\operatorname{Inv} S = \prod_{i=1}^{k} \sum_{r \in R} [\omega(r)]^{|D_i|}.$$

2.120. Las caras de un tetraedro se pintan en dos colores: rojo y azul. Si dos tetraedros dispuestos paralelamente están pintados de un modo distinto, puede ocurrir que uno de ellos se pueda girar de tal manera que ambos dejen de parecer distintos. En este caso pertenecerán a una clase de equivalencia. Calcúlese el número de diferentes clases de equivalencia aplicando el teorema de Polya.

2.121. Determínese, aplicando el teorema de Polya: ¿mediante cuántos métodos se puede pintar un cubo en dos colores de tal modo que cuatro caras sean coloreadas de rojo, y dos caras, de azul? (Dos cubos en el espacio tridimensional se consideran coloreados igual, si uno de ellos se puede girar de tal manera que los cubos se hagan indistinguibles.)

Si X es un conjunto, la relación binaria en X es un subconjunto $P \subset X \times X$; escribimos $x \leqslant y$, si $(x, y) \in P$. La relación binaria recibe el nombre de orden parcial, si satisface las condiciones:

a) $x \leqslant x, \quad \forall x \in X$;

b) $x \leqslant y, \quad y \leqslant x \Rightarrow x = y, \quad \forall x, y \in X$;

c) $x \leqslant y, \quad y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z, \quad \forall x, y, z \in X$.

Se denomina *conjunto parcialmente ordenado* al conjunto X junto con el orden parcial en él. El conjunto parcialmente ordenado X se denomina anticadena, si para cualesquiera, $x, y \in X$ de $x \leqslant y$ se deduce que $x = y$. Se llama *automorfismo* del conjunto parcialmente ordenado X a tal permutación g del conjunto X que $x \leqslant y \Leftrightarrow gx \leqslant gy$ para cualesquiera $x, y \in X$.

2.122. Demuéstrese que el conjunto de todos los automorfismos del conjunto parcialmente ordenado X es un grupo respecto a la operación de composición llamado grupo de automorfismos del conjunto parcialmente ordenado X.

2.123. Sea L un subgrupo del grupo de automorfismos de un conjunto finito parcialmente ordenado X. Demuéstrese que las órbitas del grupo L son anticadenas.

Con $X/L = \{C\}$ se denota el conjunto de órbitas del grupo L. En este conjunto se introduce una relación binaria $\preccurlyeq$ del modo siguiente: $C \preccurlyeq C'$, si existen $x' \in C$, $x' \subset C'$ tales que $x \preccurlyeq x'$.

2.124. Demuéstrese que la relación binaria $\preccurlyeq$ en X/L es un orden parcial.

Sea D un conjunto finito parcialmente ordenado, R, una cadena finita y G, un subgrupo del grupo de automorfismos de D. La función $f \in R^D$ se denomina *isótona*, si de $d_1 \leqslant d_2$ se deduce que $f(d_1) \leqslant f(d_2)$ para cualesquiera $d_1, d_2 \in D$. El conjunto de todas las funciones isótonas de D en R se designa por $M(D, R)$.

2.125. Demuéstrese que de $f_1 \in M(D, R)$ y $f_1 \sim f_2$ se deduce $f_2 \in M(D, R)$.

2.126. Demuéstrese que el número de clases de equivalencia de las funciones isótonas de D en R es igual a $|G|^{-1} \sum_{g \in G} |M(D/\{g\}, R)|$, donde por medio de $\{g\}$ se designa un grupo cíclico engendrado por el elemento g.

2.127. Demuéstrese, haciendo uso de la afirmación del problema 2.126, que para los conjuntos finitos D y R con el grupo de permutaciones G sobre el conjunto D el número de clases de equivalencia de las funciones de D en R es igual a $P_G(|R|, |R|, \ldots)$.

Capítulo III

MÉTODOS LÓGICOS

§ 1. Método de inclusión y exclusión

Examinemos un n-conjunto de elementos y un m-conjunto de propiedades $p_1, \ldots, p_m$, de las que pueden disponer o no los elementos citados.

Designemos por $N_{i_1, \ldots, i_h}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant m)$ el número de elementos que poseen las propiedades $p_{i_1}, \ldots, p_{i_h}$, y por $N(r)$ $(0 \leqslant r \leqslant m)$ el número de elementos que poseen exactamente r propiedades.

Siendo fijo k, $1 \leqslant k \leqslant m$, la suma $\sum_{i_1, \ldots, i_h} N_{i_1, \ldots, i_h}$, extendida a toda clase de juegos de números naturales $i_1, \ldots, i_h$ tales que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant m$, representa el número de elementos (tomando en consideración su multiplicidad) que poseen no menos de k propiedades. Si un elemento posee s propiedades, se contará en la suma mencionada C_s^h veces.

Tiene lugar la siguiente fórmula de inclusión y exclusión:

$$N(r) = \sum_{h=r}^{m} (-1)^{h-r} C_h^r \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant m} N_{i_1, \ldots, i_h}$$

En efecto, un elemento que posee exactamente s, $s \neq r$, propiedades no se tendrá en cuenta en la suma que figura en el segundo miembro de esta igualdad, mientras que el elemento que posee exactamente r propiedades se tendrá en cuenta una sola vez, puesto que

$$\sum_{h=r}^{m} (-1)^{h-r} C_h^r C_s^h = C_s^r \sum_{h=r}^{s} (-1)^{h-r} C_{s-r}^{h-r} = \begin{cases} 1, & r = s, \\ 0, & r \neq s. \end{cases}$$

De esta fórmula se deduce, en particular, que el número de elementos que no posee ninguna de las propiedades $p_1, \ldots, p_m$ es igual a

$$N(0) = \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant m} N_{i_1, \ldots, i_h}.$$

Si a cada elemento le ponemos en correspondencia un número llamado su peso y si designamos por $V(0)$ la suma de pesos de todos los elementos, por $V(r)$ $(1 \leqslant r \leqslant m)$ la suma de pesos de los elementos (tomando en consideración la multiplicidad de éstos) que poseen no menos de r propiedades y por $W(r)$ la suma de pesos de los elementos que poseen exactamente r propiedades, entonces, razonando igual que anteriormente, podemos demostrar la igualdad

$$W(r) = \sum_{h=r}^{m} (-1)^{h-r} C_h^r V(k), \quad 0 \leqslant r \leqslant m,$$

de la cual se deduce la fórmula de inclusión y exclusión, si el peso de cada elemento es igual a la unidad.

3.1. Demuéstrese la igualdad

$$\left| \sum_{i=1}^{m} S_i \right| = \sum_{i_1=1}^{m} |S_{i_1}| - \sum |S_{i_1} S_{i_2}| + \ldots + (-1)^m |S_1 \ldots S_m|,$$

donde $S_1, \ldots, S_m$ son conjuntos finitos; $S_i + S_j$ y $S_i S_j$ significan la unión y la intersección de los conjuntos S_i y S_j, respectivamente; $|S|$ es el número de elementos del conjunto S, y la suma $\sum |S_{i_1} \ldots S_{i_k}|$ $(k = 1, \ldots, m)$ se extiende a toda clase de juegos de números enteros $i_1, \ldots, i_k$ de tal índole que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m$.

3.2. Hállese el número de permutaciones de elementos de un m-conjunto que dejan en su lugar exactamente r $(0 \leqslant r \leqslant m)$ elementos.

3.3. Examinemos $m!$ permutaciones de elementos de un m-conjunto. Se pueden formar $(m!)^d$ diferentes juegos ordenados a partir de d permutaciones. Hállese el número de tales juegos, en cada una de d permutaciones de los cuales quedan en su lugar exactamente r $(0 \leqslant r \leqslant m)$ elementos.

3.4. Hállese el número de métodos de colocación de n bolas en m cajones de un modo tal que r $(0 \leqslant r \leqslant m)$ cajones queden vacíos.

3.5. De una urna que contiene m diferentes bolas se sacan simultáneamente s $(1 \leqslant s \leqslant m)$ bolas y se escriben sus números, después de lo cual las bolas se colocan de nuevo en la urna. Se pueden formar $(C_m^s)^d$ diferentes juegos que se obtienen como resultado de d extracciones. Hállese el número de juegos en los cuales

a) se encuentran todas las bolas;

b) no se encuentran exactamente r $(0 \leqslant r \leqslant m)$ bolas.

Demuéstrense las identidades:

3.6. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_m^k C_{m-k}^{n-k} = 0, \quad 1 \leqslant n < m.$

3.7. $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k C_{m+n-k-1}^{n-k} = 0, \quad 1 \leqslant m \leqslant n.$

3.8. $\sum_{h=0}^{m-s} (-1)^h C_m^h (C_{m-h}^s)^d = 0, \quad 1 \leqslant sd < m.$

3.9. $\sum \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} = \sum_{h=0}^{m} (-1)^h C_m^h (m-k)^n,$

donde la sumación en el primer miembro de la identidad se extiende a toda clase de juegos ordenados de los números enteros positivos $n_1, \ldots, n_m$ tales que $n = n_1 + \ldots + n_m$.

3.10. $\sum_{h=0}^{m} (-1)^h C_m^h (m-k)^n = 0, \quad 1 \leqslant n < m.$

3.11. $\sum_{h=0}^{m} (-1)^h C_m^h (m-k)^m = m!$

3.12. Designemos por $\varphi(n)$ (función de Euler) la cantidad de números naturales que son inferiores a n y recíprocamente primos respecto de éste. Demuéstrese que si el desarrollo del número n en factores simples $q_1, \ldots, q_m$ tiene por expresión $n = q_1^{k_1} \ldots q_m^{k_m}$ $(k_i \geqslant 1, \ i = 1, \ldots, m)$, entonces

$$\varphi(n) = n\,(1 - 1/q_1) \ldots (1 - 1/q_m).$$

3.13. Sea n un número natural arbitrariamente elegido. Designemos por $q_1, \ldots, q_m$ todos los números primos que no sobrepasan de $\sqrt{n}$, y por $\pi(x)$, la cantidad de números primos que no sobrepasan de $x > 0$. Demuéstrese que

$$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) = n + 1 + \sum_{h=1}^{m} (-1)^h \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant m} \left[\frac{n}{q_{i_1} \ldots q_{i_h}}\right],$$

donde $[x]$ denota la parte entera del número x.

3.14. Calcúlese $S = \sum' (1/2^k)$, donde la sumación se realiza respecto de todos los k naturales no múltiplos de 2, 3 y 5.

3.15. Sea dada una matriz cuadrada $A = (a_{i,j})$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ de orden m. Designemos por

$$\operatorname{per} A = \sum_{i_1, \ldots, i_m} a_{1, i_1} \ldots a_{m, i_m}$$

(donde la sumación se realiza respecto de toda clase de permutaciones de los números $1, \ldots, m$) el permanente de la matriz A. Demuéstrese que

$$\operatorname{per} A = S(A) + \sum_{h=1}^{m} (-1)^h \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_h)} S(A_{i_1, \ldots, i_h})$$

donde $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m$; $A_{i_1,\ldots,i_k}$ denota una matriz obtenida de A por sustitución de las columnas con los números $i_1, \ldots, i_k$ por las columnas compuestas de ceros; $S(A_{i_1,\ldots,i_k})$ es el producto de las sumas de las filas de la matriz $A_{i_1,\ldots,i_k}$, y la suma $\sum S(A_{i_1,\ldots,i_k})$ $(1 \leqslant k < m)$ está extendida a toda clase de muestras sin repetición de los números $i_1, \ldots, i_k$ de $1, \ldots, m$.

§ 2. Sistemas de representantes de los conjuntos

Sean dados un n-conjunto $S = (s_1, \ldots, s_n)$ y un m-conjunto $M(S) = \{S_1, \ldots, S_m\}$, cuyos elementos $S_i \subset S$ $(i = 1, \ldots, m)$. La matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$, en la cual

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & s_j \in S_i, \\ 0, & s_j \notin S_i, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n,$$

lleva el nombre de *matriz de incidencia* para $M(S)$ con relación a S. Se denomina *sistema de representantes distintos* (en la forma abreviada: *s.r.d.*) para $M(S)$ al m-conjunto de elementos $x_1, \ldots, x_m$ pertenecientes a tales S que $x_i \in S_i$, $x_i \neq x$ $(i \neq j; i, j = 1, \ldots, m)$.

3.16. Sea A una matriz de incidencia para $M(S)$ con relación a S. Demuéstrese que el número de s.r.d. para $M(S)$ es igual a per A.

3.17. Hállese el número de s.r.d. para un sistema de m conjuntos

$$S_i = (1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m), \quad i = 2, \ldots, m-1,$$
$$S_1 = (2, \ldots, m), \quad S_m = 1, \ldots, m-1).$$

El siguiente teorema que se aduce aquí sin demostración ofrece la condición necesaria y suficiente de existencia del s.r.d. para $M(S)$.

TEOREMA DE HALL. *Una totalidad de conjuntos $M(S)$ tiene un sistema de representantes distintos cuando, y sólo cuando, para cualquier k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ y cualquier k-muestra sin repetición $i_1, \ldots, i_k$ de $1, \ldots, m$ se verifica*

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{k} S_{i_\alpha} \right| \geqslant k,$$

es decir, el número de elementos de la unión de conjuntos $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ no es inferior a k.

3.18. Supongamos que la matriz de incidencia para $M(S)$ es de tal índole que la cantidad de unidades en cada fila y en cada columna es igual a un número fijo r $(1 \leqslant r \leqslant m)$. Demuéstrese que existe un s.r.d. para $M(S)$.

3.19. Sean A y B dos conjuntos finitos y sea $k \geqslant 1$ un número natural. Entre A y B se ha establecido tal correspondencia multi-

forme que a todo elemento del conjunto A le corresponden exactamente k elementos del conjunto B y a todo elemento de B le corresponden exactamente k elementos de A. Demuéstrese que entre A y B puede establecerse una correspondencia biunívoca sin que se agreguen nuevas conexiones.

3.20. Se tienen un cierto conjunto de cargos y un conjunto de pretendientes para ocupar dichos cargos. Demuéstrese que si para cada cargo pretenden exactamente k ($k \geqslant 1$ fijo) hombres y cada pretendiente puede trabajar en k cargos, entonces a cada candidato se le puede conceder un trabajo adecuado.

3.21. Veamos un rectángulo latino de dimensión $m \times n$ ($m < n$), es decir, una tabla rectangular de m filas y n columnas compuesta por los números $1, \ldots, n$ de un modo tal que en cada fila se encuentren todos los números de 1 a n, y en cada columna todos los números sean diferentes. Demuéstrese que siempre puede agregarse una fila más de la permutación de los números $1, \ldots, n$ de un modo tal que la tabla a obtener sea un rectángulo latino de dimensión $(m + 1) \times n$.

3.22. Demuéstrese que en una matriz numérica arbitraria el número mínimo de filas y columnas, en las que están contenidos todos los elementos no nulos, es igual al número máximo de elementos no nulos, de los cuales ningún par se contiene en una fila y en una columna.

3.23. Demuéstrese que si en una matriz cuadrada de orden m se contiene una submatriz nula de dimensión $s \times t$, y si $s + t > m$, entonces el determinante y el permanente de la matriz son iguales a cero.

3.24. Sean dadas dos particiones del conjunto S en m subconjuntos:

$$S = \sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{i=1}^{m} B_i$$

y supongamos que para cualquier número natural k ($1 \leqslant k \leqslant m$) y cualquier k-muestra de $1, \ldots, m$ se cumple la condición: el conjunto $A_{i_1} + \ldots + A_{i_k}$ contiene a lo sumo k conjuntos de los $B_1, \ldots, B_m$. En este caso existen los elementos $s_1, \ldots, s_m$ que representan un s.r.d. simultáneamente para $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ y para $B_1, \ldots, B_m$, con la particularidad de que $i_1, \ldots, i_m$ es cierta permutación de los números $1, \ldots, m$ (la totalidad $s_1, \ldots, s_m$ se llama sistema de representantes comunes (o bien, en forma abreviada, s.r.c.) para $A_1, \ldots, A_m$ y $B_1, \ldots, B_m$).

3.25. Sean dadas dos diferentes particiones del conjunto finito S en m subconjuntos:

$$S = \sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{i=1}^{m} B_i$$

tales que $|A_i| = |B_j|$, $A_iA_j = B_iB_j = \varnothing$ $(i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, m)$. Entonces existe un s.r.c. para $A_1, \ldots, A_m$ y $B_1, \ldots, B_m$.

3.26. Supongamos que G es un grupo finito y H, el subgrupo de éste. Demuéstrese que existe un conjunto de elementos $s_1, \ldots, s_m$ que son representantes de las clases contiguas derechas e izquierdas, simultáneamente, del grupo G en el subgrupo H, es decir,

$$G = \sum_{i=1}^{m} s_i H = \sum_{i=1}^{m} H s_i, \quad m = |G|/|H|.$$

3.27. Supongamos que todo subconjunto S_i $(i = 1, \ldots, m)$ de un conjunto finito S contiene no menos de p, $p \geqslant 1$, elementos. El sistema $B_1, \ldots, B_m$ de p-subconjuntos del conjunto S se denominará sistema de p-representantes distintos, o bien, en forma abreviada, s.p-r.d., si $B_i \subset S_i$, $B_i \neq B_j$ $(i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, m)$. Demuéstrese la siguiente condición necesaria de existencia del s.p-r.d.: para cualquier número natural k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ y para cualquier k-muestra de $1, \ldots, m$ se verifica la desigualdad $|S_{i_1} + \ldots + S_{i_k}| \geqslant n$, donde n es un número natural mínimo tal que $C_n^p \geqslant k$.

§ 3. Teorema y números de Ramsey

Examinemos n puntos en un plano, de los cuales cualesquiera tres no están situados en una misma recta; al unir cada dos puntos por el segmento de una recta, obtendremos el n-grafo completo. Supongamos que cada arista del grafo está pintada en uno de los m colores. Si todas las aristas del n-grafo están pintados de un mismo color, dicho grafo se llamará *monocromático*.

3.28. Demuéstrese que, cualquiera que sea la coloración de las aristas de un 6-grafo completo en dos colores, existe un 3-subgrafo monocromático.

3.29. Hállese tal coloración de las aristas de un 5-grafo completo con la cual ningún 3-subgrafo sea monocromático.

3.30. Demuéstrese que en una compañía de 6 hombres siempre se encontrarán tres hombres que se conocen o tres que no se conocen.

3.31. Sean $k \geqslant 2$ y $m \geqslant 2$ unos números naturales arbitrarios. Demuéstrese que existe un número natural $R = R(k, m; 2)$ que depende sólo de k y m y que es de tal índole que si el número de vértices de un n-grafo completo no es inferior a R, entonces cualquiera que sea la coloración de sus aristas en dos colores (rojo y azul), existe o bien un k-subgrafo rojo monocromático, o bien un m-subgrafo azul monocromático; y si $n < R$, existe tal coloración de las aristas que todo k-subgrafo no es rojo monocromático y todo m-subconjunto no es azul monocromático.

3.32. Demuéstrese que

$$R(k, m; 2) \leqslant R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2), \quad k > 2, \ m > 2$$

y si los números $R(k-1, m(2)$ y $R(k, m-1; 2)$ son pares, la citada desigualdad será rígida.

3.33. Demuéstrese la desigualdad

$$R(k, m; 2) \leqslant C_{m+k-2}^{k-1}, \quad k \geqslant 2, \ m \geqslant 2.$$

3.34. Sean $k_1, \ldots, k_m$ números naturales arbitrarios distintos de cero y de la unidad. Demuéstrese que existe un número natural mínimo $R = R(k_1, \ldots, k_m; 2)$ que depende sólo de $k_1, \ldots, k_m$ y que es de tal índole que si el número de vértices de un n-grafo completo no es inferior a R, entonces, cualquiera que sea la coloración de sus aristas en m colores, existe o bien el k_1-subgrafo monocromático de primer color etc., o bien el k_m-subgrafo monocromático de m-ésimo color.

3.35. Demuéstrese la desigualdad

$$R(k_1 + 1, \ldots, k_m + 1; 2) \leqslant (k_1 + \ldots + k_m)!/(k_1! \ldots k_m!).$$

3.36. Hállese tal coloración en dos colores de las aristas de un 13-grafo completo para la cual ningún 3-subgrafo es rojo monocromático y ningún 5-subgrafo es azul monocromático.

3.37. Demuéstrese que

$$R(3, 4; 2) = 9, \quad R(3, 5; 2) = 14.$$

3.38. Hállese tal coloración en dos colores de las aristas de un 17-grafo completo para la cual ningún 4-subgrafo es monocromático.

3.39. Demuéstrese que $R(4, 4; 2) = 18$.

3.40. Demuéstrese que si para cierto número natural n existe el número p $(0 < p < 1)$ para el cual se verifica la desigualdad

$$C_n^k p C_k^2 + C_n^l (1-p) C_l^2 < 1,$$

entonces $R(k, l; 2) > n$.

3.41. Demuéstrese la desigualdad

$$R(k, k; 2) > ck2^{k/2},$$

donde $c > 0$ es una constante.

3.42. Demuéstrese que para cualquier número natural n existe un número $N = N(n)$ tal que entre cualesquiera N puntos en un plano, de los cuales ninguna combinación de tres yace en una recta, se pueden elegir n puntos que sean vértices de un polígono convexo de n lados.

CAPITULO IV

TABLAS Y ESQUEMAS COMBINATORIOS

§ 1. Matrices especiales

Sean dados un conjunto S de n elementos $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ y m subconjuntos de éste $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Se llama *matriz de incidencia* para un sistema dado de subconjuntos respecto de S a una matriz (a_{ij}) $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & s_j \in S_i, \\ 0, & s_j \notin S_i. \end{cases}$$

Llamaremos *matriz binaria* a la matriz que está compuesta por los elementos 0 y 1.

Se denomina *matriz de congruencia de* dos en dos para un conjunto de números $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ a una matriz (a_{ij}) $(i, j = 1, \ldots, n)$, donde $a_{ij} = 1$, si $b_i > b_j$, y $a_{ij} = 0$ en el caso contrario.

Se llama *matriz conmutable* (*de permutación*) $(k_1, \ldots, k_n)$ a una matriz de orden n, en la cual $a_{k_j j} = 1$ para $j = 1, \ldots, n$; $a_{ij} = 0$ para $i \neq k_j$.

Sea una matriz $A = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Se denomina *permanente* de esta matriz al número per $A = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{mi_m}$. Aquí la sumación se realiza respecto de todas las m permutaciones $(i_1, \ldots, i_m)$ de números enteros 1, 2, $\ldots$, n $(m \leqslant n)$. El permanente A no cambia al realizar la permutación de las filas o de las columnas de la matriz.

Se denomina *matriz de Hadamard* a una matriz cuadrada, compuesta por los elementos 1 y -1, en la cual cada fila es ortogonal a todas las demás filas y cada columna, ortogonal a todas las columnas restantes. La matriz de Hadamard en la cual la primera fila y la primera columna constan sólo de 1 se llama *normalizada*. Por ejemplo, la matriz $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es de tal tipo.

Se denomina *producto directo de las matrices* A y B, la matriz de orden mn que tiene la forma siguiente $\begin{pmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1n}B \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}B & \ldots & a_{nn}B \end{pmatrix}$, donde

$A = (a_{ij})$, $i, j = 1 \ldots n$
$B = (b_{lk})$, $l, k = 1 \ldots m$.

Se llama *traza de una matriz* la suma de elementos que forman su diagonal principal; el valor máximo de la traza, obtenido como resultado de toda clase de permutaciones de las filas y columnas de una matriz se llama *rango de frontera*. Llámase α-*anchura* de una matriz el número de sus columnas que pueden ser elegidas de ella de tal manera, que la suma de los valores de éstas sea en cada fila no menor de α.

4.1. Fórmese la matriz de permutación (3 2 4 1).

4.2. Demuéstrese que el permanente de una matriz de permutación de n elementos es igual a 1.

4.3. ¿A qué es igual el determinante de una matriz de permutación?

4.4. Fórmese una matriz de incidencia del sistema de ternas {1, 2, 3}, {1, 4, 5}, {1, 6, 7}, {2, 4, 6}, {2, 5, 7}, {3, 4, 7}, {3, 5, 6} con relación al conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Calcúlese el permanente de esta matriz.

4.5. Fórmese una matriz de incidencia para el sistema de subconjuntos {1, 3, 4}, {2, 3, 5}, {2, 4}, {4, 5} del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Calcúlese el permanente de esta matriz.

4.6. ¿Cuántas matrices cuadradas simétricas binarias de orden n existen?

4.7. Determínese la cantidad de menores de k-ésimo orden en la $n \times n$-matriz $A = (a_{ij})$ que carece de elementos diagonales de la matriz.

4.8. Determínese el número de diferentes matrices cuadradas binarias de orden n, en cada fila y en cada columna de las cuales figura una sola unidad.

4.9. ¿Cuántas $m \times n$-matrices binarias existen, en cada una de las cuales la suma de todos los elementos es igual a r?

4.10. ¿Cuántas son las matrices cuadradas de orden n con elementos $+1$ y -1, en cada una de las cuales la suma de todos los elementos es igual a r?

4.11. ¿Cuántas matrices binarias de n-ésimo orden existen, en cada columna de las cuales figuran exactamente r unidades?

4.12. Una matriz se llama *equidiagonal*, si todos los elementos de su diagonal son iguales. ¿Cuántas son las matrices equidiagonales de orden n con los elementos $+1$ y -1?

4.13. Hállese el número de matrices equidiagonales simétricas binarias de orden n, en cada una de las cuales hay exactamente k unidades?

4.14. Hállese el número de matrices cuadradas binarias de orden n, en cada una de las cuales la diagonal está ocupada por ceros, debajo de la diagonal figuran k unidades y por encima de ella, l unidades. Calcúlese este número para $n = 4$, $k = 5$, $l = 2$.

4.15. Determínese el número de 5×7-matrices binarias, en cada una de las cuales las dos columnas primeras contienen juntas exactamente 7 unidades y cada una de las siguientes, exactamente dos unidades.

4.16. Sea M un n-conjunto y X su r-subconjunto. Determínese el número de tales m-subconjuntos del conjunto M que tienen en la intersección con X exactamente l elementos.

4.17. Demuéstrese que si una matriz de 3er orden consta de los elementos $+1$ y -1, su determinante es un número par.

4.18. Determínese el número de diferentes matrices cuadradas binarias de orden n que contienen en cada una de las primeras m filas r unidades, y en cada una de las filas restantes, q unidades.

4.19. Resuélvase el problema antecedente bajo la condición complementaria de que todos los elementos de la diagonal principal sean ceros.

4.20. Determínese el número de diferentes matrices binarias de dimensión $m \times n$, en las cuales cada una de las primeras r columnas tiene s unidades, mientras que el número total de unidades en las demás columnas es igual a k.

4.21. Fórmese una matriz de congruencia de dos en dos para el conjunto de números (3, 2, 1, 4, 5).

4.22. Demuéstrese que el permanente de una matriz de congruencia de dos en dos es igual a cero.

4.23. Calcúlese el permanente de una matriz cuadrada de orden $n = 4$, en la cual en cada columna y en cada fila hay solamente un cero, y los demás elementos son unidades.

4.24. Calcúlense los permanentes de las siguientes matrices:

a) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

d) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.25. Demuéstrese que para una matriz cuadrada A con elementos no negativos siempre per $A \geqslant |\det A|$.

4.26. Sea $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ una matriz cuadrada con elementos no negativos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = b_j.$$

Demuéstrese que A^2 es una matriz nula cuando y sólo cuando, $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = 0$.

4.27. Hállese el valor máximo que puede tomar el determinante de una matriz de tercer orden, a condición de que todos sus elementos son $+1$ y -1.

4.28. Para una matriz de la forma

$$B_n = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

demuéstrese la validez de la relación recurrente

$$\text{per } B_n = \text{per } B_{n-1} + \text{per } B_{n-2}.$$

4.29. Demuéstrese que para las $n \times n$-matrices, cuyos elementos de la diagonal principal son ceros y los demás elementos son unidades, el permanente es igual a

$$p_n = n!\,(1 - 1/1! + 1/2! - \dots + (-1)^n/n!).$$

4.30. ¿Serán matrices de Hadamard las siguientes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

4.31. La primera fila de cierta matriz de Hadamard consta de n unidades. ¿Cuál es la cantidad total de unidades en esta matriz?

4.32. Verifíquese que los productos directos $H_2 \times H_2$ y $H_2 \times H_2 \times H_2$ de una matriz de Hadamard normalizada de orden 2 son matrices de Hadamard normalizadas de orden 4 y 8, respectivamente.

4.33. Hállese la traza, el rango de frontera y la α-anchura, donde $\alpha = 1, 2, 3$ y 4, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$;

d) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ e;) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$; f) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

4.34. Indíquese el grupo de tales permutaciones de columnas y de filas que no cambian la matriz f) del problema 4.33.

4.35. ¿Cuáles de los valores siguientes no varían al realizar cualesquiera permutaciones de columnas y filas de cualesquiera matrices cuadradas A:

a) la suma de todos los elementos de la matriz; b) la traza de la matriz; c) el per A; d) el det A; e) el per (A^2); f) el det (A^2); g) los valores propios de la matriz; h) el rango de la matriz A; i) el rango de la matriz A^2?

4.36. Escríbase el número máximo posible de matrices binarias de orden 2 que no se transforman una en otra por permutaciones de las columnas y de las filas.

§ 2. Rectángulos y cuadrados latinos

Se denomina *rectángulo latino* a una tabla rectangular de dimensión $m \times n$, en la cual en cada fila y en cada columna los elementos no se repiten. Se denomina *cuadrado latino* de orden n a una tabla cuadrada de dimensión $n \times n$ llena de n diferentes elementos de un modo tal que cada elemento figura una sola vez en cada fila y en cada columna.

Dos cuadrados (o rectángulos) latinos se llaman *equivalentes (isomorfos)*, si uno se obtiene del otro por permutación de las columnas y de las filas y por designación de nuevo de los elementos. El isomorfismo se escribe en la forma $A \times B \times C$, donde A es una sustitución que define la permutación de las columnas; B, la permutación de las filas y C, la designación de nuevo de los elementos. Se denomina *automorfismo* de un cuadrado latino al isomorfismo que transforma el cuadrado en sí mismo. El conjunto de automorfismos del cuadrado dado forma un grupo. Un cuadrado latino se llama *cíclico*, si todas sus filas se obtienen a partir de su primera fila por desplazamientos cíclicos.

Dos cuadrados latinos (a_{ij}) y (b_{ij}) $(i, j = 1, \ldots, n)$ de orden n se denominan *ortogonales*, si todos los pares (a_{ij}, b_{ij}) son diferentes. Los pares de cuadrados latinos ortogonales existen para cualquier n, salvo para $n = 2$ y $n = 6$. El número de cuadrados latinos ortogonales dos a dos de orden n no es superior a $n - 1$. Si $n = p^\alpha$, donde p es un número primo y α, un número natural, entonces para $n \geqslant 3$ existe un conjunto completo de $n - 1$ cuadrados latinos ortogonales.

4.37. ¿De cuántos modos puede formarse una tabla de dimensión 2×9, cuya primera fila sea 1 2 3 4 5 6 7 8 9, y la segunda represente una permutación de estos números de una manera tal que no haya repeticiones de los números en ninguna columna de esta tabla?

4.38. Se tienen las siguientes figuras geométricas: un triángulo, un cuadrado, un trapecio y una circunferencia (cada figura en dos ejemplares). En la primera fila se disponen cuatro figuras diferentes.

Hállense todas las disposiciones posibles de las figuras restantes en la segunda fila de un modo tal que debajo de cada figura de la primera fila no haya una figura homónima de la segunda fila.

4.39. Hállense todos los rectángulos latinos 3×5 de los elementos 1, 2, 3, 4, 5 que contengan las dos primeras filas

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1. \end{array}$$

4.40. Se dan las tablas siguientes:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ (A) & 2 & 1 & 4 & 3 \\ & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ (B) & 2 & 3 & 4 & 1 \\ & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}$$

a) ¿De cuántos modos puede elegirse la permutación a_1, a_2, a_3, a_4 de los números 1, 2, 3, 4 de una manera tal que en ninguna columna de la tabla (A) haya repetición de los números?

b) La misma pregunta para la tabla (B).

4.41. Las cifras 1, 2, . . ., 9 se disponen en forma de un rectángulo latino con 8 filas y 9 columnas. ¿Será cierto que

(A) puede agregarse una fila más para obtener un cuadrado latino: a) siempre por lo menos de dos modos, b) siempre exactamente de un solo modo;

(B) no se puede agregar una fila;

(C) el número de métodos que existen para agregar una fila depende de la forma del rectángulo dado?

4.42. ¿Cuántos rectángulos latinos de dimensión 3×5 de cinco elementos con la primera fila 1 2 3 4 5 existen?

4.43. Cómo puede dividirse un campo cuadrado en parcelas de tal manera que pueda sembrarse en él m variedades de trigo con el fin de comparar la fertilidad de dichas variedades, con la particularidad de que la comparación excluya la influencia de la variación de la fertilidad dentro de los límites de la parcela. Convengamos en considerar que la fertilidad decrece a medida que nos alejamos de un lado del campo (no se sabe de qué lado precisamente) hacia el lado opuesto.

4.44. Se tienen monedas de 1, 2, 3, 5 y 10 kopeks de valor. Dispónganse 16 monedas en forma de un cuadrado de dimensión 4×4 de un modo tal que en ninguna fila, ninguna hilera y ninguna diagonal del cuadrado hayan dos monedas de igual valor y que el coste total de todas las 16 monedas sea máximo. ¿Cuál es este coste?

4.45. En un torneo ajedrecístico participan cinco hombres. Cada ajedrecista juega una partida al día. Hágase la tabla de torneo de un modo tal que durante cinco días cada ajedrecista tenga un encuentro con todos los demás jugadores. Al completar la tabla obtenida con un elemento fijo, obténgase un cuadrado latino.

4.46. Constrúyanse dos cuadrados latinos cíclicos de orden 5. Demuéstrese que todos los cuadrados de esta índole son isomorfos de dos en dos.

4.47. Constrúyase un cuadrado latino no cíclico de orden 4, haciendo uso de cuadrados latinos de orden 2.

4.48. Muéstrese que los siguientes cuadrados latinos de orden 3 son isomorfos:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

4.49. Demuéstrese que los siguientes cuadrados latinos son isomorfos:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

4.50. Hállese el cuadrado latino B, isomorfo al cuadrado dado A, si está dado un isomorfismo p que convierte A en B:

$$p\colon (2\ 3) \times (1\ 3\ 4) \times (1\ 3), \qquad A\colon \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

4.51. Muéstrese que los siguientes cuadrados latinos de orden 4 no son isomorfos:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

4.52. Indíquense los automorfismos del primer cuadrado latino del problema 4.48.

4.53. Determínese el orden del grupo de automorfismos del cuadrado latino simétrico [1]) de orden 4:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

[1]) Un cuadrado latino cuyos elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales, se llama *cuadrado simétrico*.

4.54. Se da un sistema de grupos de pares

01 02 03 04 05
25 13 15 12 14
34 45 24 35 23

Aprovechando este sistema, constrúyase un cuadrado latino simétrico de orden 6.

4.55. Demuéstrese que un cuadrado latino simétrico cíclico de orden p es equivalente a la tabla de multiplicación del grupo cíclico del mismo orden.

4.56. Demuéstrese que un cuadrado latino de orden p es equivalente a la tabla de multiplicación de un casi grupo [1]) del mismo orden.

4.57. Demuéstrese que la tabla de multiplicar de un casi grupo es un cuadrado latino.

4.58. Calcúlense los permanentes de los cuadrados latinos cíclicos de orden 3, 4 y 5, compuestos por los elementos 0, 1, 2; 0, 1, 2, 3 y 0, 1, 2, 3, 4 respectivamente.

4.59. Calcúlense los permanentes de los cuadrados latinos del problema 4.51.

4.60. a) Dispónganse 16 cartas superiores de cuatro palos de un modo tal que ni los nombres de las cartas ni los palos se repitan ni en las filas, ni en las columnas, ni en las diagonales principales.

b) ¿Se podrá hacer de tal manera que en este caso los colores de los palos se dispongan escaqueados?

c) ¿Se podrá hallar, sin tener en cuenta la disposición de las cartas en las diagonales principales, una solución, en la cual los colores se alternen en forma escaqueada?

4.61. Tomemos un grupo abeliano de orden 9 que es un producto directo de dos grupos cíclicos de orden 3. A base de la tabla de multiplicación de dicho grupo abeliano construyamos otra tabla de multiplicar, sustituyendo la relación $a \cdot b = c$ por la $a \cdot c = b$. ¿Será la tabla de multiplicar obtenida un cuadrado latino? ¿Será este cuadrado ortogonal al de partida?

4.62. Constrúyase un conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de orden 3.

4.63. El problema 4.62 para cuadrados latinos de orden 5.

4.64. Hállese un conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de orden 4.

4.65. Hállense 6 cuadrados latinos cíclicos, ortogonales de dos en dos, de orden 9.

4.66. Constrúyanse dos cuadrados latinos no cíclicos de orden 6, haciendo uso de los cuadrados latinos de orden 2 y 3. ¿Serán ortogonales los cuadrados obtenidos?

---

[1]) Un conjunto M con una operación binaria $(\circ)$ se llama casi grupo, si las ecuaciones $a \circ x = b$ e $y \circ a = b$ tienen soluciones únicas para cualesquiera a, b.

4.67. Muéstrese que $p - 1$ cuadrados latinos, que representan el conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de orden p (p es un número impar), son isomorfos entre sí.

4.68. Demuéstrese que si p es un número primo impar, las matrices de orden p:

$$A_k = (a_{ij}^{(k)}),$$
$$i, j = 0, 1, \ldots, p - 1; \quad k = 1, 2, \ldots, p - 1,$$

donde $a_{ij}^{(k)} = ik + j$ (mód p), forman un sistema completo de cuadrados latinos ortogonales.

4.69. Sea G un grupo abeliano de orden 8 que representa un producto directo de tres grupos cíclicos de orden 2. Sea H un grupo de automorfismos del grupo G tales que dejan inmóvil sólo la unidad del grupo G (por supuesto, a excepción del automorfismo idéntico). Empleando el grupo H, constrúyase una familia de siete cuadrados latinos ortogonales de orden 8 que difieren uno de otro solamente en el orden de las filas.

4.70. Sea G un grupo abeliano de orden p^α que representa un producto directo de α grupos cíclicos de orden p, donde p es un número primo. Demuéstrese que existe un conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de orden p^α que difieren uno del otro sólo en el orden de las filas (columnas).

4.71. Sea $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$. Demuéstrese que existe una familia de $\min \{(p_i^{\alpha_i} - 1) \mid i = 1, \ldots, n\}$ de cuadrados latinos de orden n ortogonales dos a dos.

El esquema se llama *resoluble* si los bloques pueden ser divididos en r conjuntos de tal manera, que en los bloques de cada uno de estos conjuntos cada elemento se encontrará exactamente una vez. Sea A una matriz de incidencia del bloque-esquema D. Entonces el bloque-esquema con la matriz de incidencia A^T se llamará dual al bloque-esquema D.

4.72. Constrúyase una familia de cuadrados latinos ortogonales de orden 9, empleando el campo de Galois.

§ 3. Sistemas de ternas de Steiner y juegos semejantes

Se denomina *sistema de ternas de Steiner* de n elementos tal juego de subconjuntos de dichos n elementos que

a) cada subconjunto consta de tres elementos distintos;

b) cualquier par de elementos se contiene en un y sólo en un subconjunto.

Las ternas de Steiner existen cuando, y sólo cuando, $n = 6t + 1 \geqslant 7$, o bien $n = 6t + 3 \geqslant 3$.

Dos sistemas de ternas de Steiner se denominan *isomorfos*, si uno de ellos puede obtenerse del otro mediante una nueva designación de los elementos y una permutación de las ternas y de los elementos en las últimas.

Se llama *automorfismo* de cierto sistema tal transformación que transfiere el sistema en sí mismo. Un conjunto de automorfismos de un sistema dado forma un grupo.

Se denomina *sistema de ternas de Kirkman* a un sistema de ternas de Steiner partido en tales grupos de ternas que cada uno de n elementos figura en una y sólo una terna de cada grupo.

Describamos el método de distinguir los sistemas de ternas de Steiner no isomorfos. Sea Δ_n un sistema de ternas de Steiner construido en un conjunto E, y supongamos que $x,\ y \in E,\ x \neq y$. Introduzcamos la designación

$$\Pi_y^x = \{(\alpha,\ \beta):(x,\ \alpha,\ \beta) \in \Delta_n,\ \alpha \neq y,\ \beta \neq y\}.$$

Un grafo Γ_{xy}, cuyo conjunto de vértices está representado por el conjunto E y el conjunto de aristas, por el conjunto $\Pi_x^y \cup \Pi_y^x$, lleva el nombre de *grafo de entrelazamiento* de los elementos x e y en Δ_n. Este grafo representa un juego de ciclos disjuntos de longitud par. A él se la puede poner en correspondencia la especificación $\pi_{xy} = (s_1^{r_1}, \ldots, s_m^{r_m})$, donde r_i es el número de ciclos de longitud $2s_i$ en el grafo Γ_{xy}. La especificación π_{xy} se denomina *tipo de entrelazamiento* de x e y en el sistema Δ_n. Es obvio que los tipos de entrelazamiento son especificaciones de las particiones del número $(n-3)/2$ en partes, cada una de las cuales no es inferior a dos. Denotemos con $q = q(n)$ el número de tales particiones.

Cuando $n = 13$, hay dos tipos posibles de entrelazamiento: $T_1 = (2,\ 3)$, $T_2 = (5)$. Cuando $n = 15$, hay cuatro tipos: $T_1 = (2^3)$, $T_2 = (2,\ 4)$, $T_3 = (3^2)$, $T_4 = (6)$. Convengamos en numerar los tipos de entrelazamiento en el orden lexicográfico.

Se denomina *vector índice* del elemento x en el sistema Δ_n a un vector q-dimensional $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_q)$, donde t_j significa el número de elementos en E que tienen el tipo de entrelazamiento T_j con el elemento x.

Al sistema Δ_n se le puede poner en correspondencia la tabla

$$T(\Delta_n) = \left|\begin{array}{cccc|c} t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & \ldots & t_q^{(1)} & l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1^{(h)} & t_2^{(h)} & \ldots & t_b^{(h)} & l_h \end{array}\right|,$$

donde l_n denota el número de elementos en E que tienen en Δ_n el vector índice $(t_1^{(h)}, \ldots, t_q^{(h)})$. Los vectores índice en $T(\Delta_n)$ se disponen en el orden lexicográfico. La tabla $T(\Delta_n)$ se llama *T-tabla*.

Dos sistemas de ternas de Steiner a los cuales corresponden las T-tablas diferentes no son isomorfos.

Se llama *sistema de grupos de pares* $\Pi_{2\mu}$ de orden 2μ tal partición del conjunto $P(F)$ de pares no ordenados de elementos del conjun-

to F, $|F| = 2\mu$, en grupos de pares que cada elemento de F interviene exactamente en un par de cada grupo.

Dos sistemas de grupos de pares $\Pi_{2\mu}$ y $\Pi'_{2\mu}$ de orden 2μ, basados en los conjuntos F y F', se llamarán isomorfos, siempre que exista una correspondencia biunívoca φ: $F \leftrightarrow F'$, en la cual a todo grupo de pares de $\Pi_{2\mu}$ le corresponde un grupo de pares de $\Pi'_{2\mu}$.

Sea $\Pi_{2\mu}$ un sistema de grupos de pares $\tau_1, \ldots, \tau_{2\mu-1}$ de orden 2μ. El grafo G_{ij}, de cuyos vértices sirven los elementos del conjunto F y de aristas, los elementos del conjunto $\tau_i \cup \tau_j$ ($i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2\mu - 1$), representa, evidentemente, un modelo de ciclos disjuntos de longitud par. El símbolo $(s_1^{r_1}, \ldots, s_m^{r_m})$, donde $0 < s_1 < \ldots < s_m$, $r_i \geqslant 0$ para cualquier $i = 1, \ldots, m$, recibe el nombre de *tipo de entrelazamiento de los grupos de pares* τ_i y τ_j, si en el grafo G_{ij} están contenidos exactamente r_k ciclos de longitud $2s_k$ y $\sum_{k=1}^{m} r_k s_k = \mu$. Los tipos posibles de entrelazamiento son, por consiguiente, especificaciones de las particiones del número μ en partes, cada una de las cuales no es inferior al número 2.

Llamemos *vector índice de un grupo de pares* Σ en el sistema de h grupos de pares $\Pi_{2\mu}$ un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, en el cual x_j denota el número de grupos de pares de este sistema que tienen el tipo de entrelazamiento T_j con el grupo Σ.

La especificación de los grupos de pares del sistema de h grupos de pares $\Pi_{2\mu}$ según sus vectores índices en este sistema la escribiremos en forma de la siguiente tabla

$$T(\Pi_{2\mu}) = \left|\begin{array}{cccc|c} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_q^{(1)} & \omega_1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_q^{(2)} & \omega_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(l)} & x_2^{(l)} & \ldots & x_q^{(l)} & \omega_l \end{array}\right|$$

donde $\omega_j > 0$ es el número de grupos de pares en $\Pi_{2\mu}$ que tiene el vector índice $(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_q^{(j)})$, mientras que los propios vectores mencionados están dispuestos en el orden de su crecimiento lexicográfico.

La tabla $T(\Pi_{2\mu})$ se denominará T-tabla del sistema $\Pi_{2\mu}$.

Dos sistemas de grupos de pares, a los que corresponden diferentes T-tablas, no son isomorfos. Lo recíproco no es siempre cierto.

4.73. Está dado un conjunto E de n elementos $1, 2, \ldots, n$. Fórmense las ternas de tal modo:

a) que cada par de E se contenga a lo sumo en una terna y que el número de ternas sea lo más grande posible, $n = 5$;

b) que cada par de E se contenga por lo menos en una terna y que el número de ternas sea lo más mínimo posible, $n = 5$;

c) que cada par de E se contenga exactamente en una sola terna; $n = 7$.

4.74. ¿Existirá al menos un sistema de ternas de Steiner con n elementos, si a) $n = 95$; b) $n = 100$; c) $n = 105$?

4.75. Demuéstrese que el número de ternas en un sistema de ternas de Steiner de n elementos es igual a $n(n-1)/6$.

4.76. Demuéstrese que no existen sistemas de ternas de Steiner de $n = 6k + 2$ elementos.

4.77. Compruébese si son sistemas de ternas de Steiner los siguientes juegos de ternas:

A) 0 1 2, 1 3 7, 2 3 8, 3 4 5, 4 8 9, 5 7 *b*, 6 7 9
0 3 *b*, 1 4 *c*, 2 4 6, 3 6 *c*, 4 *a b*, 5 *a c*, 6 8 *b*
0 4 7, 1 5 6, 2 5 9, 3 9 *c*, 7 8 *c*
0 5 8, 1 8 *a*, 2 7 *a*
0 6 *c*, 1 9 *b*, 2 *b c*
0 9 *a*

B) 0 1 *a*, 1 2 *b*, 2 3 *c*, 3 5 *a*, 4 6 *b*, 5 7 *c*, 6 9 *a*
0 2 7, 1 3 8, 2 4 9, 3 6 7, 4 7 8, 5 8 9, 7 *a b*
0 3 4, 1 4 5, 2 5 6, 3 9 *b*, 4 *a c*, 8 *b c*
0 5 *b*, 1 6 *c*, 2 8 *a*
0 6 8, 1 7 9
0 9 *c*

C) 0 1 4, 1 2 9, 2 3 8, 3 4 6, 4 5 *a*, 5 7 8, 6 7 *a*
0 2 5, 1 3 *a*, 2 4 7, 3 5 *b*, 4 9 *b*, 5 9 *a*, 6 8 *b*
0 3 *c*, 1 4 8, 2 5 6, 3 7 9, 4 6 *c*
0 6 9, 1 6 *b*, 2 8 *b*
0 7 *b*, 1 7 *c*, 2 *a c*
0 8 *a*

4.78. ¿Qué ternas de las citadas en los pp. a) — d) deben agregarse al sistema de ternas 1 2 3, 1 4 5, 1 6 7, 2 5 6, 2 4 7 para obtener un sistema de ternas de Steiner:

a) 2 3 4, 5 6 7; b) 3 4 6, 3 5 7;
c) 3 4 5, 3 6 7; d) 4 5 6, 1 2 3?

4.79. Demuéstrese que para cada elemento de un conjunto inicial el número de ternas de Steiner, en las cuales él está presente, no depende de este elemento. Indíquese este número.

4.80. Sea Δ_n un sistema de ternas de Steiner y Δ_α su subsistema de Steiner. Demuéstrese que $\alpha \leqslant (n-1)/2$.

4.81. Demuéstrese que dos subsistemas de Steiner de un sistema de ternas de Steiner o bien no se intersecan, o bien su intersección es también un subsistema de Steiner.

4.82. Constrúyase un sistema de ternas de Steiner para $n = 7$.

4.83. Dibújese un grafo de entrelazamiento de los elementos 3 y 9 en el sistema A) del problema 4.77. Indíquese el tipo de entrelazamiento de estos elementos.

4.84. Calcúlese el vector índice del elemento 3 en el sistema A) del problema 4.77.

4.85. Escríbase toda clase de tipos de entrelazamiento de los elementos del sistema Δ_n en el caso de $n = 19$.

4.86. Muéstrese que los siguientes sistemas de ternas de Steiner son isomorfos:

a)
123
145 248 347
167 256 359 469
189 279 368 578

b)
123
145 247 348
168 256 359 469
179 289 367 578

4.87. Establézcase que los sistemas A) y B) del problema 4.77 no son isomorfos.

4.88. Establézcase si la permutación $\alpha = (0123456789abc)$ es o no es un automorfismo del sistema B) del problema 4.77.

4.89. Constrúyase un sistema de ternas de Steiner para $n = 9$ elementos con grupo cíclico de automorfismos.

4.90. Constrúyase un sistema de ternas de Kirkman a base de nueve elementos.

4.91. ¿Cuántos grupos de ternas están contenidos en un sistema de ternas de Kirkman de $n = 6k + 3$ elementos?

4.92. ¿Se podrá completar un juego de grupos de ternas:

1 2 3 1 4 7 1 5 15 1 9 13 1 6 10
4 5 6 2 5 8 2 9 10 2 4 12 2 11 15
7 8 9 3 10 13 3 4 14 3 5 11 3 7 12
10 11 12 6 11 14 6 8 12 6 7 15 4 8 13
13 14 15 9 12 14 7 11 13 8 10 14 5 9 14

hasta que se obtenga un sistema de ternas de Kirkman de orden 15? Indíquense los grupos que faltan.

4.93. ¿Será un sistema de ternas de Kirkman el siguiente juego de grupos de ternas de los elementos:

1 2 3 1 4 7 1 5 13 1 6 8
4 5 6 2 5 10 2 4 12 2 11 13
10 11 12 6 11 14 6 7 15 4 10 15
13 14 15 9 12 15 8 10 14 5 9 14
7 8 9 3 8 13 3 9 11 3 7 12
1 9 10 1 11 15 1 12 14
2 7 14 2 6 9 2 8 15
3 5 15 3 4 14 3 6 10
4 8 11 5 8 12 4 9 13
6 12 13 7 10 13 5 7 11?

4.94. Demuéstrese que no existe un sistema de ternas de Kirkman de $n = 6k + 1$ elementos.

4.95. Nueve inspectores deben revisar durante cuatro días 12 organizaciones. Cada organización se controla por una comisión de tres inspectores en el transcurso de un día. ¿Cómo realizar el control de las organizaciones de un modo tal que todas ellas sean controladas por las comisiones, pero que en éstas no se repitan ni los pares ni las ternas de inspectores?

4.96. Compruébese si son automorfismos del sistema del problema 4.93 las siguientes permutaciones:

$$\alpha = (1,\ 12)\ (2,\ 7)\ (5,\ 15)\ (8,\ 11)\ (6,\ 10)\ (9,\ 13)$$
$$\beta = (1,\ 2,\ 3)\ (4,\ 12,\ 7)\ (6,\ 10,\ 9)\ (5,\ 11,\ 8).$$

4.97. Demuéstrese que el grupo de automorfismos de un sistema de ternas de Kirkman es un subgrupo del grupo de automorfismos del correspondiente sistema de ternas de Steiner.

4.98. A partir de los elementos 0, 1, 2, 3, 4, 5 fórmense 5 juegos de a 3 pares en cada uno, de un modo tal que en cada juego sean distintos todos los elementos y en los diferentes juegos los pares no se repitan.

4.99. Se requiere distribuir 8 examinadores entre 4 comisiones, a dos examinadores en cada comisión, de un modo tal que cada día consecutivo en el transcurso de una semana (7 días) las composiciones de las comisiones no se repitan.

4.100. Sean los elementos 1, 2, . . ., 2μ los números de los jugadores. Los pares de jugadores que integran el primer grupo juegan en la primera jornada; los pares que integran el segundo grupo juegan en la segunda, etc. Se necesita hacer el horario de los juegos para 11 días por jornadas para $2\mu = 12$. Escríbase el sistema de grupos de pares de 12 elementos para obtener la tabla ajedrecística.

4.101. Sea dado un grupo de pares de elementos, por ejemplo,

$$\begin{array}{l} 0\ \ 1 \\ 2\ \ 2\mu - 1 \\ 3\ \ 2\mu - 2 \\ \ldots\ldots \\ k\ \ 2\mu - k + 1 \\ \ldots\ldots \\ \mu\ \ \mu + 1 \end{array}$$

¿Cuál de las permutaciones de 2μ elementos $(0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ 2\mu - 1)$ y $(0)\ (1\ 2\ 3\ \ldots\ 2\mu - 1)$ dará un sistema de grupos de pares de tipo cíclico [1]?

[1] Un sistema de grupos de pares, en el que cada grupo de pares se obtiene a partir del grupo anterior de pares con ayuda de una misma permutación de elementos 0, 1, . . ., $2\mu - 1$, lleva el nombre de sistema de grupos de pares del tipo cíclico.

4.102. Determínese, calculando las T-tablas, si se tienen sistemas isomorfos de grupos de pares de orden 8 entre los que siguen abajo

1) 0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7
2 3 1 5 1 4 1 7 1 3 1 2 1 6
4 7 3 4 2 6 2 5 2 7 3 7 2 4
5 6 6 7 5 7 3 6 4 6 4 5 3 5

2) 0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7
2 7 1 3 1 5 1 7 1 2 1 4 1 6
3 6 4 7 2 4 2 6 3 7 2 3 2 5
4 5 5 6 6 7 3 5 4 6 5 7 3 4

3) 0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7
2 3 1 3 1 2 1 6 1 4 1 7 1 5
4 5 4 6 5 6 2 7 2 6 2 5 2 4
6 7 5 7 4 7 3 5 3 7 3 4 3 6

4) 0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7
2 3 1 3 1 2 1 5 1 4 1 7 1 6
4 5 4 7 4 6 2 6 2 7 2 4 2 5
6 7 5 6 5 7 3 7 3 6 3 5 3 4

5) 0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7
2 3 1 6 1 5 1 7 1 3 1 2 1 4
4 7 3 7 2 7 2 6 2 4 3 4 2 5
5 6 4 5 4 6 3 5 6 7 5 7 3 6

6) 0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7
2 3 1 3 1 2 1 5 1 4 1 7 1 6
4 5 4 7 4 6 2 7 2 6 2 5 2 4
6 7 5 6 5 7 3 6 3 7 3 4 3 5

4.103. Hállese una permutación que convierta el primero de los sistemas de grupos de pares escritos más abajo en el segundo:

a) 0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7 0 8 0 9
2 3 1 3 1 4 1 7 1 8 1 9 1 6 1 5 1 2
4 5 4 6 2 5 2 9 2 6 2 4 2 8 2 7 3 7
6 7 5 8 6 9 3 5 3 9 3 8 3 4 3 6 4 8
8 9 7 9 7 8 6 8 4 7 5 7 5 9 4 9 5 6

b) 0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7 0 8 0 9
2 3 1 3 1 4 1 9 1 6 1 5 1 2 1 7 1 8
4 5 4 6 2 5 2 7 2 8 2 9 3 6 2 4 2 6
6 7 5 8 5 9 3 5 3 7 3 8 4 8 3 9 3 4
8 9 7 9 7 8 6 8 4 9 4 7 5 9 5 6 5 7

4.104. Pártanse los cuatro elementos 0, 1, 2, 3 en pares, sirviéndose para la división de tres modos. Determínese el grupo de automorfismos del sistema obtenido.

4.105. Determínese el orden del grupo de automorfismos del sistema obtenido en el problema 4.98.

4.106. Muéstrese que un grupo de automorfismos de los sistemas de grupos de pares de tipo cíclico contiene un subgrupo cíclico de orden $2\mu - 1$ con el elemento generatriz T, donde T es cierta permutación del problema 4.101.

4.107. Se tiene un sistema de grupos de pares de 4° orden de los elementos 4, 5, 6, 7:

$$\begin{matrix} 7\ 6 & 7\ 5 & 7\ 4 \\ 5\ 4 & 6\ 4 & 6\ 5 \end{matrix}$$

Continúese su construcción hasta que se obtenga un sistema de ternas de Steiner para siete elementos.

4.108. Constrúyase un sistema de grupos de pares, partiendo del siguiente cuadrado latino simétrico

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 7 & 2 & 3 & 9 & 8 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 1 & 8 & 3 & 9 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 6 & 4 & 5 & 9 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 0 & 1 & 2 & 5 & 9 & 7 \\ 5 & 9 & 3 & 4 & 1 & 0 & 7 & 8 & 2 & 6 \\ 6 & 8 & 9 & 5 & 2 & 7 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 6 & 9 & 5 & 8 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 5 & 7 & 9 & 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

§ 4. Bloque-esquemas

El bloque-esquema (esquema en bloque) es un sistema de subconjuntos de un conjunto finito que satisface ciertas condiciones ligadas con la frecuencia de aparición de los pares de elementos del conjunto en los subconjuntos del sistema. El bloque-esquema se define por un par de conjuntos (V, B), donde

$$V = \{a_1, a_2, \ldots, a_v\}, \quad B = \{B_1, B_2, \ldots, B_b\},$$
$$B_i \subseteq V, \quad i = 1, 2, \ldots, b.$$

Los elementos del conjunto V se llaman *elementos* del bloque-esquema, y los elementos del conjunto B reciben el nombre de *bloques* del bloque-esquema. El elemento a_i y el bloque B_j son *incidentes*, si $a_i \in B_j$. El número $|B_j|$ de elementos, incidentes con relación al bloque B_j, se denota por k_j, y el número de bloques incidentes con

relación al elemento a_i, por r_i. Mediante λ_{il} se designa el número $|\{B_j: a_i \in B_j,\ a_l \in B_j\}|$.

Los números v, b, r_i, k_j, λ_{il} $(i, l = 1, \ldots, v;\ j = 1, \ldots, b)$ se llaman *parámetros* del bloque-esquema. Si $r_i = r$ para cualquier $i = 1, \ldots, v$, y si $k_j = k$ para todos los $j = 1, \ldots, b$, y $\lambda_{il} = \lambda$, entonces (V, B) es un bloque-esquema *incompleto equilibrado*, o bien BIB-esquema.

Supongamos que entre los números λ_{il} $(i, l = 1, \ldots, v)$ se encuentran exactamente m diferentes: $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, y que en los elementos del conjunto V están introducidas m relaciones simétricas de conexión de un modo tal que se cumplen las siguientes condiciones:

a) el conjunto V^2 de todos los pares de elementos del conjunto V se parte en m subconjuntos disjuntos $V_1^2, V_2^2, \ldots, V_m^2$, con la particularidad de que si $(a, a') \in V_j^2$, suele decirse que los elementos a y a' son j-conexos;

b) $|\{B_j: a \in B_j,\ a' \in B_j,\ (a, a') \in V_i^2\}| = \lambda_i$;

c) $|\{a: \exists a'\ (a, a') \in V_i^2\}| = n_i,\ i = 1, \ldots, m$;

d) $|\{a'': (a'', a) \in V_j^2,\ (a'', a') \in V_k^2,\ (a, a') \in V_i^2\}| = p_{jk}^i$,

con la particularidad de que, en virtud de la simetría, $p_{jk}^i = p_{jk}^i$ $(i, j, k = 1, \ldots, m)$.

El bloque-esquema con las propiedades a) ... d) se llama *bloque-esquema parcialmente equilibrado con m tipos de conexiones* o, simplemente, PBIB(m)-esquema. Los parámetros del bloque-esquema están ligados mediante relaciones determinadas. Para los BIB-esquemas son válidas las igualdades

$$vr = kb, \quad \lambda (v - 1) = r (k - 1). \tag{4.1}$$

Para los parámetros de los PBIB(m)-esquemas son válidas las igualdades (4.1) y las siguientes relaciones:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = v - 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i n_i = r (k - 1),$$

$$\sum_{k=1}^{m} p_{jk}^i = \begin{cases} n_j, & i \neq j, \\ n_j - 1, & i = j; \end{cases} \quad i, j = 1, \ldots, m;$$

$$n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j = n_k p_{ij}^k, \quad i, j, k = 1, \ldots, m.$$

La matriz de incidencia de un BIB-esquema satisface la relación matricial principal

$$AA^T = (r - \lambda) E + \lambda J, \tag{4.2}$$

donde E es la matriz unidad de orden v, y J, la matriz de orden v formada por unidades. La existencia de la (0, 1)-matriz que satisface la condición (4.2) es una condición suficiente para la existencia de un BIB-esquema con los parámetros dados. De (4.2) se deduce la desigualdad $b \geqslant v$. Un BIB-esquema, para el cual $b = v$ (y, por

tanto, $r = k$) se llama *bloque-esquema simétrico*, o bien (v, k, λ)-**configuración**.

4.109. a) Demuéstrese que si B_1, B_2, . . ., B_v son bloques de un BIB-esquema simétrico en el conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_v\}$, entonces para cualquier i los conjuntos
$B_1 - B_i$, $B_2 - B_i$, . . ., $B_{i-1} - B_i$, $B_{i+1} - B_i$, . . ., $B_v - B_i$
forman en el conjunto $X - B_i$ un BIB-esquema. Hállense los parámetros de este esquema, si los parámetros del esquema de partida son v, k, λ.

b) El mismo problema, pero en lugar de la diferencia se tomará la intersección.

4.110. Constrúyase un BIB-esquema con los parámetros:

a) $v = b = 7$, $k = r = 3$, $\lambda = 1$;
b) $v = b = 13$, $k = r = 4$, $\lambda = 1$;
c) $v = 9$, $b = 12$, $r = 4$, $k = 3$, $\lambda = 1$.

4.111. ¿Existirán los BIB-esquemas con los parámetros:

a) $v = 15$, $b = 21$, $r = 7$, $k = 5$, $\lambda = 2$;
b) $v = b = 22$, $r = k = 7$, $\lambda = 2$;
c) $v = b = 43$, $r = k = 7$, $\lambda = 1$;
d) $v = 36$, $b = 42$, $r = 7$, $k = 6$, $\lambda = 1$?

4.112. Hállense la base y el grupo de automorfismos de un BIB-esquema con los parámetros:

a) $v = b = 7$, $r = k = 3$, $\lambda = 1$;
b) $v = 13$, $b = 26$, $r = 6$, $k = 3$, $\lambda = 1$;
c) $v = 25$, $b = 100$, $r = 12$, $k = 3$, $\lambda = 1$.

4.113. Compruébese la relación matricial principal para un BIB-esquema, donde D es: a) el (7, 3, 1)-esquema del problema 4.110, a); b) el (13, 4, 1)-esquema del problema 4.110, b). Escríbase para el esquema D la ecuación de incidencia en la forma cuadrática.

4.114. Constrúyase un bloque-esquema con los parámetros $v = 6$, $b = 10$, $r = 5$, $k = 3$, $\lambda = 2$.

4.115. Constrúyase un BIB-esquema simétrico partiendo de las siguientes igualdades de incidencia:

a) $L_1^2 + \ldots + L_7^2 = 2(x_1^2 + \ldots + x_7^2) + (x_1 + \ldots + x_7)^2$;

b) $L_1^2 + \ldots + L_{11}^2 = 3(x_1^2 + \ldots + x_{11}^2) + 2(x_1 + \ldots + x_{11})^2$,

donde $L_j = \sum_{i=1}^{v} n_{ij} x_i$, $j = 1, 2, \ldots, v$ y n_{ij} son los coeficientes de la matriz de incidencia del BIB-esquema.

4.116. Establézcase el cumplimiento de la condición necesaria de existencia de los (v, k, λ) BIB-esquemas simétricos:

a) 21, 5, 1; b) 15, 7, 3; c) 19, 9, 4; d) 29, 8, 2.

4.117. ¿Cuáles de los cinco poliedros regulares (tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro y dodecaedro) son BIB-esquemas? Hállense los parámetros de estos bloque-esquemas.

4.118. Muéstrese la dualidad de los siguientes pares de bloque-esquemas: a) octaedro y cubo; b) dodecaedro y icosaedro. Muéstrese que el tetraedro es autodual.

4.119. Constrúyase el bloque-esquema de $PG(2, 2)$.

4.120. Constrúyase la matriz de Hadamard partiendo de $PG(2, 2)$.

4.121. Determínense los parámetros de un PBIB-esquema obtenido de un conjunto de diferencias: a) 1, 2, 3 (mod 5); b) 1, 3, 9 (mod 13).

4.122. Hállense las matrices de conexión de un esquema:

$$3478,\ 1234,\ 2367,\ 5678,\quad 1256,\quad 1458,$$
$$\lambda_0 = 3,\ \lambda = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0.\ n_1 = n_2 = 3,\ n_3 = 1.$$

Determínense AA^T y todos los B_iB_j.

4.123. Constrúyase el PBIB-esquema de inversiones de un esquema residual obtenido a partir del siguiente BIB-esquema simétrico:

12345	12678	1379X	148XE
1569E	236XE	2479E	2589X
34689	3578E	4567X	

con los parámetros $v = b = 11$, $r = k = 5$, $\lambda = 2$. Hállense los parámetros del PBIB-esquema construido.

4.124. Constrúyase el (19, 9, 4)-esquema cíclico.

4.125. Constrúyase un BIB-esquema resoluble con $v = 9$, $b = 12$, $r = 4$, $k = 3$ partiendo de $EG(2, 3)$. ¿Cuál será el bloque-esquema dual?

4.126. Constrúyanse el plano parcial (r, k, t) y el PBIB(2)-esquema que le corresponde; hállense los parámetros de dicho bloque-esquema y señálese si éste posee la propiedad de resolubilidad:

a) $r = 3$, $k = 4$, $t = 2$; b) $r = 4$, $k = 5$, $t = 3$;

4.127. ¿Cuáles de los siguientes BIB-esquemas con los parámetros v, b, r, k, λ son resolubles:

a) 9, 12, 4, 3, 1; b) 6, 10, 5, 3, 2; c) 13, 26, 6, 3, 1; d) 10, 30, 9, 3, 2?

4.128. Constrúyase un BIB-esquema D 2-resoluble, si están dados un BIB-esquema D_1 con los parámetros $v_1 = b_1 = 3$, $r_1 = k_1 = 2$, $\lambda_1 = 1$ y un BIB-esquema resoluble D_2 con los parámetros $v_2 = 9$, $b_2 = 12$, $k_2 = 3$, $r_2 = 4$ y $\lambda_2 = 1$. Hállense los parámetros del esquema. Muéstrese que D es 2-resoluble.

4.129. Constrúyase un PBIB-esquema D 3-resoluble, si están dados un BIB-esquema D_1 con los parámetros $v_1 = b_1 = 4$, $r_1 = k_1 = 3$, $\lambda_1 = 2$ y un PBIB(2)-esquema resoluble con el esquema de conexión en forma del plano parcial (3, 4, 2) y con los parámetros $v_2 = 16$, $b_2 = 12$, $r_2 = 3$, $k_2 = 4$, $\lambda_{2.1} = 1$, $\lambda_{2.2} = 0$. Determínense los parámetros del esquema construido. Muéstrese que D es 3-resoluble.

4.130. Se tienen tres circunferencias concéntricas dentro de las cuales están trazados tres diámetros. Muéstrese que si los puntos de intersección de los diámetros con las circunferencias se toman por elementos del bloque-esquema D y los propios diámetros y circunferencias, por los bloques del mismo, entonces D es un PBIB(3)-esquema. Hállense los parámetros de D. ¿Será resoluble este esquema?

4.131. Resuélvase el problema 4.130 para el caso de cuatro circunferencias y cuatro diámetros.

4.132. Constrúyase y definase el esquema de conexión y hállense los parámetros de un PBIB(4)-esquema cuyos elementos son todos los pares ordenados (x, y), $x \neq y$, $x, y = 1, \ldots, n$, y los bloques, nada más que los conjuntos $\{(x, 1)\}, \ldots, \{(x, n)\}, \{(1, y)\}, \ldots$ $\ldots, \{(n, y)\}$, donde $x, y = 1, \ldots, n$; a) $n = 3$; b) $n = 4$

4.133. ¿Cuántos son los tipos de conexión y cómo pueden establecerse en un PBIB-esquema cuyos elementos son ternas ordenadas

$$(x, y, z), \quad x \neq y \neq z, \quad x, y, z = 1, \ldots, n,$$

y los bloques son nada más que los conjuntos $\{(x, y, 1)\}, \ldots$ $\ldots, \{(x, y, n)\}, \{(x, 1, z)\}, \ldots, \{(x, n, z)\}, \{(1, y, z)\}, \ldots$ $\ldots, \{(n, y, z)\}$?

Hállense v, b, r, k, n_i, λ_i para $n = 4$.

§ 5. Problema de Van der Waerden

Se denomina *cápsula convexa* de los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbf{R}^n$ el conjunto de puntos $M \in \mathbf{R}^n$ que pueden ser representados en la forma

$$M = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i, \text{ donde } \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0, \ i = 0, \ldots, k.$$

Los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbf{R}^n$ se llaman *independientes*, si los vectores $(P_i - P_0)$ son linealmente independientes ($i = 1, \ldots, k$). La independencia de los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbf{R}^n$ es posible sólo cuando $k \leqslant n$. Los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbf{R}^n$ son independientes cuando y sólo cuando de la condición $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i = 0$, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$ se deduce que todos los λ_i son iguales a cero.

Supongamos que $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbf{R}^n$ son independientes. Se llama *símplice* con vértices en los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k$ a una cáp-

sula convexa de puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k$. Para cualquier punto M dispuesto en tal símplice una representación de la forma $M = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i$, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$ es unívoca ($i = 0, 1, \ldots, k$). Esto permite llamar el juego $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ coordenadas baricéntricas del punto M.

4.134. Supongamos que el punto M pertenece a una cápsula convexa de puntos $P_0, \ldots, P_k$ de $\mathbf{R}^n$. Entonces existen los números enteros no negativos $0 \leqslant i_0 < i_1 < \ldots < i_n$ y los números no negativos $\lambda_{i_0}, \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}$ tales que $\sum_{j=0}^{n} \lambda_{i_j} = 1$, $M = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij} P_{ij}$.

Una matriz $A = \|a_{ij}\|_1^n$ se denomina *dos veces estocástica*, si para cualesquiera i, j se cumplen las condiciones $a_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

4.135. Demuéstrese que el producto de las matrices dos veces estocásticas es una matriz dos veces estocástica.

4.136. Demuéstrese que el permanente de una matriz dos veces estocástica no es superior a 1, y es igual a 1 cuando y sólo cuando la matriz es conmutable.

4.137. Demuéstrese que para las matrices cuadradas A y B de un mismo orden con elementos no negativos se verifica la desigualdad $\operatorname{per}(A + B) \geqslant \operatorname{per} A + \operatorname{per} B$.

4.138. Demuéstrese que el permanente de una matriz dos veces estocástica es superior a cero.

4.139. Pruébese que para cualquier matriz dos veces estocástica A de orden n se verifica el desarrollo $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$, donde P_i son matrices conmutables, $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ $(k \leqslant n^2 - n + 1)$.

4.140. Muéstrese que sobre un conjunto de matrices cuadradas de orden n, en las cuales la suma de elementos de cualquier fila o de cualquier columna es igual a 1, se puede introducir la estructura de un espacio lineal de dimensión $(n - 1)^2$.

4.141. Demuéstrese que para cualquier matriz dos veces estocástica A de orden n es válido el desarrollo $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$, donde P_i son matrices conmutables, $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ $(k \leqslant n^2 - 2n + 2)$.

4.142. Demuéstrese que el permanente de una matriz dos veces estocástica de orden n es superior o igual a $(n^2 - 2n + 2)^{1-n}$.

4.143. Sea $S(x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio simétrico de las variables $x_1, \ldots, x_n$, lineal con relación a cada una de sus variables

$$\Omega = \left\{(x_1, \ldots, x_n): \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geqslant 0\right\}.$$

Demuéstrese que

$$\min_{\Omega} S(x_1, \ldots, x_n) = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} S(\underbrace{1/k, \ldots, 1/k}_{k}, 0, \ldots, 0)$$

4.144. Determínese el valor mínimo de la expresión $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$, siendo limitados los valores de $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y + z = 1$.

4.145. Demuéstrese que el mínimo del permanente de una matriz dos veces estocástica de orden 3 es igual a 2/9.

4.146. ¿Se podrá representar el permanente de una matriz dos veces estocástica de orden $n \geqslant 4$ en forma de una función que sea simétrica respecto de los elementos de cada fila?

4.147. Supongamos que una matriz dos veces estocástica A es tal que su permanente tiene el valor mínimo entre los permanentes de todas las matrices dos veces estocásticas del mismo orden.

a) Demuéstrese que si todos los elementos de la matriz A son positivos, entonces $\operatorname{per} A \geqslant n!/n^n$, donde n es el orden de la matriz A.

b) Muéstrese que la matriz A no puede ser representada en forma de una recta de otras dos matrices.

4.148. En un caso particular, cuando $n = 3$, obténgase la demostración directa (sin emplear la desigualdad de Cauchy—Buniakovski para el espacio de Minkowski) de la siguiente desigualdad de Alexándrov—Egórychev:

$$\operatorname{per}^2 \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{per} \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn-1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \operatorname{per} \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n-2} & a_{1n} & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-2} & a_{nn} & a_{nn} \end{bmatrix},$$

donde $a_{in} \geqslant 0$, a_{ij} son, para $1 \leqslant j \leqslant n-1$, números reales arbitrarios.

En la desigualdad se logra el signo de igualdad cuando y sólo cuando para cualesquiera $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumple la igualdad $a_{in-1} = \lambda a_{in}$.

Empleando esta desigualdad, G. P. Egórychev demostró en 1980 el siguiente teorema (solución positiva del problema de Van der Waerden): el mínimo del permanente de una matriz dos veces estocástica de orden n es igual a $n!/n^n$ y se consigue en un punto único, a saber, en una matriz cuyos elementos son todos iguales a $1/n$.

Aún antes, en 1979, este hecho (sin unicidad) fue demostrado por D. E. Falikman. La demostración completa de la desigualdad y la solución del problema de Van der Waerden se aducen en [1].

CAPÍTULO V

MÉTODOS GEOMÉTRICOS

§ 1. Interpretaciones y problemas referentes a los grafos

En forma general un *grafo* puede definirse como una totalidad del conjunto V (de vértices) y la aplicación α del conjunto $V \times V$ en cierto conjunto M (el signo $\times$ es el indicio de un producto cartesiano).

Los pares $(a, b) \in V \times V$, para los cuales $\alpha(a, b) > 0$, se denominan *aristas*. Cuando $\alpha(a, b) > 1$, la arista (a, b) se denomina *múltiple* (o paralela), y el grafo G, que contiene aristas múltiples, se llama *multigrafo*; el número $\alpha(a, b)$ lleva el nombre de multiplicidad de la arista. Si $\forall (a, b)$: $\alpha(a, b) \leqslant 1$, se dice que el grafo está privado de aristas múltiples.

Si $|V| = n$ es un número finito, el grafo se llama *finito*, mientras que n se denomina *orden* del grafo.

Si $\forall (a, b) \in V \times V$: $\alpha(a, b) = \alpha(b, a)$, el grafo G es *no orientado*. De lo contrario, se denomina *orientado*. Si $\forall a \in V$: $\alpha(a, a) = 0$, suele decirse que el grafo G *no tiene bucles*.

Se denomina *subgrafo* $G(V, \alpha)$ a un grafo $G_1(V_1, \alpha_1)$ tal que

$$V_1 \subseteq V, \quad \forall (a, b) \in V_1 \times V_1 : \alpha_1(a, b) \in [0, \alpha(a, b)].$$

Un grafo finito no orientado sin bucles y aristas múltiples se llama *grafo simple* (o simplemente *grafo*). El grafo se define por el juego de dos conjuntos V, X, donde $X \subseteq V \times V$, con la particularidad de que $X = \{(a, b) \in V \times V : \alpha(a, b) = 1\}$, $\forall (a, b) \in X$: $(b, a) \in X$, $\forall a \in V$: $(a, a) \notin X$ y este grafo es cómodo expresarlo en un plano en forma de cierto conjunto de puntos (vértices), algunos de los cuales están unidos mediante aristas.

Los vértices $a, b \in V$ del grafo $G(V, X)$ se denominan adyacentes, si $(a, b) \in X$. El vértice a y la arista $(b, c) \in X$ se llaman *incidentes*, si $a = b$ ó $a = c$. El número $|X|$ lleva el nombre de *dimensión* del grafo.

Se denomina *matriz de adyacencia* $A = (a_{ij})$ del grafo $G(V, \alpha)$ con $|V| = n$ la $(n \times n)$-matriz, en la cual $a_{ij} = \alpha(a_i, a_j)$, donde $a_i, a_j \in V$.

Sea G un grafo simple orientado con $|V| = n$ y $|X| = m$. La *matriz de incidencia* $B = (b_{ij})$ del grafo orientado G se llama tal

$(n \times m)$-matriz, cuyas filas corresponden a los vértices y las columnas a los arcos, que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si el vértice } a_i \text{ es incidente a la arista} \\ \qquad x_j \in X \text{ y } x_j = (a_i, a_h); \\ -1, \text{ si el vértice } a_i \text{ es incidente a la arista} \\ \qquad x_j \in X \text{ y } x_j = (a_h, a_i); \\ 0, \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

(aquí a_h es cierto vértice del grafo G). La matriz de incidencia de un grafo no orientado G se determina de manera análoga, a excepción de que todos los elementos iguales a -1 se sustituyen por los iguales a $+1$.

Una sucesión alternativa de vértices y aristas a_0, (a_0, a_1), a_1, ... , a_{n-1}, (a_{n-1}, a_n), a_n del grafo G, donde $a_0, a_i \in V$, $(a_{i-1}, a_i) \in X$ y $i = 1, 2, \ldots, n$, se llama *cadena* si todas sus aristas son diferentes, y *cadena simple*, si todos sus vértices (y, por consiguiente, también sus aristas) son distintos. La cadena se llama *cerrada* si $a_0 = a_h$. Una cadena cerrada simple se llama *ciclo*, y el número de aristas en la cadena, *longitud de la cadena*. Designemos por C_n el grafo que consta de un ciclo de longitud n, y por P_n una cadena simple de longitud $n - 1$. Se llama *cadena hamiltoniana* (respectivamente, *ciclo hamiltoniano*) a un ciclo simple (respectivamente, ciclo) que contiene todos los vértices del grafo G. El ciclo que contiene todos los vértices y todas las aristas del grafo G se llama *euleriano*. El grafo G es *hamiltoniano* (respectivamente, *euleriano*) si contiene el ciclo hamiltoniano (respectivamente, euleriano).

El grafo G se llama *conexo* si cada par de sus vértices está unido por una cadena simple. El subgrafo conexo máximo del grafo G se denomina *componente de conexión* de éste.

Se llama *grado* del vértice $a \in V$ un número $\deg a = |\{b \in V: (a, b) \in X\}|$. Si $\forall a \in V$: $\deg a = d$, el grafo se llama *homogéneo* (o *regular*) de *grado d*.

Si en el grafo G se tienen k_i vértices de grado i, la expresión $(1^{k_1}2^{k_2} \ldots n^{k_n})$ se denomina *distribución de los vértices* del grafo G en grados.

El *grafo completo* K_n se llama grafo simple sobre n vértices, en el cual cada par de vértices es adyacente. Se denomina *clique de grafo* G al subgrafo completo máximo de éste. El *grafo bipartido* G es un grafo, cuyo conjunto de vértices V puede ser partido en dos subconjuntos V_1 y V_2 de tal manera, que cada arista del grupo G une los vértices de los diferentes subconjuntos. Si el grafo G contiene todas las aristas que unen los subconjuntos V_1 y V_2, entonces tal grafo se llama *bipartido completo*. Si en este caso $|V_1| = n$ y $|V_2| = m$, escribiremos $G = K_{n,m}$. Sean G_1 y G_2 grafos arbitrarios sobre los conjuntos de los vértices V_1 y V_2, respectivamente. Se llama *producto cartesiano* $G_1 \times G_2$ de los grafos G_1 y G_2 a tal grafo sobre el

conjunto de los vértices $V_1 = V_1 \times V_2$, que dos de sus vértices (a_1 y a_2) y (b_1 y b_2) son adyacentes cuando y sólo cuando o bien $a_1 = b_1$ y el vértice a_2 es adyacente a b_2 en el grafo G_2, o bien $a_2 = b_2$ y el vértice a_1 es adyacente a b_1 en el grafo G_1. Supongamos que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Entonces el grafo sobre el conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$, cuyos conjuntos de aristas contienen todas las aristas de los grafos G_1 y G_2, así como también todas las aristas del tipo (a, b), donde $a \in V_1$ y $b \in V_2$, se denomina *unión* de los grafos G_1 y G_2 y se designa por $G_1 + G_2$. Se llama *subgrafo de esqueleto* el subgrafo del grafo G que contiene todos sus vértices.

Sea G un grafo simple arbitrario con la arista $e = (a, b)$. La eliminación de la arista e de G conduce al grafo de esqueleto que contiene todas las aristas del grafo G, a excepción de e, es decir $G - e$ es el subgrafo máximo del grafo G, que no contiene e. Por otra parte, si a y b no son vértices adyacentes del grafo G, la adición de la arista $e = (a, b)$ conduce al grafo $H = G + e$ en el mismo conjunto de vértices n, tal que $H - e = G$. Sea G el grafo con arista $e = (a, b)$. Designemos por G/e el grafo obtenido de G mediante el estrechamiento de la arista e, es decir, por identificación de los vértices adyacentes a y b, o, lo mismo separando a y b con la siguiente adición de un nuevo vértice c, adyacente a todos los vértices del grafo G, que han sido adyacentes a a, o bien a b.

El *complemento* $\overline{G}$ del grafo G es un grafo sobre el mismo conjunto de vértices que el grafo G, y dos vértices en $\overline{G}$ son adyacentes cuando y sólo cuando ellos no son adyacentes en G.

El grafo G se llama *planario*, si sus vértices y aristas pueden disponerse en un plano de tal modo que las aristas no se intersequen. Un grafo que no contiene ciclos se denomina *bosque*. Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos (circuitos). El *árbol radical* tiene un vértice (*raíz*) que se destaca entre los demás. El subgrafo de esqueleto del grafo conexo G, que es un árbol, se llama *esqueleto*.

El grafo $G_1 (V_1, X_1)$ se denomina *isomorfo* al grafo $G_2 (V_2, X_2)$ (la designación es: $G_1 \cong G_2$), si existe una aplicación biunívoca φ: $V_1 \to V_2$ que $(a, b) \in X_1$ cuando y sólo cuando $(\varphi(a), \varphi(b)) \in X_2$ para cualesquiera $a, b \in V_1$. En este caso la aplicación φ se llama *isomorfismo* de los grafos G_1 y G_2.

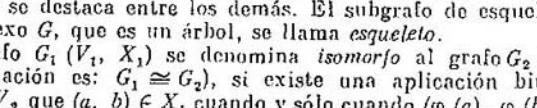


Fig. 5.1.

5.1. ¿Son isomorfos los grafos de las figs. 5.1...5.6?

5.2. Supongamos que φ es un isomorfismo de los grafos $G_1 (V_1, X_1)$ y $G_2 (V_2, X_2)$, que $|V_1| = |V_2| = n$, A_1 y A_2 son las

matrices de adyacencia de los grafos G_1 y G_2, respectivamente, y que $P = (p_{ij})$ es la $(n \times n)$-matriz tal que

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } \varphi\ (a_i = b_j), \text{ donde } a_i \in V_1 \text{ y } b_j \in V_2; \\ 0, \text{ en el caso contrario} \end{cases}$$

Convencerse de que P es la matriz de cierta k-permutación y $P^T A_1 P = A_2$, donde P^T es una matriz transpuesta a P.

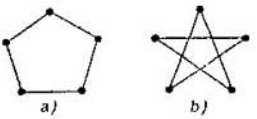


Fig. 5.2.

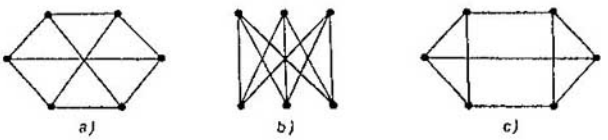


Fig. 5.3.

5.3. Demuéstrese que si los grafos G_1 y G_2 son isomorfos, sus matrices de adyacencia tienen valores propios iguales. ¿Es justa la afirmación inversa?

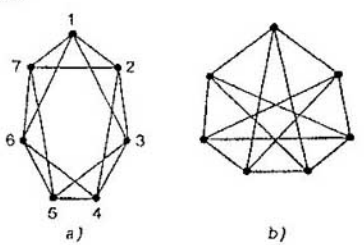


Fig. 5.4.

5.4. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) la suma de los grados de los vértices del grafo G es igual al número duplicado de sus vértices;

b) en cualquier grafo el número de vértices con grados impares es par;

c) cada grafo *cúbico* (es decir regular de grado 3) tiene un número par de vértices.

5.5. Sea B una matriz de incidencia de un grafo simple no orientado. Demuéstrese que su matriz de adyacencia A se obtiene de BB^T por sustitución de todos los elementos en la diagonal por ceros. Hállese el rango de la matriz B.

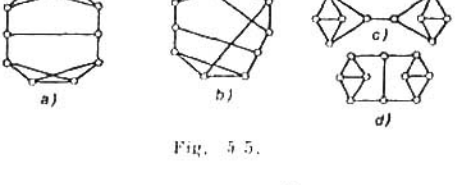


Fig. 5.5.

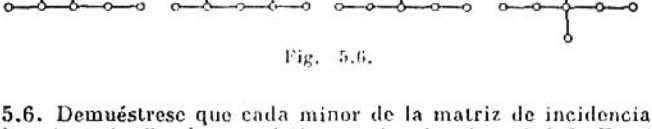


Fig. 5.6.

5.6. Demuéstrese que cada minor de la matriz de incidencia del *grafo orientado* G *sobre* n vértices es igual a 1, -1 ó 0. Es cierto que su minor de orden $(n-1)$ se diferencia de 0 cuando y sólo cuando las columnas de este minor corresponden a las aristas del esqueleto del grafo G.

5.7. Demuéstrese que el grafo es bipartido cuando y sólo cuando se cumple una de las siguientes condiciones:

a) todos sus ciclos son de longitud par;

b) para cualquier número impar n todos los elementos diagonales de la matriz A^n son iguales a cero.

5.8. Demuéstrese que un grafo simple finito es euleriano cuando y sólo cuando es conexo y todos sus vértices tienen un grado par. Constrúyanse 4 grafos eulerianos no isomorfos de orden 5.

5.9. Demuéstrese la siguiente afirmación:

a) si $p \geqslant 3$ y $\deg a + \deg b \geqslant p$ *para cualquier par* a *y* b *de vértices no adyacentes del grafo* G, entonces G es un grafo hamiltoniano;

b) si $p > 3$ y $\deg a \geqslant \frac{p}{2}$ para cualquier vértice a del grafo G, entonces G es un grafo hamiltoniano;

c) en cada grafo hamiltoniano cúbico existe por lo menos tres ciclos hamiltonianos diferentes.

5.10. ¿Cuántos ciclos hamiltonianos distintos hay en los grafos bipartidos completos $K_{3,3}$ y $K_{3,4}$?

5.11. Dese un ejemplo de un grafo que sea: euleriano y hamiltoniano; b) euleriano, pero no hamiltoniano; c) hamiltoniano, pero no euleriano; d) no euleriano y no hamiltoniano.

5.12. Muéstrese que un grafo con n vértices, cuyo número de aristas es superior a $(n-1)(n-2)/2$, es conexo.

5.13. Muéstrese que para todo t natural existe un grafo cúbico con $n = 6t$ vértices, y cada vértice pertenece a un y sólo un triángulo.

5.14. Muéstrese que para todo $n = 6t + 4$ $(t > 1)$ existe un grafo cúbico de n vértices y cada vértice del grafo, a excepción de uno, pertenece a un y sólo un triángulo.

5.15. ¿Existe un grafo simple finito en el cual no haya dos vértices con grados iguales?

5.16. ¿Existe un grafo con la siguiente distribución de vértices en grados? a) $(2^3 3^1 4^1 5^3 7^2)$; b) $(2^3 3^1 4^1 5^3 7^3)$?

5.17. Supongamos que un grafo simple G tiene la distribución de los vértices en grados $(1^2 3^1 4^2)$. Hállese la distribución del gra o $\overline{G}$.

5.18. Sean G_1 y G_2 unos grafos regulares de grado K_1 y K_2, f respectivamente. ¿Es cierto que los grafos $G_1 \times G_2$ y $G_1 + G_2$ son también regulares?

5.19. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) G es un árbol;

b) cualesquiera dos vértices en G están unidos por una sola cadena;

c) el grafo G es conexo, pero la separación de cualquiera de sus aristas lo hace no conexo;

d) la adición de cualquier arista nueva al grafo G conduce a la aparición exactamente de un ciclo.

5.20. Indíquese el número de componentes conexos de un bosque que tiene 76 vértices y 53 aristas.

5.21. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) $G_1 \times G_2 = G_2 \times G_1$;

b) el grafo $G_1 \times G_2$ es conexo cuando y sólo cuando es conexo por lo menos uno de los grafos G_1 y G_2;

c) el grafo $G_1 \times G_2$ contiene subgrafos isomorfos a G_1 y G_2.

5.22. Hállese la distribución de los vértices en grados en el grafo $G_5 \times P_3$. Represéntese gráficamente este grafo.

5.23. ¿Es cierto que: a) $\overline{G_1 + G_2} = \overline{G_1} + \overline{G_2}$; b) $\overline{G_1 \times G_2} = \overline{G_1} \times \overline{G_2}$?

5.24. El grafo autocomplementario es un grafo isomorfo a su complemento. Dense ejemplos de grafos autocomplementarios para 4, 5 y 8 vértices. Demuéstrese que cada grafo autocomplementario tiene $4n$ ó $4n + 1$ vértices.

5.25. Sea A una $(n \times n)$-matriz simétrica con ceros en la diagonal principal, en cada fila de la cual se encuentran $2k + 1$ elementos no nulos. Demuéstrese que n es un número par.

5.26. Se denominará *grafo* de las *n-permutaciones* a un grafo cuyos vértices son todas las permutaciones de elementos de un n-conjunto, y dos vértices son adyacentes cuando y sólo cuando uno de ellos se transforma en el otro por transposición de dos elementos.

Indíquense el orden, la dimensión y el grado de cada vértice del grafo de las n-permutaciones. ¿Será el grafo regular? Exprésese en un plano el grafo de las 3-permutaciones.

5.27. Sea G un grafo de n-permutaciones y $n \geqslant 3$. Demuéstrese que G contiene una cadena hamiltoniana y no es un grafo planario.

5.28. Sea M un mn-conjunto y supongamos que $R(M)$ es una totalidad de todas las particiones de M en m-conjuntos. Las particiones R_1, R_2 de $R(M)$ se llamarán *ortogonales*, si la intersección de cualesquiera dos componentes, uno de los cuales se toma de R_1 y el otro de R_2, contiene a lo sumo un elemento. Un grafo con el conjunto de vértices $R(M)$, cuyos dos vértices R_1 y R_2 son adyacentes cuando y sólo cuando R_1 y R_2 son ortogonales, se denomina *grafo de* (m, n)*-particiones ortogonales*. Determínense el orden y la dimensión del grafo de las (m, n)-particiones ortogonales para $m \leqslant n$. ¿Será este grafo regular? Si es regular, indíquese la potencia de regularidad.

5.29. Muéstrese que el orden del clique en el grafo de (m, n)-particiones ortogonales no sobrepasa el número $[(mn - 1)/(m - 1)]$.

5.30. Indíquese el orden del clique y constrúyase el mismo:

a) en el grafo de las (2, 3)-particiones ortogonales;

b) en el grafo de las (3, 4)-particiones ortogonales.

5.31. Se denomina *cubo de Boole* Q_m de dimensión m un grafo cuyos vértices están representados por los vectores m-dimensionales de ceros y unidades, con la particularidad de que dos vectores semejantes son adyacentes cuando y sólo cuando se diferencian en un componente.

Demuéstrese que Q_m es un grafo hamiltoniano conexo.

5.32. Existe un grupo de n individuos y hay n obras. Cada miembro del grupo puede realizar sólo algunas de las obras mencionadas. Se necesita llenar todos los lugares de trabajo con obreros calificados. ¿Será suficiente para ello que cada miembro del grupo pueda realizar un mismo número $0 < k < n$ de obras (diferentes) y cada obra pueda ser efectuada por k individuos?

5.33. Hay n personas y cada dos de ellas tienen exactamente un conocido. Muéstrese que en el grafo de los conocidos existe al menos un triángulo y no existe ningún C_4.

5.34. Muéstrese que el número de particiones de un N entero en n partes de un modo tal que la parte mayor es igual a m, equivale al número de particiones de N en m partes de tal modo que la mayor parte es igual a n.

Sea A un cuadrado latino de orden 6. Determinemos dos grafos A_a y A_b, que tendrán por vértices las filas y las columnas del cuadrado latino A, respectivamente, con la particularidad de que dos vértices son adyacentes, si uno de los vértices se puede pasar a otro con ayuda de una permutación del siguiente tipo:

$$\alpha = (i_1 i_2)\ (i_3 i_4)\ (i_5 i_6);\ \beta = (i_1 i_2 i_3)\ (i_4 i_5 i_6);\ \gamma = (i_1 i_2) \times$$
$$\times\ (i_3 i_4 i_5 i_6);\ \delta = (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6).$$

Las aristas que corresponden a α se representarán en la figura mediante ———, las que corresponden a β, a traves de - - - -, las que corresponden a γ, por ——— y δ, mediante ═══.

5.35. Dibújense los grafos de los siguientes cuadrados latinos:

$$A:\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\\2&1&4&3&6&5\\3&5&1&6&2&4\\4&6&2&5&1&3\\5&3&6&1&4&2\\6&4&5&2&3&1\end{array}\qquad B:\begin{array}{cccccc}1&2&3&6&5&4\\2&1&6&3&4&5\\3&4&5&2&1&6\\4&3&2&5&6&1\\5&6&1&4&3&2\\6&5&4&1&2&3\end{array}\qquad C:\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\\3&5&1&6&2&4\\4&6&5&1&3&2\\5&4&6&2&1&3\\6&1&2&3&4&5\end{array}$$

5.36. Hállense las permutaciones de filas, columnas y elementos que convierten el cuadrado latino A en el cuadrado latino B (problema 5.35).

Se llama *automorfismo* del grafo G el isomorfismo φ del grafo G consigo mismo.

5.37. ¿Es cierto que cada automorfismo φ del grafo G es una permutación del conjunto de vértices del grafo G que conserva la adyacencia de éstos? Compruébese que todos los automorfismos del grafo G referente a la operación de composición de las aplicaciones, forman un grupo. ¿Cómo están relacionados entre sí los grupos de permutaciones en n elementos y automorfismos del grafo G con el conjunto de los vértices V, donde $|V| = n$?

5.38. Hállese el grupo de automorfismos de los siguientes grafos: a) K_n; b) $K_{m,n}$; c) $P_2 + P_3$, si los vértices de P_2 son los números 3 y 5 y de P_3, 1, 2 y 4; d) $\overline{K}_2 + C_4$, si los vértices de $\overline{K}_2$ son los números 3 y 4, y de C_4, 1, 2, 4 y 5.

5.39. Hállense todos los grafos, con el número de vértices inferior o igual a 6, tales que su grupo de automorfismos sea trivial.

5.40. Sea G un grafo que consta de dos componentes conexos, uno de los cuales es K_n, y otro, K_m. Hállese el grupo de automorfismos del grafo H, si: a) $H = G$ y $m \neq n$; b) $H = G$ y $m = n$; c) $m = n$ y H es un grafo conexo, obtenido de G por adición de aristas de tal manera, que cada vértice del primer componente está unido con el único vértice del segundo componente y viceversa.

5.41. Se denomina *epimorfismo* de un grafo sobre otro grafo a una aplicación sobreyectiva del conjunto de vértices del primer grafo sobre el conjunto de vértices del segundo, con la particularidad de que dicha aplicación conserva la relación de adyacencia. Muéstrese que existe el epimorfismo del grafo $\overline{K}_2 + C_4$ sobre C_3.

5.42. Se da cierto BIB-esquema. A todo elemento del conjunto pongámosle en correspondencia un vértice del grafo. Unamos dos vértices mediante una arista cuando y sólo cuando el par correspondiente pertenece no a cada bloque del BIB-esquema. Dese la interpretación del BIB-esquema en términos de la teoría de los grafos.

5.43. ¿Cuáles son los parámetros del BIB-esquema, correspondiente al grafo $\bar{K}_2 + C_4$? ¿Existirá el epimorfismo del BIB-esquema sobre el bloque-esquema para $v = 3$, $b = r = \lambda = 1$, $k = 3$?

5.44. Demuéstrese que existen los epimorfismos del grafo $C_4 + C_4$ sobre los grafos P_2, K_4 y C_4.

5.45. ¿Corresponderá el conjunto de subgrafos del tipo del grafo $C_4 + C_4$ del BIB-esquema? Dese la generalización del BIB-esquema para este caso (véase problema 5.42).

5.46. ¿Formarán los subgrafos del tipo $P_2 \times P_3$ del grafo $C_4 + C_4$ un BIB-esquema generalizado.

5.47. Constrúyase la tabla rectangular a partir de elementos de cinco tipos de una manera tal que los segmentos que unen los elementos iguales formen un retículo cuadrado.

5.48. Un plano está cubierto con unos hexágonos de n colores de un modo tal que los centros de los hexágonos de un mismo color forman los vértices de un retículo formado por triángulos regulares iguales. ¿Para qué número n de colores será posible tal construcción?

5.49. Un grafo, de cuyos vértices sirven todos los k-subconjuntos de cierto n-conjunto, y dos k-subconjuntos están unidos por una arista cuando y sólo cuando su intersección contiene exactamente l elementos, lleva el nombre de (n, k, l)-grafo. Determínense el orden y la dimensión del (n, k, l)-grafo. ¿Será este grafo regular?

5.50. Hállese el número cromático de los siguientes grafos: a) K_n; b) $K_{m,n}$; c) árbol T; d) grafo de n-permutaciones; e) cubo booleano Q_m; f) ciclo C_n.

5.51. Hállese el número cromático de un grafo obtenido de K_n por supresión de: a) una arista; b) dos aristas; c) tres aristas que forman un triángulo.

5.52. Hállese $\chi\,(Q_m + e)$ para $m > 1$.

5.53. Demuéstrese que $\chi\,(G \times P_k) = \chi\,(G)$, para un grafo arbitrario G con aristas.

5.54. Indíquese un grafo cúbico de 1004 vértices cuyo número cromático sea igual a 4.

Se llama *α-transformación* del grafo G la sustitución de cualesquiera dos de sus aristas (a, b) y (c, d) no adyacentes por dos nuevas aristas (a, c), (b, d) ó (a, d), (b, c).

5.55. ¿Varían los grados de los vértices del grafo G cuando tienen lugar las α-transformaciones? Constrúyase en la fig. 5.7 con ayuda de las α-transformaciones, el grafo H sin triángulos a partir del grafo G. Hállese $\chi(G)$ y $\chi\,(H)$.

5.56. ¿Se podrá obtener mediante las α-transformaciones, a partir de un árbol, un grafo conexo que no sea árbol?

5.57. Constrúyanse todos los grafos que se obtienen a partir de un grafo cúbico expuesto en la fig. 5.8, empleando las α-transformaciones.

Se denomina *distancia* entre los vértices a y b del grafo G la mínima longitud de una cadena simple que une a y b en el grafo G. Se

llama *matriz de distancia* del grafo G sobre n vértices la $(n \times n)$-matriz $D = (d_{ij})$, en la cual d_{ij} son iguales a la distancia de a_i a a_j; si los vértices a_i y a_j yacen en distintos componentes conexos del grafo G, entonces $d_{ij} = \infty$.

5.58. Hállese el número de diferentes cadenas más cortas entre dos vértices del grafo Q_m que sean distintas en l componentes.

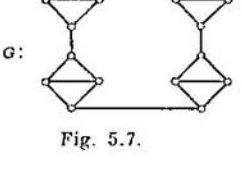


Fig. 5.7.

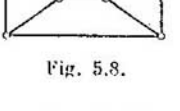


Fig. 5.8.

5.59. Escríbase la matriz de distancias para los siguientes grafos: a) K_3; b) C_4; c) $C_4 \times K_3$.

5.60. Sea $P(G; \lambda)$ un número de diferentes λ-coloraciones del grafo G. ¿Será cierto que $P(G; \chi(G)) > 0$ y $P(G, \lambda) = 0$ para todo $\lambda < \chi(G)$?

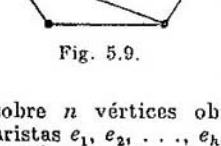


Fig. 5.9.

5.61. Demuéstrese que si G es un grafo simple y e, su arista arbitraria, entonces $P(G; \lambda) = P(G - e; \lambda) - P(G/e; \lambda)$, donde $G - e$ y G/e son los grafos obtenidos de G por eliminación y contracción de la arista e, respectivamente.

5.62. Sea G un grafo simple arbitrario sobre n vértices obtenido del grafo K_n por eliminación de las aristas $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Supongamos que $G_0 = K_n$, $G_i = G_{i-1} - e_i$, y $G^i = G_{i-1}/e_i$, donde $i = 1, 2, \ldots, k$. Es evidente que $G = G_k$. Demuéstrese que

$$P(G; \lambda) = P(K_n; \lambda) + \sum_{i=1}^{k} P(G^i; \lambda).$$

Hállense $P(K_n; \lambda)$ y $P(G; \lambda)$ para el grafo G representado en la fig. 5.9. ¿Se podrá pintar de un modo regular en dos o tres colores los vértices del grafo G?

$P(G; \lambda)$ se denomina, según consideraciones evidentes, polinomio cromático del grafo G.

5.63. Sea $P(G; \lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i$ un polinomio cromático del grafo G con el conjunto de vértices $V(G)$ y el conjunto de aristas $E(G)$, y supóngase que $G_1, \ldots, G_k$ son sus componentes conexos. Demuéstrese que:

a) $n = |V(G)|$ y $a_n = 1$;

b) $a_{n-1} = -|E(G)|$;
c) $a_0 = 0$;
d) $P(G; \lambda) = \prod_{i=1}^{h} P(G_i; \lambda)$;
e) $a_i = 0$ para todo $i < k$.

¿Es cierto que si un polinomio satisface las condiciones a) ... e), entonces es cromático?

5.64. Sea $P(G; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^i$ un polinomio cromático grafo G y sea $n = |V(G)|$. Demuéstrese que

a) la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = 1$ es de signos alternados;

b) si G es un grafo conexo, entonces $|a_i| \geqslant \binom{n-1}{i-1}$;

c) $a_k \sum_{j=0}^{|E(G)|} (-1)^j m_{k_j}$ es el número de subgrafos engendrados del grafo G con k componentes conexos y j aristas.

5.65. Demuéstrese que el grafo G con n vértices es un árbol cuando y sólo cuando $P(G; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.

§ 2. Problemas enumerativos en los grafos

5.66. Analicemos 8 clases de grafos con vértices marcados. Cada una de estas clases se define prefijando los parámetros α, β y γ toman los valores 0 ó 1; llamemos (α, β, γ)-grafos a sus elementos. En este caso, si $\alpha = 0$, se analizan los grafos sin bucles; si, en cambio, $\alpha = 1$, los bucles se admiten; si $\beta = 0$, se analizan los grafos sin aristas paralelas, y éstas se admiten, si $\beta = 1$; si $\gamma = 0$, se analizan los grafos no orientados, en cambio, si $\gamma = 1$, se introduce la orientación de las aristas.

Denotemos con $g_{\alpha,\beta,\gamma}(n, k)$ el número de (α, β, γ)-grafos con n vértices y k aristas. Demuéstrense las siguientes fórmulas:

$$g_{0,0,0}(n, k) = \binom{n(n-1)/2}{k}, \quad g_{1,0,0}(n, k) = \binom{n(n+1)/2}{k},$$

$$g_{0,1,0}(n, k) = \binom{n(n-1)/2+k-1}{k},$$

$$g_{1,1,0}(n, k) = \binom{n(n+1)/2+k-1}{k},$$

$$g_{0,0,1}(n, k) = \binom{n(n-1)}{k},$$

$$g_{1,0,1}(n, k) = \binom{n^2}{k},$$

$$g_{0,1,1}(n, k) = \binom{n(n-1)+k-1}{k},$$

$$g_{1,1,1}(n, k) = \binom{n^2+k-1}{k}.$$

¿Cuál es el número máximo de aristas que puede tener un (α, β, γ)-grafo?

5.67. Sea $G^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y) = \sum_{k \geqslant 0} g_{\alpha,\beta,\gamma}(n, k)\, y^k$,

$n = 1, 2, 3, \ldots$ Aquí, el límite superior de sumación (véase el problema 5.66) es finito, si $\beta = 0$, y es igual a $n(n-1)/2$ cuando $\alpha = 0$, $\gamma = 0$; a $n(n+1)/2$ cuando $\alpha = 1$, $\gamma = 0$; a $n(n-1)$ cuando $\alpha = 0$, $\gamma = 1$; a n^2 cuando $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, y, por fin, es igual a ∞, siempre que $\beta = 1$. Por definición (y por el sentido) pongamos $g_{\alpha,0,\gamma}(n, k) = 0$, si k es mayor que la frontera superior (determinada en el problema 5.66) para el número de aristas en el $(\alpha, 0, \gamma)$-grafo. Por eso el límite superior de sumación respecto de k puede considerarse en todo caso igual a ∞.

Demuéstrese que

$$G^{(n)}_{0,0,0}(y) = (1+y)^{n(n-1)/2}, \quad G^{(n)}_{0,0,1}(y) = (1+y)^{n(n-1)},$$
$$G^{(n)}_{1,0,0}(y) = (1+y)^{n(n+1)/2}, \quad G^{(n)}_{1,0,1}(y) = (1+y)^{n^2},$$
$$G^{(n)}_{0,1,0}(y) = (1-y)^{-n(n-1)/2}, \quad G^{(n)}_{0,1,1}(y) = (1-y)^{-n(n-1)},$$
$$G^{(n)}_{1,1,0}(y) = (1-y)^{-n(n+1)/2}, \quad G^{(n)}_{1,1,1}(y) = (1-y)^{-n^2}.$$

5.68. Sea $c_{\alpha,\beta,\gamma}(n, k)$ el número de (α, β, γ)-grafos conexos con n vértices marcados y k aristas. Suponemos $c_{\alpha,0,\gamma} = 0$, si k es mayor que la frontera superior determinada en el problema 5.66.

Demuéstrese la relación recurrente

$$g(n+1, k) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \binom{n}{l} c(l+1, m)\, g(n-l, k-m) \qquad (5.1)$$

(fórmula de Hilbert). Con el fin de simplificar la notación en (5.1) están omitidos los índices α, β y γ.

Las condiciones iniciales son las siguientes: $g(0, 0) = 1$ y $g(0, k) = 0$, si $k > 0$ (por acuerdo); $c(1, 0) = 1$ y $c(n, 0) = 0$, si $n > 1$ (según el sentido).

5.69. Introduzcamos las funciones generatrices

$$C^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y) = \sum_{k \geqslant 0} c_{\alpha,\beta,\gamma}(n, k)\, y^k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde el límite superior de sumación respecto de k es el mismo que figura en la definición de la función generatriz $G^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)$. Dedúzcase de la relación recurrente (5.1), que se refiere a los números $g_{\alpha,\beta,\gamma}(n, k)$ y $c_{\alpha,\beta,\gamma}(n, k)$, la siguiente relación recurrente para las funciones generatrices $G^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)$ y $C^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)$:

$$G^{(n+1)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} C^{(l+1)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\, G^{(n-l)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y), \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad (5.2)$$

donde, de conformidad con las condiciones iniciales del problema 5.68, $G^{(0)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y) = 1$.

5.70. Introduzcamos las funciones generatrices

$$G_{\alpha,\beta,\gamma}(z,\ y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} G^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\,\frac{z^n}{n!},$$

$$C_{\alpha,\beta,\gamma}(z,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} C^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\,\frac{z^n}{n!},$$

Demuéstrese que para las funciones generatrices $G_{\alpha,\beta,\gamma}(z,\ y)$ y $C_{\alpha,\beta,\gamma}(z,\ y)$ se verifica la correlación

$$G_{\alpha,\beta,\gamma}(z,\ y) = \exp\{C_{\alpha,\beta,\gamma}(x,\ y)\}. \tag{5.3}$$

5.71. ¿Cuántos son los grafos $(0, 0, 0)$ con $2n$ vértices y n aristas, cuyos componentes conexos son aristas aisladas?

5.72. Hállese la función generatriz exponencial de los números μ_n, donde $\mu_0 = 1$, $\mu_n = 0$, si n es impar y μ_{2n} es igual al número de grafos del problema antecedente.

5.73. Supongamos que $c(n, k) = c_{0,0,n}(n, k)$ es el número de $(0, 0, 0)$-grafos conexos con n vértices marcados y k aristas y que $F(n, k)$ es el número de tales grafos que no tienen vértices terminales, es decir, incidentes respecto de una sola arista. Muéstrese que para $n > 2$ los números $c(n, k)$ y $F(n, k)$ están ligados entre sí por la relación

$$F(n,\ k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\, c(n-i,\ k-i)\,(n-i)^i,\quad n > 2,$$

$$c(0,\ 0) = 1,\quad c(0,\ k) = 0 \quad \text{para } k > 0.$$

5.74. El $(0, 0, 0)$-grafo conexo sin ciclos es un árbol. El número de aristas en el árbol con n vértices es igual a $n - 1$. Haciendo uso del problema 5.73, demuéstrese que el número $T(n)$ de árboles con n vértices marcados es igual a

$$T(n) = n^{n-2},\quad n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{5.4}$$

(primera fórmula de Cayley).

5.75. ¿A qué es igual el número

$$T_n(P_{j_1},\ \ldots,\ P_{j_r}),\quad r = 1,\ 2,\ \ldots;\quad n = r,\ r+1,\ \ldots,$$

de árboles con n vértices marcados $P_1, \ldots, P_n$, en los cuales los vértices $P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}$ son terminales?

5.76. Demuéstrese que el número $T(n, r)$ de árboles con n vértices marcados, de los cuales r son terminales, se define por la fórmula

$$T(n,\ r) = \frac{n!}{r!}\ S(n-2,\ n-r),\quad n = 1,\ 2,\ \ldots;\quad r = 0,\ \ldots,\ n \tag{5.5}$$

(segunda fórmula de Renyi), donde $S(n - 2, n - r)$ es el número de Stirling de 2° género.

5.77. Demuéstrese la fórmula (5.4), haciendo uso de la segunda fórmula de Rényi (véase el problema 5.76).

5.78. Demuéstrese para los números $T(n, r)$ del problema 5.76 la fórmula recurrente

$$\frac{r}{n}\ T(n, r) = rT(n-1, r) + (n-r)\,T(n-1, r-1)$$

$(n = 3, 4, \ldots; r = 1, \ldots, n)$, haciendo uso de la fórmula explícita (5.5).

5.79. Hállese el número

$$T(n; P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}), \quad r = 1, \ldots; \quad n = r, r+1, \ldots,$$

de árboles con n vértices marcados $P_1, \ldots, P_n$, de los cuales exactamente r (a saber, los vértices $P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}$) son terminales.

5.80. Obténgase la demostración combinatoria de la fórmula recurrente del problema 5.78.

5.81. Demuéstrese, para los números $T(n)$ del problema 5.74, la relación recurrente

$$2(n-1)\,T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (n-i)\,T(i)\,T(n-i), \quad n = 2, 3, \ldots$$

La condición inicial es: $T(1) = 1$.

5.82. Demuéstrese la identidad

$$2(n-1)\,n^{n-2} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} i^{i-1}(n-i)^{n-i-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

5.83. Designemos con $\tau(n)$ el número de árboles radicales con $n \geqslant 1$ vértices marcados e introduzcamos una función generatriz

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\,\frac{z^n}{n!}.$$

Demuéstrese que $\theta(z)$ satisface la ecuación

$$z = \theta(z)\,e^{-\theta(z)}$$

(ecuación de Polya) y en la forma explícita $\theta(z)$ es

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1}\,\frac{z^n}{n!}.$$

5.84. Sea

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} T(n)\,\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-2}\,\frac{z^n}{n!}.$$

Muéstrese que $T(z)$ y la función generatriz $0(z)$ del problema 5.83 están ligados entre sí por la correlación

$$T(z) = 0(z) - 0^2(z)/2$$

(primera fórmula de Renyi).

5.85. Demuéstrese la primera fórmula de Cayley (5.4) para un número de árboles con n vértices marcados, haciendo uso de los resultados del problema 5.83 (ecuación de Polya).

5.86. Supongamos que para $n = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots, n$

$$A_{nk} = \sum \frac{n!}{j_1! \ldots j_k!} j_1^{j_1-1} j_2^{j_2-1} \ldots j_k^{j_k-1};$$

la sumación aquí se realiza respecto de los juegos $j_1, \ldots, j_k$ tales que $j_1 + \ldots + j_k = n$. Demuéstrese la identidad

$$A_{nk} = kn^{n-k}(n-1)!/(n-k)!.$$

5.87. Designemos, para $n = 1, 2, \ldots; k = 1, \ldots, n$, mediante $l_k(n)$ el número de bosques con $n + k - 1$ vértices marcados $P_1, \ldots, P_{n+k-1}$ y k componentes tales que los vértices $P_1, P_2, \ldots, P_k$ pertenezcan a los componentes diferentes. Demuéstrese que

$$l_k(n) = k(n + k - 1)^{n-2}$$

(segunda fórmula de Cayley).

5.88. Demuéstrese que el número de bosques radicales $l_k(n)$ con n vértices marcados y k componentes es

$$l_k(n) = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}, \quad n = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots, n.$$

5.89. Supongamos que $T_k(n)$ denota el número de árboles con n vértices marcados $P_1, \ldots, P_n$, en los cuales el vértice P_1 es de grado k. Muéstrese que

$$T_k(n) = \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}, \quad n = 2, 3, \ldots; k = 1, \ldots, n-1$$

(fórmula de Clark).

5.90. Dése una nueva demostración de la primera fórmula de Cayley (5.4), haciendo uso de la fórmula de Clark del problema 5.89.

5.91. Demuéstrese la validez de la identidad

$$\sum_{p=k}^{n-1} \binom{n}{p} \binom{p-1}{k-1} p^{p-k} (n-p)^{n-p-1} = (k+1) \binom{n-1}{k} n^{n-k-1},$$

donde $n = k + 1, k + 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots$ (Para $k = 1$ esta identidad se reduce a la identidad del problema 5.82).

5.92. Denotemos por $L_k(n)$ el número de bosques con n vértices marcados y k componentes. Demuéstrese que

$$L_k(n) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\min(k,\, n-k)} \left(-\frac{1}{2}\right)^j \binom{k}{j} \binom{n-1}{k+j-1} (k+j)!\, n^{n-k-j},$$

$$n = 1, \ldots; \quad k = 1, \ldots, n$$

(tercera fórmula de Rényi).

5.93. En un árbol con $n \geqslant 2$ vértices marcados $P_1, \ldots, P_n$ existe un único camino que une dos vértices arbitrarios. Supongamos que para $k \geqslant 2$, $\gamma_k(n)$ es el número de árboles con n vértices marcados, en los cuales los vértices P_1 y P_2 están unidos mediante un camino de longitud $k-1$ (es decir, mediante un camino que pasa por k vértices sucesivos, incluidos P_1 y P_2). Demuéstrese que

$$\gamma_k(n) = kn^{n-k-1}(n-2)(n-3)\ldots(n-k), \quad n = 2, 3, \ldots;$$

$$k = 2, \ldots, n$$

(fórmula de Meir — Moon).

5.94. Demuéstrese que el número $t(n; v_1 \ldots v_n)$ de árboles con $n \geqslant 2$ vértices marcados $P_1, P_2, \ldots, P_n$, en los cuales el vértice P_i es de grado $v_i \geqslant 1$, se determina por la fórmula

$$t(n; v_1, \ldots, v_n) = (n-2)!/(v_1-1)! \ldots (v_n-1)!)$$

(fórmula de Moon), con la particularidad de que los grados $v_1, \ldots, v_n$ satisfacen la correlación

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 2(n-1).$$

5.95. Demuéstrese la primera fórmula de Cayley (5.4), la segunda fórmula de Rényi y la fórmula de Clark (problema 5.89), haciendo uso del resultado del problema 5.94.

5.96. Se denominará *altura del vértice* Q de un árbol respecto de cierto vértice fijo P la longitud del único camino que une el vértice Q con el P. La altura del propio vértice P en este caso se considerará igual a cero. La altura del árbol por encima del vértice P se definirá como altura máxima de sus vértices con relación a P. Denotemos por $d_k(n)$ el número de árboles con n vértices marcados $P_1, P_2, \ldots, P_n$, cuya altura por encima del vértice P_1 no sobrepasa de k.

Demuéstrese que

$$d_k(n) = \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p} \sum \frac{(n-1-p)!}{(m_1-1)! \ldots (m_p-1)!}\, d_{k-1}(m_1) \ldots d_{k-1}(m_p),$$

donde $d_0(1) = 1$ y $d_0(m) = 0$, si $m > 1$; la sumación se realiza respecto de los juegos $m_1, \ldots, m_p$ tales que $m_1 + \ldots + m_p = n-1$, $m_i \geqslant 1$.

5.97. Sea

$$D_h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_h(n)}{(n-1)!} z^n, \quad h = 0, 1, \ldots,$$

donde $D_0(z) = z$. Demuéstrese que

$$D_{h+1}(z) = z \exp\{D_h(z)\}, \quad h = 0, 1, \ldots$$

5.98. Muéstrese que para los números $d_h(n)$ (véase el problema 5.96) se verifica

$$d_h(n) = \sum \frac{(n-1)!}{m_1! \ldots m_h!} m_1^{m_1} m_2^{m_2} \ldots m_{h-1}^{m_h}, \quad n = 2, 3, \ldots;$$
$$h = 1, 2, \ldots, n-1;$$

la sumación se realiza respecto de los juegos $m_1, \ldots, m_h$ tales que $m_1 + \ldots + m_h = n - 1$, $m_i \geqslant 0$.

5.99. Sea $\overline{d}_h(n)$ el número de árboles con n vértices marcados, cuya altura por encima del vértice P_1 es igual exactamente a h. Muéstrese que

$$\overline{d}_h(n) = d_h(n) - d_{h-1}(n),$$
$$\overline{d}_h(n) = \sum \frac{(n-1)!}{m_1! \ldots m_h!} m_1^{m_1} \ldots m_{h-1}^{m_h},$$
$$n = 2, 3, \ldots; \quad h = 1, \ldots, n-1;$$

la sumación se realiza respecto de tales juegos $m_1, \ldots, m_h$ que $m_1 + \ldots + m_h = n - 1$, $m_i \geqslant 0$.

5.100. Sea $S_h(n)$ el número de $(0, 0, 0)$-grafos con $n \geqslant 3$ vértices marcados y h aristas que tienen un único ciclo de longitud h $(3 \leqslant h \leqslant n)$ y $n - h$ vértices aislados. Muéstrese que

$$S_h(n) = \frac{1}{2h} \frac{n!}{(n-h)!} = \frac{1}{2h} n(n-1) \ldots (n-h+1).$$

5.101. Designemos por $P_h(n)$ el número de grafos conexos con $n \geqslant 3$ vértices marcados que tienen un único ciclo de longitud h $(3 \leqslant h \leqslant n)$. Muéstrese que

$$P_h(n) = \frac{n!}{2h} \sum \prod_{j=1}^{h} \frac{(n_j + 1)^{n_j - 1}}{(n_j)!},$$

donde la sumación se realiza respecto de tales juegos $n_1, \ldots, n_h$ que $n_1 + \ldots + n_h = n - h$, $n_i \geqslant 0$.

5.102. Introduzcamos una función generatriz

$$P(z, y) = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{h=3}^{\infty} P_h(n) y^h \frac{z^n}{n!}.$$

Demuéstrese que

$$P(z,\ y) = -\frac{1}{2}\left[\ln(1 - y0(z)) + \frac{y0(z)}{1!} + \frac{y^2 0^2(z)}{2!}\right],$$

donde $0(z)$ es la función generatriz de los números de árboles radicales (véase el problema 5.83).

5.103. Demuéstrese la fórmula para los números de grafos conexos con n vértices marcados y un único ciclo de longitud k:

$$P_k(n) = \frac{(n-1)!\, n^{n-k}}{2\,(n-k)!}, \quad n \geqslant k \geqslant 3.$$

§ 3. Planos finitos

Un plano se llama *finito*, si contiene un número finito de puntos y rectas. En un plano proyectivo finito en cada recta yacen $n + 1$ puntos; por cada punto pasan $n + 1$ rectas; n recibe el nombre de *orden* del plano.

Un sistema que se obtiene de un plano proyectivo finito por supresión de una recta y de todos los puntos situados en ésta, lleva el nombre de plano *afín* del mismo orden que el plano proyectivo dado. Un plano afín de orden n tiene n^2 puntos, $n^2 + n$ rectas; en cada recta yacen n puntos y por cada punto pasan $n + 1$ rectas. El plano afín se interpreta por intermedio de un bloque-esquema equilibrado incompleto con los parámetros

$$v = n^2, \quad b = n^2 + n, \quad k = n, \quad r = n + 1, \quad \lambda = 1.$$

Un plano proyectivo lleva el nombre de Desargue, si en él se cumple el

TEOREMA DE DESARGUE. *Si las rectas que unen los correspondientes vértices de dos triángulos se intersecan en un punto, los puntos de intersección de los lados correspondientes yacen en una misma recta.*

Cualquier plano finito de Desargue es isomorfo a un plano de cierto orden n, construido sobre el campo de Galois $GF(n)$, donde $n = p^\alpha$ (p es un número primo y α, un número natural).

Se denomina *curva de segundo orden* (*cónica*) a un conjunto de puntos de un plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

donde mediante x, y, z vienen designadas las coordenadas homogéneas. La regularidad de la cónica se determina por la condición de regularidad de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Una curva de segundo orden se define por cinco elementos: o bien por cinco puntos, o bien por cuatro puntos y una tangente en

uno de los puntos mencionados, o bien por tres puntos y las tangentes en dos de ellos, etc.

Se denominará *arco* de un plano proyectivo a cualquier conjunto de puntos, de los cuales cualesquiera tres no yacen en una misma recta (no colineares tres a tres); un arco, en el que están contenidos k puntos, se llama *k-arco*. Un arco que no puede ser ensanchado se denomina *completo*, y si el citado arco contiene un número máximo posible de puntos para el orden dado n del plano, se denominará *óvalo*.

Una recta que pasa por dos puntos de un arco se llama *secante* de dicho arco; los k-arcos con sus secantes llevan el nombre de polígonos de k lados (vértices) completos.

Si algún punto del plano no yace en ninguno de los secantes del arco dado, entonces este punto puede ser añadido al arco; en este caso se obtiene un arco nuevo que contiene el arco dado, por lo cual este último resulta ser incompleto. Viceversa, si todos los puntos del plano yacen en los secantes del arco dado, tal arco no podrá ser ensanchado.

Una recta que tiene con el arco sólo un punto común, se denomina *tangente*. Una recta que no tiene puntos comunes con el arco, se denomina *recta externa* de este arco.

Un óvalo en el plano de Desargue de orden impar representa una curva de segundo orden, mientras que en el plano de orden par consta de una curva de segundo orden y del núcleo de la misma, es decir, de un punto por el cual pasa toda tangente a la curva.

5.104. Trácese, valiéndose de una regla corta, una recta entre dos puntos alejados.

5.105. Hállese el número de todas las curvas de segundo orden que pasan por un punto prefijado en un plano proyectivo finito de Desargue en orden n.

5.106. Hállese el número de todas las curvas de segundo orden, que pasan por un par prefijado de puntos, en el plano proyectivo finito de Desargue de orden n.

5.107. Hállese el número de todas las curvas de segundo orden, que son tangentes a las dos rectas dadas en dos puntos prefijados, en un plano proyectivo finito de Desargue de orden n.

5.108. En un plano proyectivo finito de orden n se tienen $n^2 + n + 1$ rectas, de las cuales una es *impropia* y las restantes, *ordinarias*. La recta impropia es incidente con relación a los puntos impropios y sólo impropios. Por cuanto en cada recta de este plano yacen $n + 1$ puntos, en el plano hay $n + 1$ puntos impropios.

Una curva se llama *hiperbólica*, si corta la recta impropia, es decir, tiene con la misma dos puntos impropios comunes. Hállese el número de todas las curvas hiperbólicas de segundo orden, que pasan por dos puntos ordinarios dados, en un plano proyectivo finito de Desargue de orden n.

5.109. Una curva se denomina *parabólica*, si entra en contacto con la recta impropia (véase problema 5.108), es decir, tiene con

esta última un punto común. Hállese el número de todas las curvas parabólicas de segundo orden, que pasan por el par dado de puntos ordinarios, en un plano proyectivo finito de Desargue de orden n.

5.110. Una curva se denomina *elíptica*, si no tiene puntos comunes con la recta impropia. Hállese el número de todas las curvas elípticas de segundo orden, que pasan por el par de puntos ordinarios dados, en un plano proyectivo finito de Desargue de orden n.

5.111. Hállese el número de todas las curvas de segundo orden en un plano proyectivo finito de orden n.

5.112. Determínese el número máximo k de puntos del arco de un plano proyectivo finito de orden n.

Indicaciones. Analícense los casos de los planos proyectivos de órdenes par e impar.

5.113. Demuéstrese que en un plano proyectivo de orden impar n por un punto no perteneciente a un óvalo pasan no más de dos tangentes de dicho óvalo; hállese el número de tales puntos (externos), por los cuales pasan dos tangentes al óvalo dado.

5.114. Hállense todos los valores de n tales que en un plano proyectivo de orden n existan los 4-arcos completos.

5.115. Determínese cómo depende de n el número de puntos tanto dispuestos en las secantes del 5-arco, como los que no yacen en él.

5.116. Demuéstrese que en cualquier plano proyectivo no existen 5-arcos completos.

5.117. Demuéstrese que en un plano de orden 4 existe al menos un 6-arco completo (óvalo). Hállese el número de ellos.

5.118. Demuéstrese que el $(n + 1)$-arco en un plano proyectivo de orden par n no puede ser completo.

5.119. Demuéstrese que todas las tangentes del $(n + 1)$-arco en un plano proyectivo de orden par n se intersecan en un punto.

5.120. Dése la explicación combinatoria del problema en el que una secante del óvalo en un plano proyectivo de orden n, se interseca en los puntos dispuestos fuera del óvalo con las secantes restantes.

5.121. Hállese el número K_i de puntos de tipos diferentes, admisibles para el k-arco de un plano proyectivo de orden n, donde $k = 1, 2, 3, 4, 5$, i es el número de secantes del k-arco que pasan por un punto del plano.

5.122. Hállense los números máximo y mínimo de puntos K_i $(i = 0, 1)$ para el 6-arco en un plano proyectivo de orden n, donde i es el número de secantes del 6 arco que pasan por estos puntos.

5.123. Demuéstrese que el n-arco en un plano proyectivo de orden impar n no es completo.

5.124. Hállese el número de puntos de un plano proyectivo de orden n que no están dispuestos en tres lados y tres diagonales de un cuadrilátero (polígono de 4 vértices) completo.

5.125. Demuéstrese que todos los puntos de un plano de orden 3 ó 5 se disponen en los lados y en las diagonales de un cuadrilátero completo.

5.126. Demuéstrese que en un plano proyectivo de orden 4 los puntos diagonales de cualquier cuadrilátero completo son colineares.

5.127. El subplano proyectivo de un plano proyectivo, distinto del último, se denomina *baeriano*, si por cada punto del plano pasa por lo menos una recta del subplano mencionado.

Hállese la relación existente entre el orden n del plano y el orden m de su subplano baeriano.

5.128. Muéstrese que el orden n de un plano y el orden m de su subplano no baeriano están ligados entre sí por la relación $n \geqslant m^2 + m$.

5.129. Muéstrese que un plano de orden 13 tiene un subplano de orden 3, y no tiene subplanos baerianos.

5.130. Demuéstrese que un plano afín finito es equivalente al conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de dos en dos.

5.131. Demuéstrese que la existencia de un plano afín finito es equivalente a la existencia de un plano proyectivo.

5.132. Demuéstrese que no existe un plano afín de orden 6.

5.133. Constrúyase un plano proyectivo finito de orden 2.

5.134. Se denomina *plano de Galois* $P\ (2, q)$, construido sobre el campo de Galois $GF\ (q)$, a un conjunto de elementos de los puntos y de sus subconjuntos determinados, los cuales se definen del modo siguiente: se llama punto a una clase de ternas ordenadas

$$(x,\ y,\ z) \backsim (\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z),$$

donde $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ es una terna fija de elementos de $GF\ (q)$, $\lambda \in GF\ (q)$, $\lambda \neq 0$, y la recta es un subconjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen la condición

$$ux + xy + wz = 0,$$

donde, además, $[u, v, w] \backsim [\mu u,\ \mu v,\ \mu w]$. Demuéstrese que el plano $P\ (2, q)$ forma un plano proyectivo finito.

5.135. Demuéstrese que una recta en el plano de Galois $P\ (2, q)$ puede ser definida también como un conjunto de puntos del tipo

$$(\lambda x_1 + \mu x_2,\ \lambda y_1 + \mu y_2,\ \lambda z_1 + \mu z_2),$$

donde $A \backsim (x_1, y_1, z_1)$ y $B \backsim (x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos de la recta, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, $\lambda, \mu \in GF\ (q)$.

5.136. Demuéstrese que el plano de Galois $P\ (2, q)$ definido en el problema 5.134 tiene un orden igual a q.

5.137. Hállense todos los puntos y las ecuaciones de todos los tipos de rectas del plano $P\ (2, 2)$, tomando por elementos de $GF\ (2)$ los residuos 0, 1 según el módulo 2. Compárense los resultados con el problema 5.133.

5.138. Se denomina *transformación proyectiva* (*colineación*) del plano de Galois $P\ (2, p^h)$ la transformación de sus puntos definida

por el sistema de ecuaciones

$$sx' = a_{11}x^{p^r} + a_{12}y^{p^r} + a_{13}z^{p^r},$$
$$sy' = a_{21}x^{p^r} + a_{22}y^{p^r} + a_{23}z^{p^r},$$
$$sz' = a_{31}x^{p^r} + a_{32}y^{p^r} + a_{33}z^{p^r},$$

donde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad a_{ij},\ s \in GF(p^h), \quad s \neq 0,$$

donde r es un número entero no negativo cualquiera.

a) Compruébese lo correcto de esta definición: conservación de la incidencia del punto y de la recta en esta transformación.

b) Demuéstrese que en el sistema de ecuaciones podemos limitarnos a los valores siguientes: $r = 0, 1, 2, \ldots, h - 1$ (para cualquier $m \geqslant h$ llegamos a uno de los tipos de transformaciones proyectivas que corresponden a estos valores).

5.139. Demuéstrese que el número de diferentes triángulos en el plano $P(2, q)$ es igual a

$$(q^2 + q + 1)(q^2 + q)\, q^2.$$

5.140. Demuéstrese que el número de diferentes cuadriláteros (sistemas de cuatro puntos no conexos) del plano $P(2, q)$ es igual a

$$(q^3 + q + 1)(q^2 + q)\, q^2 (q - 1)^2.$$

5.141. Demuéstrese que el conjunto de todas las colineaciones del plano de Galois de orden $q = p^h$ forma un grupo finito con un orden de

$$h(p^{2h} + p^h + 1)(p^{2h} + p^h)\, p^{2h}(p^h - 1)^2.$$

Si en el plano $P(2, q)$ la colineación α, distinta de la idéntica ε, se repite m veces y $\alpha^m = \varepsilon$, entonces el valor mínimo del número natural k, para el cual tiene lugar tal igualdad, recibe el nombre de *período*.

Teorema de Singer. *En el plano $P(2, q)$ existe por lo menos una colineación cíclica del período $q^2 + q + 1$.*

5.142. Demuéstrese el teorema de Singer para $q = 3$.

5.143. Hállese la ecuación de la colineación en el plano $P(2, 5)$ definida por un par de cuaternas de puntos no conexos

$$(1, 0, 1) \rightarrowtail (0, 0, 1), \quad (0, 1, 0) \rightarrowtail (1, 0, 0),$$
$$(0, 0, 1) \rightarrowtail (0, 1, 0), \quad (1, 1, 1) \rightarrowtail (1, 0, 1).$$

5.144. Constrúyase un plano proyectivo de orden n a partir de un conjunto completo de cuadrados latinos recíprocamente ortogonales de orden n, donde $n = 2$, 3 y 4.

5.145. Un plano proyectivo sobre el campo de residuos según el módulo 2 contiene siete puntos: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1) y siete rectas, con la particularidad de que en cada recta se disponen exactamente tres puntos y por cada punto pasan exactamente tres rectas. ¿Cuántas matrices de todo género de tercer orden pueden formarse a partir de las coordenadas de dichos puntos, si cada fila se compone de las coordenadas de un punto? ¿Cuántas matrices de las mencionadas serán regulares?

5.146. En el plano $P(2, p^h)$, $p \neq 2$, se llamará *curva de segundo orden (cónica)* a un conjunto de puntos del plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz = 0,\ a_{ij} \in GF(p).$$

El carácter regular de la cónica se determina por la condición de regularidad de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Demuéstrese que cualquier cónica regular en $P(2, q)$ contiene exactamente $q + 1$ puntos.

CAPITULO VI

SISTEMAS DE CONJUNTOS

Los problemas de este capítulo están seleccionados y agrupados de tal manera que en el transcurso de su resolución se explique sucesivamente el contenido de algunas cuestiones del análisis combinatorio y se adquieran los hábitos correspondientes.

§ 1. Problemas extremales en los grafos e hipergrafos

En la preparación de este párrafo prestaron gran ayuda O. Borodín, D. Katona, A. Kóstochka, L. Mélnikov y A. Sidorenko. Su cooperación incluía tanto observaciones valiosas, como material concreto: hay problemas que fueron enunciados y resueltos especialmente para este párrafo; tales son, por ejemplo, los resultados obtenidos por Katona, Kóstochka y Sidorenko. A la exposición de algunos resultados cardinales, como son, por ejemplo, el teorema de Erdös — Ko-Rado y el teorema de Kruskal — Katona, contribuyó la preparación de textos para la demostración de éstos, realizada por D. Katona. Hay también problemas que por ahora no tienen resolución completa (estos últimos están marcados por el signo?).

Sea $S_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto no ordenado de vértices de n elementos y sea $C^l(S_n) = \{S \subset S_n: |S| = l\}$ el conjunto de l-subconjuntos del conjunto S_n, de suerte que $|C^l(S_n)| = C_n^l = \binom{n}{l}$, $C(S) = C|S|(S)$; $\mathcal{P}(S_n) = \sum_{i=0}^{n} xC^i(S_n)$, $|\mathcal{P}(S_n)| = 2^n$. Se denomina *hipergrafo* en el conjunto de vértices S todo subconjunto G del conjunto $\mathcal{P}(S)$. Los elementos del conjunto G representan los subconjuntos $e \subseteq S$ y llevan el nombre de *hiperaristas*, así que todo hipergrafo G es cierto conjunto $\{e_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, de $m = |G|$ hiperaristas $e_i \subset S$ sobre los vértices de S; un l-grafo es $G^l \subset C^l(S)$, y un grafo ordinario es el 2-grafo; sus elementos son simplemente las aristas.

A veces resulta cómodo no indicar los conjuntos de vértice; así,

por ejemplo, un hipergrafo F puede ser definido mediante sus hiperaristas $\{A_1, \ldots, A_m\}$, cuya numeración, hablando en general, es de poca importancia.

6.1. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo de n vértices sin triángulos?

6.2. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener un hipergrafo de n vértices sin hiperaristas encajadas una en otra?

6.3. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener un hipergrafo de n vértices en el que cualesquiera dos hiperaristas tienen una intersección no vacía?

6.4. ¿Cuál es el número mínimo de vértices que puede tener un k-grafo de m aristas?

6.5. Si un k-grafo $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ y un l-grafo $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ son tales que $A_i \cap B_j = \varnothing \Longleftrightarrow i = j$, entonces ¿cuán grande puede ser m?

6.6. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener un hipergrafo de n vértices, en el cual cualesquiera dos hiperaristas tienen una intersección no vacía y cualesquiera tres, una intersección vacía?

Se denomina *grado de un vértice* el número de aristas que lo contienen. Las aristas se llaman *independientes*, si no son adyacentes, es decir, no tienen vértices comunes. Un sistema de aristas independientes recibe el nombre de *combinación de pares*.

6.7. ¿Cuál es el número mínimo de colores que pueden aplicarse para colorar las aristas de un grafo (cada arista en un solo color) de tal modo que en cada vértice converjan las aristas de diferentes colores?

6.8. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo de n vértices, en el que el grado de cualesquiera de ellos no sobrepasa de d?

6.9. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo de n vértices, el cual posee no más de t aristas independientes?

6.10. ¿Cuán grande es el número máximo de aristas que puede tener un grafo, en el cual el grado de cada vértice no sobrepasa de d y el cual tiene no más de t aristas independientes?

6.11. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo de n vértices, en el cual el grado de cada vértice no sobrepasa de y y el cual tiene no más de t aristas independientes?

6.12. ¿Cuán grande es el número de k-aristas que puede tener un k-grafo de n vértices, el cual posee t k-aristas independientes?

Para $X \cap S = \varnothing$ la notación $C^k(X)\, C^l(S)$ significa un $(k+l)$-grafo sobre el conjunto de vértices $X + S$ de la forma $\{e \subset X + S\colon |e \cap X| = k,\ |e \cap S = l\}$. Sea $\mathcal{F}_k$ un grafo de k vértices con $[k/2]$ aristas independientes, y sea $\mathcal{F}_k^*$ un grafo de k vértices con $[k/2]$ aristas independientes en la medida posible. Como siempre,

$$K_n + C^2(S_n), \quad K_{n,m} = C^1(S_n)\, C^1(S_m), \quad S_n \cap S_m = \varnothing.$$

6.13. ¿Cuál es el número mínimo de aristas $m = m(n; H_k)$ que puede tener un grafo $G_n \subset C^2(S_n)$ tal que sea

$$\forall S_k \subset S_n \quad (G_n \cap C^2(S_k)) \supset H_k,$$

donde $H_k \subset C^2(S_k)$ es un grafo de k vértices prefijado de antemano? Examínese este problema para los siguientes grafos H_k:

1) H_k es un grafo de k vértices con una arista: $|H_k| = 1$;
2) $H_k = C^2(S_q)\, C^0(S_k \setminus S_q)$, $S_q \subset S_k$;
3) $H_k = C^1(a)\, C^1(S_k \setminus a) = K_{1,k-1}$, $a \in S_k$ es una estrella;
4) H_k una «rueda», es decir, una estrella $C^1(a)\, C^1(S_k \setminus a)$ y un $(k-1)$-ciclo $C_{k-1} = C_{k-1}(S_k \setminus a)$ sobre los vértices $(S_k \setminus a)$;
5) H_k es un grafo de k vértices arbitrariamente prefijado que tiene un vértice de grado $k-1$;
6) $H_k = C_k$ es un ciclo simple sobre k vértices;
7) $H_k = P_k$ es un simple camino en k vértices;
8) $H_k = \mathcal{F}_k^*$ es un grafo de k vértices con $]k/2[$ aristas independientes en la medida posible;
9) $H_k = \overline{C_k} = K_k - C_k$ es un grafo completo sin k-ciclo;
10) $H_k = \overline{P_k} = K_k - P_k$ es un grafo completo sin k-camino;
11) $H_k = \overline{\mathcal{F}_k^*} = K_k - \mathcal{F}_k^*$;
12) $H_k = C^2(S_l) + C^2(S_k \setminus S_l)$, $S_l \subset S_k$, $k \geqslant 3l + 1 \geqslant 7$;
13) $H_k = \underbrace{d+1, \ldots, d+1}_{2t/d}$ $2 \leqslant d < 2t$, $d \equiv 0 \pmod 2$, $d \mid 2t$, $k = 2t + 2t/d$;
14) (?) H_k se compone de t aristas independientes y $k - 2t$ vértices aislados $(2t \leqslant k)$;
15) (?) H_k se compone de un grafo H_q de q vértices y $(p - q)$ vértices aislados $(k = p)$.

6.14. ¿Cuál es el número mínimo de aristas que puede tener un grafo $G_n \subset C^2(S_n)$, si

$$\forall S_k \subset S_n \; \exists a \in S_n \setminus S_k : C^1(a)\, C^1(S_k) \subset G_n?$$

6.15. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo plano de n vértices, es decir, un grafo que puede ser expresado en el plano sin que haya autointersecciones?

6.16. ¿Cuán grande es el número máximo de aristas que puede tener un grafo de n vértices, en el cual todo subgrafo engendrado de k vértices es plano?

6.17. HIPÓTESIS DE DIRAC. Si un grafo de n vértices tiene $3n - 5$ aristas, él tiene un subgrafo que es homeomorfo a K_5.

6.18. Problema de los subgrafos prohibidos. ¿Cuán grande puede ser el número $f = f(n; G^{(1)}, \ldots, G^{(2)}, \ldots)$ de aristas de un grafo

de n vértices que no contiene en calidad de subgrafos, los grafos $G^{(1)}, \ldots, G^{(2)}, \ldots = \{G^{(i)}\}$?

1) **Teorema de Erdös — Shimanóvich**

$$f(n; \{G^{(i)}\}) = \left(1 + \frac{1}{1 - \min \chi(G^{(i)})}\right)\binom{n}{2} + o(n^2).$$

2) Si el número de subgrafos prohibidos es finito, entonces la igualdad $f(n; \{G^{(i)}\}) = O(n)$ se verifica cuando y sólo cuando entre los subgrafos prohibidos $\{G^{(i)}\}$ se tiene o bien un árbol o bien un bosque.

3) La igualdad $f(n; \{G^{(i)}\}) = O(1)$ se verifica cuando y sólo cuando entre los subgrafos prohibidos $\{G^{(i)}\}$ se tienen una combinación de pares y una estrella.

4) $\{G^{(i)}\} = K_{1,k-1}$.

5) $\{G^{(i)}\} = \mathcal{F}_k$.

6) $\{G^{(i)}\} = P_k$.

7) **Hipótesis de Erdös-Sos.** Para todo árbol de k vértices T_k se verifica la desigualdad

$$f(n; T_k) \leqslant (k-2)\, n/2.$$

8) $\{G^{(i)}\} = C_n$.

9) $\{G^{(i)}\} = C_k$.

10) $\{G^{(i)}\} = \{C_3, C_4, \ldots\}$ es un conjunto de todos los ciclos.

11) $\{G^{(i)}\} = \{C_3, C_5, \ldots\}$ es un conjunto de todos los ciclos no pares.

12) $\{G^{(i)}\} = \{C_4, C_6, \ldots\}$ es un conjunto de todos los ciclos pares.

13) $\{G^{(i)}\} = \{C_l, C_{l+1}, \ldots\}$ es un conjunto de todos los ciclos "largos".

14) $\{G^{(i)}\} = \{C_3, \ldots, C_l\}$ es un conjunto de todos los ciclos "cortos".

Un hipergrafo G^T se llama *dual* con relación al hipergrafo G, si la matriz de incidencia de G^T es matriz de incidencia transpuesta de G. La *cadena* es una sucesión de conjuntos encajados uno en el otro; la *longitud de una cadena* es el número de términos en tal sucesión. La *anticadena* es un sistema de conjuntos no encajados recíprocamente uno en el otro.

6.19. ¿Cuál es el número mínimo de hiperaristas que puede tener un hipergrafo $G(S_n)$ en el cual

$$\forall a_1, a_2 \in S_n \; \exists\, e_1, e_2 \in G(S_n): a_i \in e_i, a_i \notin e_j,$$
$$i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad i \neq j?$$

6.20. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener un hipergrafo de n vértices sin cadenas de longitud $k+1$?

6.21. Si $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_h$ son anticadenas disjuntas de $\mathcal{P}(S_n)$, entonces ¿cómo puede ser de grande el número $\sum_{i=1}^{h} |\mathcal{A}_i|$?

6.22. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\neg\exists A_i, A_j \in F: A_i \subset A_j, |A_j - A_i| \geqslant h?$$

6.23. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\neg\exists A_i, A_j \in F: A_i \subset A_j, |A_j - A_i| = 1?$$

6.24. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\neg\exists A_i, A_j \in F: A_i \subset A_j, |A_j - A_i| < h \qquad (i \neq j)?$$

6.25. (?) ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\neg\exists A_i, A_j \in F: A_i \subset A_j, |A_j - A_i| = h?$$

6.26. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\neg\exists A_i, A_j \in F: |A_i \Delta A_j| \leqslant h?$$

6.27. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\forall A_1, \ldots, A_t \in F: \left|\bigcap_{i=1}^{t} A_i\right| \geqslant r?$$

Analícense los siguientes casos:

a) $r = 1$, t es arbitrario;

b) $t = 2$, r es arbitrario;

c) $t = 3$, $r = 2$.

6.28. SUPOSICIÓN DE ERDOS – FRANKL. La construcción extremal para el problema 6.27 tiene la siguiente forma. Sea $S_n = S_{r+th} + S_{n-r-th}$, $S_{r+th} \cap S_{n-r-th} = \emptyset$. Pongamos

$$\mathcal{A}(n, t, r, h) = \sum_{i=r+(t-1)h}^{r+th} C^i(S_{r+th})\,\mathcal{P}(S_{n-r-th})$$

y escojamos h tal que maximice $|\mathcal{A}(n, t, r, h)|$.

6.29. ¿Cuál es el número máximo de k-aristas que puede tener $G_n^k \subset C^k(S_n)$, si $\forall e_1, e_2 \in G_n^k$, $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$? ¿Cómo variará la respuesta, si suponemos la ausencia de los vértices pertenecientes a todas las aristas?

6.30. ¿Cuál es el número máximo de k-aristas que puede tener $G_n^k \subset C^k(S_n)$, si $\forall e_1, \ldots, e_t \in G_n^k \bigcap_{i=1}^{t} e_i \neq \emptyset$?

6.31. ¿Cuál es el número máximo de k-aristas que puede tener $G_n^h \subset C^h(S_n)$, si $\forall e_1,\ e_2 \in G_n^h \mid e_1 \cap e_2 \mid \geqslant l$? Muéstrese que para n pequeños este número puede ser superior a $\binom{n-l}{k-l}$.

Se llama *sombra* (l-*sombra*) del k-grafo $F \subset C^k(S)$ al l-grafo $C_l(F) = \bigcup_{S_k \in F} C^l(S_k)$.

6.32. Demuéstrese que para cualesquiera m, k naturales existen y son únicos tales t naturales, $a_k > a_{k-1} > \ldots > a_t \geqslant t$, para los cuales se verifica la llamada representación binomial canónica

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{a_t}{t}.$$

6.33. Demuéstrese que si un k-grafo $F \subset C^k(S_n)$ es anticadena, entonces

$$\mid C_{k-1}(F) \mid \geqslant k \mid F \mid /(n-k+1).$$

6.34. Sea

$$f_k(0) = 0, \quad f_k(m) = \binom{a_k}{k-1} + \ldots + \binom{a_t}{t-1},$$

donde t, a_k, ..., a_t son componentes de la representación binomial canónica m. Constrúyase un k-grafo con m aristas tal que se verifique $\mid C_{k-1}(F) \mid = f_k(m)$.

6.35. Demuéstrese la desigualdad

$$f_k(m_1 + m_2) \leqslant \text{máx}\ \{f_k(m_1), m_2\} + f_{k-1}(m_2).$$

6.36. ¿Cuán pequeña será la potencia de la sombra $C_{k-1}(F)$ que puede tener un k-grafo F de m aristas? ¿Cómo variará la respuesta, si minimizamos la l-sombra?

6.37. Demuéstrese la desigualdad $f_k(m_1 + m_2) \leqslant f_k(m_1) + f_k(m_2)$.

6.38. ¿Cuán grande puede ser el número m, con el cual para todo k-grafo de m aristas $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ existe un $(k-1)$-grafo de m aristas $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$, para el cual $B_i \subset A_i$, $B_i \neq B_j$, $i \neq j$? ¿Cómo variará la respuesta, si $\mathcal{B}$ es un l-grafo?

6.39. ¿Cuán grande puede ser el número de pares de hiperaristas en $F = \{A_1, \ldots, A_m\} \subset \mathcal{P}(S_n)$, para las cuales $\mid A_i \Delta A_j \mid = 1$?

6.40. ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes de existencia de las anticadenas $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ con parámetros fijos $p_i = \mid F \cap C^i(S_n) \mid$, $i = 0, 1, \ldots, n$?

6.41. HIPÓTESIS (B. S. Stechkin, P. Frankl). Si un k-grafo $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ y un l-grafo $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ son tales que $\mid A_i \cap B_i \mid \leqslant \lambda \Leftrightarrow i = j$, entonces m máximo es igual a $\binom{k+l-2\lambda}{l-\lambda}$.

6.42. Si los hipergrafos $\mathcal{A}=\{A_1, \ldots, A_m\}$, $\mathcal{B}=\{B_1, \ldots, B_m\}$ son tales que $A_i \cap B_j = \varnothing$, $i=j$, entonces

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}^{-1} \leqslant 1.$$

6.43. ¿Cómo variará la respuesta del problema 6.41, si la condición $|A_i \cap B_j| \leqslant \lambda \Leftrightarrow i=j$ la sustituimos por la condición $|A_i \cap B_i| = \lambda$, $|A_i \cap B_j| > \lambda \Leftrightarrow i \neq j$, o bien por la condición $A_i \cap B_i = \varnothing$, $|A_i \cap B_j| > \lambda$, $i \neq j$?

6.44. Si un k-grafo $\mathcal{A} \subset C^k(S_n)$ y un l-grafo $\mathcal{B} \subset C^l(S_n)$ son tales que $A_i \cap B_j \neq \varnothing$, $k+l \leqslant n$, entonces o $|\mathcal{A}| \leqslant \binom{n-1}{k-1}$, o bien $|\mathcal{B}| \leqslant \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1-k}{l-1}$.

6.45. Si los hipergrafos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son tales que $A \in \mathcal{A}$, $C \subset A \Rightarrow C \in \mathcal{A}$; $B \in \mathcal{B}$, $D \supset B \Rightarrow D \in \mathcal{B}$, resulta válida la desigualdad $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \leqslant |\mathcal{A}|\,|\mathcal{B}|\,2^{-n}$.

6.46. PROBLEMA DE TURÁN. ¿Cuál es el número mínimo de l-aristas $T(n, k, l)$ que puede tener un l-grafo $G_n^l \subset G^l(S_n)$, si $\forall S_k \subset S_n\ \exists\ S_l \in G_n^l$: $S_l \subset S_k$?

Analícense los casos:

a) $l=2$ (véase el problema 6.7, *a*));

b) $T(n, k, l) = n-k+1 \Leftrightarrow n \leqslant (k-1)\,l/(l-1)$;

c) $k=n-1$.

Al problema de Turán es similar el

Problema de empaques. ¿Cuál es el número máximo de l-aristas que puede tener un l-grafo de n vértices, en el cual entre cualesquiera k vértices hay no más de una l-arista?

6.47. Supongamos que un l-grafo G_n^l posee dos propiedades:

$$\forall S_k \subset S_n \quad \exists S_l \in G_n^l\colon\ S_l \subset S_k; \tag{T}$$

$$\forall e_1\ e_2 \in G_n^l \quad |e_1 \cap e_2| \geqslant r. \tag{D}$$

¿Cuál es el número mínimo de aristas que puede tener G_n^l? ¿Cuál es el número máximo de vértices que puede tener G_n^l?

6.48. ¿Cuál es el número mínimo de k-aristas que puede tener $G_n^k \subset C^k(S_n)$, si

$$\forall S_p \subset S_n \quad \exists S_q \subset S_p : C^k(S_q) \subset G_n^k?$$

6.49. Muéstrese que si $p \leqslant 2(q-1)$, entonces el grafo $G_n^2 \subset C^2(S_n)$ posee la propiedad

$$\forall S_p \subset S_{n-p+q} \quad \exists S_q \subset S_p : C^2(S_q) \subset G_n^2,$$

si y sólo si

$$S_{n-p+q} \subset S_n : C^2(S_{n-p+q}) \subset G_n^2.$$

6.50. PROBLEMA DE ERDÖS–KATONA. ¿Cuál es la cantidad máxima de hiperaristas que puede tener $G_i \subset \mathcal{P}(S_n)$, si todos los números $\{ \mid e_i \cap e_j \mid \}$, $e_i, e_j \in G, i \neq j$, son diferentes?

6.51. ¿Cuál es el número máximo de l-aristas que puede tener $G_n^l \subset C^l(S_n)$, si todos los números $\{ \mid e_i \cap e_j \mid \}$, $e_i, e_j \in G_n^l$, $i \neq j$, son diferentes?

6.52. ¿Qué cantidad máxima de k-aristas puede tener $G_n^k \subset C^k(S_n)$, si $\forall e_i, e_j \in G_n^k \mid e_i \cap e_i \mid = 1$?

Un sistema de subconjuntos $F = \{e_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, del conjunto, S_n se llama *determinante* (o de reconstrucción) *en* S_n, si todo subconjunto se restablece unívocamente según un sistema no ordenado de números $\{ \mid T \cap e_i \mid \}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

6.53. ¿Cuán pequeño por su potencia puede ser un sistema determinante de conjuntos en S_n?

6.54. Demuéstrese la unicidad del sistema de conjuntos mínimo, determinato en S_n.

6.55. Constrúyase un ejemplo de hipergrafo de n vértices con n hiperaristas, en el cual todos los grados son los números 1, 2, . . ., n y el cual es distinto de cero.

La *valencia* del conjunto de vértices S, de q entero y del hipergrafo G es el número $v(S, q; G) = \mid \{e \in G: \mid e \cap S \mid = q\} \mid$, de suerte que si a es un vértice de G, entonces $v(a, 1; G) = \deg_G(a)$ es el grado más corriente de dicho vértice en G.

6.56. Muéstrese que

$$\forall G \subset C^2(S) \sum_{a \in S} \deg_G(a) = 2 \mid G \mid.$$

6.57. Demuéstrense las siguientes identidades de valencia:
a) Si G y F son dos hipergrafos, entonces

$$\sum_{s \in F} v(S, q; G) = \sum_{e \in G} v(e, q; F).$$

b) Si $G \subset \mathcal{P}(S_n)$ entonces

$$\sum_{S_p \subset S_n} v(S_p, q; G) = \sum_{i \geqslant q} \binom{i}{q} \binom{n-i}{p-q} v(S_n, i; G).$$

c) Si $G^l \subset C^l(S_n)$, entonces

$$\sum_{S_p \subset S_n} v(S_p, q; G^l) = \binom{l}{q} \binom{n-l}{p-q} \mid G^l \mid,$$

$$\sum_{S_r \subset S_p \subset S_n} v(S_p, q; G^l) = \sum_{i \leqslant q} \binom{l-i}{q-i} \binom{n-r-l+i}{p-r-q+i} v(S_r, i; G^l).$$

d) Si G es un hipergrafo, entonces

$$\sum_{a\in S}\deg_G(a)=\sum_{e\in G}|\,e\cap S\,|,$$

$$\sum_{S_p\subset S}v(S_p,\,q;\,G)=\sum_{e\in G}\binom{|\,e\cap S\,|}{q}\binom{|\,S\,|-|\,e\cap S\,|}{p-q},$$

$$\sum_{a\in S}\binom{\deg_G(a)}{k}=\sum_{\substack{e_{i_1},\ldots,e_{i_h}\in G\\ 1\leqslant i_1<\ldots<i_h\leqslant|G|}}\left|S\bigcap_{j=1}^{h}e_{i_j}\right|,$$

$$\sum_{S_p\subset S}\binom{v(S_p,\,p;\,G)}{k}=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_h\leqslant|G|}\binom{\left|S\bigcap_{j=1}^{h}e_{i_j}\right|}{p}.$$

6.58. Haciendo uso de las valencias, demuéstrense las identidades

$$\sum_{j_1\leqslant q}\sum_{j_2\geqslant q}\binom{l_2-j_1}{q-j_1}\binom{r_2-r_1-j_2+j_1}{p-r_1-q+j_1}\binom{r_1}{j_1}\binom{r_2-r_1}{j_2-j_1}\binom{n-r_2}{l-j_2}=$$

$$=\binom{p}{q}\binom{n-p}{l-q}\binom{r_2-r_1}{p-r_1},$$

$$\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\binom{q+i-r_1}{q-r_1}\binom{r_2-r_1}{q+i-r_1}\binom{n-q-i}{l-q-i}=\binom{n-r_2}{l-q}\binom{r_2-r_1}{q-r_1}.$$

6.59. Hállese la esperanza matemática $M\,(v\,(S_p,\,q;\,G_n))$ bajo el supuesto de que los subconjuntos S_p de S_n se eligen casualmente con probabilidades iguales.

6.60. ¿Cuál es el número mínimo de k-aristas que puede tener $G_n^k\subset C^k(S_n)$, si $S_n=S_p+S_{n-p}$ y

$$\forall S_q\subset S_p\quad\exists S_r\subset S_{n-p}\colon\ C^{h-l}(S_q)\,C^l(S_r)\subset G_n^h?$$

6.61. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una propiedad arbitraria de los hipergrafos y que $m\,(n,\,l;\,\mathcal{A})=\max\limits_{G_n^l\sim A}|\,G_n^l\,|$. Demuéstrese que si $\mathcal{A}$ es de tal género que

$$G^l(S_n)\sim\mathcal{A}\Rightarrow\forall S_{n-1}\subset S_n,$$
$$(G^l(S_n)\cap C^l(S_{n-1}))\sim\mathcal{A}\qquad(6.1)$$

y si existe una función de valores numéricos enteros $f\,(n)$ tal que

$$f(n_0)=m\,(n_0,\,l;\,\mathcal{A}),\quad n_0\geqslant l,\qquad(6.2)$$
$$0\leqslant f(n)\leqslant m\,(n,\,l;\,\mathcal{A}),\quad n>n_0,\qquad(6.3)$$
$$\frac{f(n-1)}{1+f(n)}\leqslant\frac{n-l}{n},\quad n>n_0,\qquad(6.4)$$

entonces para todo $n\geqslant n_0$ necesariamente se verifica $m\,(n,\,l;\,\mathcal{A})=f\,(n)$.

6.62. Si el hipergrafo F y el sistema de hipergrafos $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots\}$ son tales que $\forall G \in \mathcal{G}$, $|G \cap F| \leqslant 1$, entonces

$$\sum \frac{\deg_G(S)}{|\mathcal{G}|} \leqslant 1, \text{ donde } \deg_{\mathcal{G}}(S) = |\{G \in \mathcal{G}: G \ni S\}|.$$

6.63. Sea $f(n)$ una función fija de valores reales; calcúlese $\max \sum_{A \in \mathcal{A}} f(|A|)$, donde el máximo se toma respecto de todas las anticadenas $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S_n)$.

6.64. ¿Qué cantidad máxima de hiperaristas puede tener un hipergrafo $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\forall A \in F, \quad |A| \leqslant n/2, \quad \forall A_1, A_2 \in F, \quad A_1 \cap A_2 \neq \varnothing, \quad A_1 \not\subset A_2?$$

6.65. Si un hipegrafo $F = \{A_1, \ldots, A_m\}$ es el mismo que figura en el problema 6.64, entonces

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{n-1}{|A_i|-1}^{-1} \leqslant 1.$$

6.66. ¿Cuál es el número máximo de l-aristas que puede tener un l-grafo de n vértices $F = \{A_1, \ldots, A_m\} \subset C^l(S_n)$, si

$$\forall A_i, A_j, A_k \in F, \quad A_k \not\supset A_i \Delta A_j,$$
$$i \neq j \neq k \neq i?$$

6.67. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\forall A_1, A_2 \in F \quad A_1 \not\subset A_2, \quad A_1 \cap A_2 \neq \varnothing,$$
$$A_1 \cup A_2 \neq S_n?$$

6.68. ¿Qué cantidad máxima de hiperaristas puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\forall A_1, A_2 \in F \quad A_1 \cap A_2 \neq \varnothing, \quad A_1 \cup A_2 \neq S_n?$$

6.69. ¿Cuál es el número máximo de l-aristas que puede tener un l-grafo crítico máximo de Turán, es decir, el l-grafo $C_n^l \subset C^l(S_n)$ que posee las dos propiedades siguientes:

$$\forall S_h \subset S_n \quad \exists S_l \in G_n^l : S_l \subset S_h; \qquad (T)$$
$$\forall S_l \in G_n^l \quad (G_n^l - C(S_l) \not\to T. \qquad (K)$$

6.70. ¿Cuán pequeño es el número de aristas comunes que pueden tener dos grafos de n vértices de Turán $G_i \subset C^2(S_n)$, $i = 1, 2$, tales que

$$\forall S_3 \subset S_n \quad \exists S_2 \in G_i : S_2 \subset S_3, \; i = 1, 2?$$

6.71. Sea $n \equiv o(k)$. Demuéstrese que $C^k(S_n)$ puede ser representado en forma de una suma $C^k(S_n) = \sum G_i$, donde $G_i \cap G_j = \varnothing$, y cada G_i representa un k-grafo de n/k k-aristas independientes sobre los vértices de S_n.

6.72. ¿Es cierto que si un grafo G_n^2 tiene más de $k(n-k)+\binom{k}{2}$ aristas, se encontrará en él un subgrafo en el cual el grado de cada vértice será superior a k?

6.73. HIPÓTESIS DE BERGE. En todo grafo, cuyos grados de los vértices son todos iguales a cuatro, se encontrará un subgrafo, en el cual todos los grados de los vértices son iguales a tres.

§ 2. Problemas extremales sobre la partición de los números

Demos a conocer, ante todo, algunas situaciones prácticas relacionadas con los problemas extremales y la partición de números.

6.74. ¿Cuál es la cantidad mínima de pesas que se necesitan para poder pesar cualquier número entero de libras desde 1 hasta n?

6.75. ¿Cuál es el número mínimo de billetes de 1, 3, 5, 10 y 25 rublos que se necesitan para saldar las cuentas con una lechera, verdulera, lavandera y un carnicero, si en total hay que pagarles a todos 37 rublos? ¿Y si en este caso se conoce que las mujeres van a pedir un precio máximo de 3, 5 y 5 rublos, respectivamente?

6.76. En cierto lugar se inaugura un bar con un mostrador largo. Se sabe que los habitantes visitan el bar en familias (k_i personas en la i-ésima familia), y hay en total t familias. Cada familia se sienta al mostrador ocupando lugares seguidos sin que se queden por ambos lados de ella lugares desocupados. Habiendo permanecido sentada cierto tiempo, una de las familias se va, pero puede volver de nuevo cuando lo desee. ¿Qué capacidad debe tener el mostrador para que se garantice la ausencia de colas?

Si el bar tiene además un administrador que acomoda los visitantes en los asientos a su modo (sin separar las familias), entonces ¿qué parte del mostrador podrá economizar?

6.77. Veamos un esquema de alojamiento de n partículas indistinguibles en r células indistinguibles. ¿Podrán realizarse todos los resultados de este esquema alojando un número inferior a n de cualesquiera objetos?

6.78. Durante el funcionamiento de los sistemas de cómputo se observa un fenómeno de fragmentación de la memoria del ordenador, es decir, una situación en que toda la memoria está partida en pedazos (fragmentos) ocupados y libres; al mismo tiempo se necesita colocar la siguiente porción informativa en dichos fragmentos, con la particularidad de que la mencionada información puede ser dividida en una cantidad de bloques, no mayor que la determinada, de definido volumen (por ejemplo, por razón de una sola dirección de las tablas o ficheros). Resulta natural la cuestión sobre la determinación de la posibilidad de alojar la información requerida en el sistema de fragmentos dado, es decir, ¿si es alojable el sistema dado de interrogaciones dentro del sistema de fragmentos dado?

La **partición de n natural** se reduce a su representación en forma de una suma no ordenada de sumandos naturales: $n = n_1 + \ldots + n_r$; estos sumandos n_i llevan el nombre de partes de la partición y su número r, de rango de la partición. El concepto de partición de un número surgió por primera vez en la correspondencia entre J. Bernoulli y G. Leibniz. Las particiones se escriben comúnmente en la forma vectorial: $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant t} = (x_1, \ldots, x_t) \mid - n$, es decir, $n = \sum_{i=1}^{t} x_i$; la notación $(n_1^a, \ldots, n_r^a) \mid - n$ denota una partición de n, en la cual la parte n_i interviene exactamente a_i veces, de modo que $\sum_{i=1}^{r} a_i n_i = n$, y el rango de esta partición es igual a $\sum_{i=1}^{r} a_i$. Para los números naturales que se designan por letras minúsculas, la notación $[r]$ significará un conjunto de los primeros r números naturales, es decir, $[r] = \{1, 2, \ldots, r\}$.

La composición es una representación de un número natural n por la suma ordenada de sumandos naturales. Así, pues, las composiciones pueden considerarse como "*particiones ordenadas*".

6.79. Escríbanse todas las particiones y composiciones del número 6.

6.80. Cerciórese de que el número de composiciones de un número natural n de rango r es igual a C_{n-1}^{r-1}, y el número total de composiciones del número n es igual a 2^{n-1}.

Los problemas de particiones son mucho más complejos que las cuestiones correspondientes referentes a las composiciones. Así, por ejemplo, incluso el cálculo de $p(n, r)$, esto es, del número de todas las particiones de n de rango r, es decir, el cálculo del número de soluciones de la ecuación $n = x_1 + \ldots + x_r$, $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_r$ en x_i naturales constituye uno de los aspectos fundamentales de la teoría enumerativa de particiones, la cual se da a conocer en los manuales clásicos de Mac-Mahon y Andrews. El problema extremal sobre las particiones se enuncia por lo general, en forma de pregunta: ¿son muchas o pocas las particiones existentes que se encuentran en la correspondencia dada? La elección de una correspondencia concreta entre las particiones se determina por las condiciones del problema práctico, precisamente de aquel, para el cual las particiones con la citada correspondencia sirven de esquema combinatorio.

Uno de los resultados extremales teórico-numéricos más tempranos pertenece, al parecer, a Sylvester, cuyo teorema afirma: sean $r_1, \ldots, r_t$ unos números naturales recíprocamente primos y sea $s(r_1, \ldots, r)$ un número entero máximo s que no puede ser representado en la forma $s = \sum_{i=1}^{t} a_i r_i$, donde $a_i \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Entonces $s(r_1, r_2) = r_1 r_2 - r_1 - r_2$.

Cuando $t \geqslant 3$, el problema de cálculo de los valores exactos de $s(r_1, \ldots, r_t)$ queda hasta ahora abierto y lleva el nombre del problema de Frobenius.

En términos de las particiones puede enunciarse también el principio ampliamente conocido de Dirichlet.

Principio de Dirichlet. Si $n(k, r)$ es n entero mínimo, para el

cual en cada partición de este n en r partes existe una que no es inferior a k, entonces $n(k, r) = rk - r + 1$.

Este principio se enuncia con frecuencia en términos de alojamientos y se conoce como **principio de los cajones**. Cualquiera que sea el alojamiento de $(r + 1)$ objetos en r cajones, existe un cajón que contiene al menos dos objetos.

6.81. Definamos entre las particiones la correspondencia $\geqslant$, rigiéndonos por la regla: la partición $(n_1, \ldots, n_r)$ se encuentra en correspondencia $\geqslant$ respecto de la partición $(k_1, \ldots, k_r)$, si existe un i: $1 \leqslant i \leqslant r$, para el cual $k_i \leqslant n_i$, es decir, si en la segunda partición existe una parte que no sobrepasa la parte correspondiente de la primera partición. Entonces surge la pregunta ¿cuál es, para la partición dada $(k_1, \ldots, k_r)$, el $n = n(k_1, \ldots, k_r)$ mínimo, con el cual para cada partición de este n en r partes se cumplirá la correspondencia $(n_1, \ldots, n_r) \geqslant (k_1, \ldots, k_r)$? No es difícil comprobar que el $n(k_1, \ldots, k_r)$ mínimo que se busca existe y se calcula por la fórmula $n(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{i=1}^{r} k_i - r + 1$.

Puede calcularse también la característica inversa: calcular para una partición dada $(n_1, \ldots, n_r)$ el $k = k(n_1, \ldots, n_r)$ máximo, cada partición del cual en r partes poseerá la propiedad de que $(n_1, \ldots, n_r) \geqslant (k_1, \ldots, k_r)$. Dicha característica se determina según la fórmula $k(n_1, \ldots, n_r) = \sum_{i=1}^{r} n_i + r - 1$.

6.82. Si n_a es el n mínimo, para el cual existen, cualquiera que sea la coloración en dos colores (2-coloración) de las aristas de un grafo completo K_n sobre n vértices, dos triángulos monocromáticos, quizás de diferentes colores, pero sin aristas comúnes, entonces $n_a = 7$.

6.83. Si n_b es el n mínimo, para el cual existen, cualquiera que sea la 2-coloración de las aristas de K_n, dos triángulos monocromáticos de un mismo color y sin aristas comúnes, entonces $n_a = 8$.

La correspondencia principal entre las particiones de los números en la que nos detendremos aquí, será su capacidad de encajarse: una partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en la partición $(n_1, \ldots, n_r)$, si existe una aplicación $\varphi : \{1, \ldots, t\} \to \{1, \ldots, r\}$ en la cual se cumple el sistema de desigualdades

$$\sum_{j \in \varphi^{-1}(i)} k_j \leqslant n_i \quad i = 1, \ldots, r,$$

donde $\varphi^{-1}(i) = \{j: j \in \{1, \ldots, t\}, \varphi(j) = i\}$ es la preimagen completa del elemento i en la aplicación φ.

Dicho de otro modo, la partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en la partición $(n_1, \ldots, n_r)$, si las partes k_i de la partición $(k_1, \ldots, k_t)$ pueden ser agrupadas en r grupos (cada parte k_i integra un solo grupo y los grupos vacíos se admiten) de un modo tal que, siendo sumadas todas las partes k_i, en cada grupo habrá r números $p_i \leqslant n_i$, $i = 1, \ldots, r$. Si la partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en la partición $(n_1, \ldots, n_r)$, se escribirá este hecho empleando las designaciones para la inclusión de los conjuntos: $(k_1, \ldots, k_t) \subseteq (n_1, \ldots, n_r)$.

Por ejemplo, $(2,2,2) \subseteq (4,2)$, puesto que $(4,2) = (2 + 2, 2)$, pero $(2,2,2) \not\subseteq (3,3)$.

6.84. Compruébese que la relación binaria de encajamiento es una relación de orden parcial.

Introduzcamos algunas designaciones. P es un conjunto de todas las particiones de todos los números naturales; $P(n)$ es un conjunto de todas las particiones del número n; P_r es un conjunto de todas las particiones de rango r; $P_r(n)$ es un conjunto de todas las particiones de rango r del número n, de modo que $P_r(n) = P(n) \cap P_r$.

6.85. Lema del cambio. Si $k_l = n_j$, entonces $(k_1, \ldots, k_l) \subseteq (n_1, \ldots, n_r) \Leftrightarrow (k_1, \ldots, k'_i, \ldots, k_l) \subseteq (n_1, \ldots, n'_j, \ldots, n_r)$, donde la virgulilla sobre el elemento de la sucesión quiere decir que éste está ausente en dicha sucesión.

6.86. Una partición (k^t) se encaja en la partición $(n_1, \ldots, n_r)$ cuando y sólo cuando se verifica la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{r} [n_i/k] \geqslant t.$$

Inténtese examinar una cuestión dual: ¿cuándo la partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en la partición (n^r)?

6.87. Sea $n_a(k, t, r)$ el n máximo, para el cual ninguna partición del número k en t partes se encaja en ninguna partición del número n en r partes. Entonces

$$n_a(k, t, r) = \text{máx}\{k - 1, k - 1 - t + r\}.$$

6.88. Si $n_b(k, t, r)$ es el n mínimo, para el cual $\forall p \in P_r(n)$ $\forall q \in P_t(k)$ $p \not\subset q$, entonces $n_b(k, t, r) = \text{máx}\{k + 1, k + 1 - t + r\}$.

6.89. Sea $n_c(q_1, \ldots, q_t; r)$ el n mínimo, para el cual ninguna partición de n en r partes se encaja en la partición $(q_1, \ldots, q_t)$, $q_1 \geqslant \ldots \geqslant q_t$. Entonces

$$n_c(q_1, \ldots, q_t; r) = 1 + \sum_{i=1}^{\min(r,\, t)} q_i.$$

6.90. Si $q \in P_t(k)$ y $n_d(q; r)$ es el n máximo, para el cual la partición del número q no se encaja en ninguna partición del número n en r partes, entonces $n_d(q; r) = \text{máx}\{k - 1, k - 1 - t + r\}$.

6.91. Si $n_e(k, t, r)$ es el n mínimo, para el cual $\forall p \in P_r(n)$ $\forall q \in P_t(k)$ $q \subset p$, entonces $n_e(k, t, r) = \text{máx}\{k, r(k - t) + 1\}$.

6.92. Si $n_f(k, t, r)$ es el n máximo, para el cual $\forall p \in P_r(n)$ $\forall q \in P_t(k)$, $p \subset q$, entonces $n_f(k, t, r) = \text{mín}\{k, \lfloor k/t \rfloor \times r - 1\}$.

6.93. **Principio de alojamiento completo.** Sean $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_t$, r unos números naturales y sea $n(k_1, \ldots, k_t; r)$ el n mínimo, para el cual la partición $(k_1, \ldots, k_t) \mid - k$ se encaja en cada partición de este n en un número de partes que no sea superior a r. Entonces

$$n(k_1, \ldots, k_t; r) = \text{máx}_{1 \leqslant i \leqslant t} \left(\sum_{j=1}^{i} k_j + (k_i - 1)(r - 1)\right).$$

El principio puede formularse también en la forma dual, a saber, como fórmula para r máximo con n fijo.

6.94. Si para los números naturales $k_1 > 1$, $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant k_t$, $(k_1, \ldots, k_t) \mid -k \leqslant n$, por $r(k_1, \ldots, k_t; n)$ está designado el r máximo, para el cual en cada partición n en r partes se encaja la partición $(k_1, \ldots, k_t)$, entonces

$$r(k_1, \ldots, k_t; n) = \min_{i:\, k_i > 1} \left[\frac{n - \sum_{j=1}^{i} k_j}{k_t - 1} \right] + 1.$$

6.95. Hállese la magnitud $m(n, H_h)$ (véase el problema 6.13) para un grafo no vacío H_h, que consta de t componentes conexos, respecto de k_i vértices en el i-ésimo componente conexo, con la particularidad de que $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_t \geqslant 1$, $k_1 + \ldots + k_t = k$.

6.96. Compruébese que

$$\max_{(k_1 \ldots k_t) \mid -k} n(k_1, \ldots, k_t; r) = \max(k, r(k-t)+1) =$$

$$= n((k-t+1, 1^{t-1}); r).$$

6.97. (?) Calcúlese, para $n_1, \ldots, n_r$, t dados, $k(n_1, \ldots, n_r; t)$, esto es, el k máximo para el cual $\forall (k_1, \ldots, k_t) \mid -k$ se cumple la capacidad de encaje $(k_1, \ldots, k_t) \subset (n_1, \ldots, n_r)$.

La magnitud $n(k_1, \ldots, k_t, r)$ se denominará frontera, y la función $\max_{1 \leqslant i \leqslant t} (\sum_{j=1}^{i} x_j + (x_i - 1) \cdot (r-1))$, función de alojamiento completo, designándola con $f(x_1, \ldots, x_t; r)$ o bien con $f(X)$, cuando el valor de r es evidente del contexto.

6.98. Compruébense las siguientes propiedades de la función de alojamiento completo:

Si X e Y son dos vectores reales de igual dimensión, entonces $f(X+Y; r) \leqslant f(X; r) + f(Y; r) + r - 1$.

Si l es un número natural, se verifican las siguientes igualdades:

$$f(lk_1, \ldots, lk_t; r) = lf(k_1, \ldots, k_t; r) + (r-1)(l-1),$$

$$f((k_1^l, \ldots, k_t^l); rl - l + 1) = lf(k_1, \ldots, k_t; r),$$

$$f((k_1^l, \ldots, k_t^l); r) = lf(k_1, \ldots, k_t; 1 + (r-1)/l.$$

Analícese la validez de estas mismas igualdades también para la frontera del alojamiento completo.

Sea $X = (x_1, \ldots, x_t) \in R^t$, entonces

$$\text{si } \sum_{i=1}^{t} x_i = p \geqslant 0 \quad \text{y} \quad f(X; r) = \sum_{j=1}^{t} x_j + (x_i - 1)(r-1),$$

entonces $x_t \geqslant 0$;

si $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_l > 0 > x_i$, $i = l+1, \ldots, t \geqslant l \geqslant i$ y si S_t es un grupo simétrico de todas las permutaciones del conjunto $[t] = \{1, 2, \ldots, t\}$, entonces

$$\max_{s \in S_t} f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(t)}; r) = \sum_{j=1}^{t} x_j + (x_1 - 1)(r-1);$$

si, en este caso, $\sum_{i=1}^{t} x_i \geqslant 0$, entonces

$$\min_{s \in S_t} f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(t)}; r) = \sum_{j=t+1}^{l} x_j + f(x_1, \ldots, x_t; r).$$

Si $\sum_{i=1}^{t} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{t} |x_i| = d$, entonces

$$\max_X f(X; r) = 1 - r + dr/2, \quad \min_X f(X; r) = \frac{d(r-1)^{t-1}}{r^{t-1} - (r-1)^{t-1}} - r + 1.$$

Si $\sum_{i=1}^{t} x_i = p \in R^1$ y $1 \leqslant r \in R^1$, entonces

$$\min_X f(X; r) = \frac{pr^t}{r^t - (r-1)^t} - r + 1.$$

6.99. La partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en cualquier partición de $P_r(n)$ cuando y sólo cuando la partición $(lk_1, \ldots, lk_t)$ se encaja en cualquier partición de $P_r(nl + (r-1)(l-1))$.

6.100. La partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en cualquier partición de $P_r(n)$ cuando y sólo cuando la partición $(k_1^l, \ldots, k_t^l)$ se encaja en cualquier partición de $P_{rl-l+1}(nl)$.

6.101. Si la partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en cualquier partición de $P_r(n)$, entonces la partición $(k_1^l, \ldots, k_t^l)$ se encaja en cualquier partición de $P_r(nl + (r-1)(l-1))$.

6.102. Si para r, t, $n_1, \ldots, n_r$, $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_t$ naturales se verifica la desigualdad

$$\max_{l \mid k_t} \left\{ \sum_{i=1}^{r} l \lfloor n_i/l \rfloor + (r-1)(l-1) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \max_{l \leqslant l \leqslant l} \left\{ \sum_{j=1}^{t} k_j + (r-1)(k_t - 1) \right\},$$

entonces la partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en la partición $(n_1, \ldots, n_r)$.

6.103. Si $p(k_1, \ldots, k_t; r)$ es un p mínimo, para el cual $(k_1, \ldots, k_t, r) \subset (p^r)$, entonces

$$p(k_1, \ldots, k_t; r) \leqslant \rfloor n(k_1, \ldots, k_t; r)/r \lfloor.$$

6.104. Si $M(k, t, r)$ es un M máximo, para el cual $\forall q \in P_t(k)\ \exists\ \exists\ p \in P_r(M)$ es tal que $p \not\supset q$, entonces para r suficientemente grande

$$M(k, t, r) = (\lfloor k/\lfloor k/t \rfloor \rfloor + r - 1)\rfloor k/t \lfloor - r.$$

6.105. Si $N(k, t, r)$ es un N mínimo, para el cual $\forall p \in P_r(N) \exists\ \exists\ q \in P_t(k)$ es tal que $p \subset q$, entonces

$$N(k, t, r) = k + (\lfloor k/t \lfloor - 1) \text{ máx } \{0, r - t\}.$$

6.106. Cualquiera que sea el alojamiento de n partículas indistinguibles en r células indistinguibles, existe t grupos de partículas ($\lfloor (n + r - 1)/(t + r - 1) \rfloor$ partículas en cada grupo) situadas íntegramente en las células.

6.107. Si $k = n(k_1, \ldots, k_t; r)$, entonces cada alojamiento de k partículas en r células se realiza mediante el alojamiento de t grupos de partículas en k_j partículas en el j-ésimo grupo ($j = 1, 2, \ldots, t$), a condición de que cada grupo se dispone íntegramente en una célula.

6.108. Sean $n_2, \ldots, n_r, k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_t, r$ unos números naturales y supongamos que $n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_r)$ representa el n mínimo, para el cual cada partición $(p_1, \ldots, p_r)$ de este n en r partes es tal que $p_i \leqslant n_i$, $i = 2, \ldots, r$, posee la propiedad de que $(k_1, \ldots, k_t) \subseteq (p_1, \ldots, p_r)$. Entonces

$$n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_r) =$$
$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant t} \left(\sum_{j=1}^{i} k_j + \sum_{l=2}^{r} \min(n_l, k_i - 1)\right).$$

6.109. Si $\sum_{i=2}^{r} n_i \geqslant n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_r)$, entonces $(k_1, \ldots, k_t) \subseteq (n_1, \ldots, n_r)$.

Si $n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_r) > \sum_{i=2}^{r} n_i \geqslant \max_{2 \leqslant j \leqslant r} n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_j - 1, \ldots, n_r)$, entonces $(k_1, \ldots, k_t) \not\subseteq (n_1, \ldots, n_r)$.

6.110. La función $n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_r)$ no es sólo semejante a la función $n(k_1, \ldots, k_t; r)$, sino que a veces se expresa en términos de la última. Demuéstrese la siguiente igualdad

$$n(k_1, \ldots, k_t; (m^{r-i})) = \sum_{j=1}^{i} k_j + n(m+1, k_{i+1}, \ldots, k_t; r) - m - 1,$$

donde $k_{i+1} \leqslant m < k_i$.

6.111. Estímese el valor mínimo posible de la frontera de encajamiento completo:

$$m(k, t, r) = \min_{(k_1, \ldots, k_t) \vdash k} n(k_1, \ldots, k_t; r).$$

Si $k \equiv 0 \pmod{r^t - (r-1)^t}$, entonces

$$m(k, t, r) = \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} - r + 1,$$

y este valor se alcanza en la partición

$$\left(\frac{kr^{t-i}(r-1)^{i-1}}{r^t - (r-1)^t}\right) 1 \leqslant i \leqslant t.$$

Si $k \not\equiv 0 \pmod{r^t - (r-1)^t}$, entonces

$$\frac{kr^t - r + 1}{r^t - (r-1)^t} \geqslant m(k, t, r) \geqslant \frac{kr^t + r - 1}{r^t - (r-1)^t} - r + 1.$$

6.112. La magnitud $m(k, t, r)$ es el C entero mínimo, con el cual para un vector $y_i = [(C + r - 1 - \sum_{j=1}^{i-1} y_j)/r]$, $i = 1, 2, \ldots, t$, definido de un modo recurrente, se verifica la igualdad $\sum_{j=1}^{t} y_j = k$.

Sea $t(k, r)$ un t mínimo, para el cual existe una partición del número k en t partes, que se encaja en todas las particiones de este k en r partes.

6.113. La magnitud $t(k, r)$ es el t entero mínimo, con el cual para un vector $y_i = [(k+r-1-\sum_{j=1}^{i-1} y_j)/r]$, $i = 1, 2, \ldots, t$, definido de un modo recurrente, se verifica la igualdad $\sum_{j=1}^{t} y_j = k$.

6.114. Hay l balanzas de palanca de brazos iguales con dos platillas y un sistema unificado de t pesas cuyas masas son $k_1 \geqslant \ldots \ldots \geqslant k_t$. Es necesario asegurar el pesaje simultáneo de l cargas en estas l balanzas, es decir, una pesa colocada en una balanza ya no puede estar colocada en las otras. El peso sumario de las cargas que se pesan nunca es superior al peso sumario de las pesas. ¿Qué condiciones son las que debe satisfacer el sistema de pesas $k_1, \ldots, k_t$ para asegurar tal peso simultáneo y cuál es la cantidad mínima de pesas que bastan para operar?

§ 3. Constantes geométricas extremales

La temática de las constantes geométricas extremales incluye tanto el cálculo de las características numéricas extremales de los sistemas de vectores, como también la descripción espacial de los sistemas de vectores extremales con relación a cualesquiera propiedades. Esta temática que se remonta históricamente a la conocida disputa entre Newton y Gregory sobre el significado de un número de contacto en R^3, representando un círculo amplio de cuestiones de la geometría métrica, ha ofrecido últimamente sus nuevas aplicaciones en los problemas no geométricos, continuos y discretos, y forma hoy día una temática individual. Las constantes representadas en este párrafo están destinadas a ilustrar precisamente muchos aspectos de la cuestión en consideración; en primer lugar esto se refiere a las constantes del tipo δ, las cuales están directamente vinculadas con las constantes de empaque, los números de contacto y sus aplicaciones.

Sea X un espacio normado lineal sobre el campo de números reales; denotemos con $\sigma_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un sistema de n vectores, no forzosamente diferentes, $x_i \in X$, y supongamos que

$$(\sigma) = \sum_{x \in \sigma} x, \| \sigma \| = \| (\sigma) \| = \left\| \sum_{x \in \sigma} x \right\|.$$

La operación de elección de un subsistema de vectores $\sigma_1 \subset \sigma_n$ se entiende como una elección de $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\} = \sigma_l$, donde $x_{i_j} \subset \sigma_n$, y $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n$, de suerte que siempre hay exactamente $\binom{n}{l}$ posibilidades para tal elección.

6.115. Demuéstrese que

a) entre cualesquiera tres vectores unitarios (versores) del espacio de Hilbert siempre existen dos vectores cuya norma de la suma será no inferior a uno;

b) entre cualesquiera tres vectores unitarios de un espacio lineal normado siempre existen dos vectores cuya norma de la suma será no inferior a 2/3;

c) entre cualesquiera tres vectores de un espacio lineal normado siempre existen dos vectores cuya norma de la suma no será inferior a 2/3 respecto de la norma de la suma de todos los tres vectores;

d) entre cualesquiera tres vectores de un espacio lineal normado siempre existen dos vectores, cuya norma de la suma no será inferior a 2/3 de la norma del vector restante.

6.116. Sea $A\ (k,\ l;\ X)$ el A máximo, para el cual $\forall \sigma_k \subset X \exists \sigma_l < \sigma_k \parallel \sigma_l \parallel \geqslant A \parallel \sigma_k - \sigma_l \parallel$. Calcúlese $A\ (k,\ l;\ X)$.

6.117. ¿Cuál es $B = B\ (k,\ l,\ r;\ X)$ máximo, para el cual $\forall \sigma_k \subset X \forall \sigma_r \subset \sigma_k \exists \sigma_l \subset \sigma_k \parallel \sigma_l \parallel \geqslant B \parallel \sigma_r \parallel$?

6.118. Calcúlese el $\delta = \delta\ (l,\ k;\ X)$ máximo, para el cual $\forall \sigma_k \subset X \exists \sigma_l \subset \sigma_k \parallel \sigma_l \parallel \geqslant \delta\ (\parallel x_i \parallel \geqslant 1)$.

6.119. Sean $k \geqslant l \geqslant 1$ unos números naturales, y sean $v_1, v_2, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_k$ los números reales. Supongamos que $C\ (\bar{v}_l, \bar{w}_k)$ es el C máximo, para el cual $\forall \sigma_k \subset X \exists \sigma_l = \{x_{i_1} \ldots x_{i_l}\} \subset \sigma_k$:

$$\Big\| \sum_{j=1}^{l} v_j x_{i_j} \Big\| \geqslant C \Big\| \sum_{i=1}^{k} w_i x_i \Big\|.$$

Calcúlese $C\ (\bar{v}_l, \bar{w}_k)$.

6.120. Sean $k \geqslant l \geqslant 1$ unos números naturales y $v_1, \ldots, v_l$, números reales, mientras que $\sum_k$ es un símplice de k vértices inscrito en la esfera unitaria del espacio R^{k-1}. Demuéstrese que si $\{x_1, \ldots, x_l\} \subset \sum_k$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{l} v_i x_i \right| = \left(\frac{k \sum\limits_{i=1}^{l} v_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{l} v_i)^2}{k-1} \right)^{1/2}.$$

6.121. Sean $v_1, \ldots, v_n$ unos números reales. Calcúlese la constante

$$\delta\ (\bar{v}_n,\ x) = \inf_{\substack{\sigma_n \subset X \\ \|x_i\| \geqslant 1}} \max_{\pi} \left\| \sum_{i=1}^{n} v_{\pi(i)} x \right\|,$$

donde π es una permutación de los números $\{1, 2, \ldots, n\}$.

6.122. El sistema de vectores unitarios σ_n se denominará L-sistema (se escribe $\sigma_n \sim L$), si $\forall \sigma_p \subset \sigma_n \exists \sigma_q \subset \sigma_p \ \forall \sigma_k \subset \sigma_q \parallel \sigma_k \parallel = c \in \mathrm{R}^1$. Calcúlese o estímese la constante

$$\Delta_c\ (n,\ p,\ q,\ k;\ X) = \sup_{\sigma_n \sim L} \| \sigma_n \|.$$

6.123. Sea $T\ (n,\ k,\ l)$ un número combinatorio de Turán (véase el problema 6.46). Demuéstrese que en cualquier $\sigma_n \subset X\ (\parallel x_i \parallel \geqslant 1)$ existen al menos $T\ (n,\ k,\ l)$ subsistemas $\sigma_l < \sigma_n$ tales que $\parallel \sigma_l \parallel \geqslant \delta\ (l,\ k;\ x)$, donde δ se toma del problema 6.118.

6.124. Calcúlese $\delta\ (t,\ k;\ \mathrm{R}^2)$ (véase el problema 6.118).

6.125. Demuéstrese que la matriz de Hadamard de orden $4n$ existe cuando y sólo cuando $\delta(2,\ 4n;\ l_1^{4n-1}) = (4n - 2)/(4n - 1)$.

6.126. Problema sobre el tornillo sin fin. En un plano se dispone la línea de longitud unitaria. ¿Cuán pequeña ha de ser el área de un campo con el que se pueda cubrir completamente cualquier configuración de dicha línea?

CAPITULO VII

ANÁLISIS COMBINATORIO SOBRE LOS CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Los sistemas de conjuntos son el objetivo de los problemas de este capítulo. Estos sistemas, más complejos que los grafos e hipergrafos, son, precisamente, los conjuntos ordenados. Los propios problemas están destinados para dar a conocer las propiedades estructurales de los conjuntos ordenados y señalar los diferentes tipos de problemas combinatorios sobre los mismos.

§ 1. Conjuntos parcialmente ordenados

Sea P un conjunto arbitrario no vacío. La relación binaria $\leqslant$ sobre el conjunto P se denomina *relación de orden*, si

1) $a \leqslant a$ para cualquier $a \in P$ (reflexividad);

2) si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces $a \leqslant c$ (transitividad);

3) si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, entonces $a = b$ (antisimetría).

Un conjunto P se llama *parcialmente ordenado* y se denota $(P, \leqslant)$, si es no vacío y si está fijada en él una relación de orden $\leqslant$. Por supuesto, sobre un mismo conjunto se pueden fijar órdenes diferentes.

Los conjuntos parcialmente ordenados $(P, \leqslant)$ y $(Q, \preccurlyeq)$ se denominan *isomorfos* y se designan por $(P, \leqslant) \cong (Q, \preccurlyeq)$, si existe una aplicación biunívoca φ del conjunto P sobre el conjunto Q tal que $a \leqslant b$ tiene lugar cuando y sólo cuando $\varphi(a) \preccurlyeq \varphi(b)$. Notemos que la biunivocidad de la aplicación φ puede ser deducida de la última condición. Una aplicación $\varphi : P \to Q$ se llama *isótona*, si $a \leqslant b$ lleva consigo $\varphi(a) \preccurlyeq \varphi(b)$ para todos los $a, b \in P$.

Un elemento M del conjunto parcialmente ordenado P se llama *máximo*, si en P no hay un elemento p que sea «mayor» que M, es decir, $p \geqslant M$ no se cumple, cualquier que sea $p \in P$ distinto de M; por analogía, un elemento m se llama *mínimo*, si en P no hay un elemento $p \in P$, distinto de m y tal que $p \leqslant m$. Un elemento $a \in P$ se denomina maximal, si $\forall p \in P\ p \geqslant a$. Un elemento $b \in P$ se llama minimal, si $\forall p \in P\ p \geqslant b$. Para los elementos maximal y minimal se usan, a veces, las designaciones 1 y 0, respectivamente.

Un par de elementos $p, q \in P$ se denomina *comparable*, si $p \geqslant q$, o $p \leqslant q$. Si en un conjunto parcialmente ordenado P es comparable

todo par de sus elementos, P se denominará *conjunto linealmente ordenado* o *cadena*. A diferencia de las cadenas se llama anticadena a todo conjunto parcialmente ordenado Q que sólo consta de elementos incomparables uno con otro.

El elemento a de un conjunto parcialmente ordenado P *cubre* el elemento $b \in P$ (designación: $b \prec a$), si $b < a$ y no existe $c \in P$ tal que $b < c < a$. Una cadena en el conjunto parcialmente ordenado se llama *saturada*, si dicha cadena no puede ser encajada en ninguna otra cadena distinta de ella misma. De un modo análogo se define la anticadena saturada. Por *cadena máxima* (anticadena máxima) se entiende una cadena (anticadena) máxima por el número de sus elementos.

El *diagrama de Hasse* de un conjunto parcialmente ordenado P es el grafo orientado, de cuyos vértices sirven los elementos de P, mientras que el arco (x, y) está presente cuando y sólo cuando x cubre y. En el grafo citado se acostumbra a expresar los arcos orientados hacia abajo. En tal representación se ponen de manifiesto de manera ilustrativa los niveles del diagrama de Hasse, es decir, del conjunto de elementos de un mismo rango, es decir, del conjunto de aquellos elementos que distan de los elementos mínimos en un camino de longitud igual.

7.1. Dénse ejemplos de conjuntos con órdenes diferentes fijos sobre ellos.

7.2. Demuéstrese que existen exactamente dos conjuntos no isomorfos parcialmente ordenados que constan de dos elementos.

7.3. Indíquense todas las relaciones de orden no isomorfas sobre un conjunto de cinco elementos.

7.4. Dése la definición formal de relación de orden que se emplea para ordenar las palabras en los diccionarios (este orden se denomina lexicográfico).

7.5. Sea $\leqslant$ una relación de orden sobre A y sea B un subconjunto del conjunto A. Para $a, b \in B$ pongamos $a \leqslant_B b$, si $a \leqslant b$. Demuéstrese que la relación $\leqslant_B$ es una relación de orden sobre el subconjunto B $((B, \leqslant_B)$ y lleva el nombre de subconjunto parcialmente ordenado del conjunto $(A, \leqslant))$.

7.6. Sea S una familia de todos los subconjuntos del conjunto $\{a, b, c, d\}$. Diremos que $A \subseteq B$, donde $A, B \in S$, si A es un subconjunto del conjunto B. Compruébese que $\subseteq$ es una relación de orden. Dibújese el diagrama de Hasse y indíquense los elementos máximos y mínimos. Dénse los ejemplos de cadenas (máximas) y de anticadenas en $(S, \subseteq)$.

7.7. Sea S un conjunto de todos los divisores enteros positivos del número 20, ordenados según la divisibilidad, es decir, $a \leqslant b$ cuando y sólo cuando $a \mid b$ (a divide b). Compruébese que $\leqslant$ es una relación de orden. Dibújese el diagrama de Hasse, indíquense los elementos máximos y mínimos. Dénse los ejemplos de cadenas (máximas) y anticadenas en $(S, \leqslant)$.

7.8. Sea A un conjunto no vacío y sea P el conjunto de todas las

relaciones de orden sobre A. Para ρ, $\sigma \in P$ pongamos $\rho \leqslant \sigma$, si $a\rho b$ lleva consigo $a\sigma b$ (a, $b \in A$). Demuéstrese que $(P, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

7.9. Muéstrese que el elemento maximal, si existe, es máximo y el minimal, mínimo.

7.10. ¿Será cierto que si el elemento máximo es único, es también maximal?

Sea P un conjunto parcialmente ordenado con 0 y 1. Un elemento a de P se denomina *átomo*, si $0 \prec a$, y *coátomo*, si $a \prec 1$. Sea $P(n)$ un conjunto de particiones de un número natural n, ordenado de una manera tal que si λ, $\mu \in P(n)$, entonces $\lambda \leqslant \mu$ cuando y sólo cuando puede obtenerse la partición μ sumando las partes separadas de la partición λ. Por ejemplo, $3 + 1 + 1 = (1^2, 3)$, $4 + 1 = (1, 4)$; $3 + 2 = (2, 3)$ son las particiones del número 5; en este caso $(1^2, 3) \leqslant (1, 4)$ y $(1^2, 3) \leqslant (2, 3)$, mientras que (1,4) y (2,3) son elementos incomparables en $P(5)$.

7.11. Sea $P(n)$ un conjunto parcialmente ordenado de particiones de un número natural n. Dibújese el diagrama de Hasse para $P(5)$, indíquense todos los átomos y coátomos suyos. Hállese el número de elementos en $P(n)$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 10.

7.12. Demuéstrese que los conjuntos a seguir son parcialmente ordenados:

a) el conjunto de toda la gente y $a < b$ significa que a es un descendiente de b;

b) A es un conjunto de todas las funciones reales definidas en el conjunto X, y $f \leqslant g$, donde f, $g \in A$ cuando y sólo cuando $f(x) \leqslant g(x)$ para cualquier $x \in X$;

c) A es un conjunto de todas las funciones reales cóncavas continuas definidas en cierto intervalo de un conjunto de números reales, y $f \leqslant g$ está definida del mismo modo que en b).

7.13. Sea $(A, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado. Definamos sobre el conjunto A una relación ρ, suponiendo $a\rho b$, si $b \leqslant a$. Compruébese que (A, ρ) es un conjunto parcialmente ordenado que se denomina *dual* respecto del conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$.

Si a y b son elementos del conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$, con la particularidad de que $a \leqslant b$, entonces el conjunto $[a, b] = \{x \in A \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ se llamará *intervalo*. El conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ se denomina *localmente finito*, si $|[a, b]| < \infty$ para todos los a, $b \in A$.

7.14. Dénse los ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados finitos y localmente finitos.

7.15. Demuéstrese que en todo conjunto finito parcialmente ordenado existen tanto elementos máximos, como mínimos.

7.16. Dénse ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados: a) sin 0; b) sin 1; c) sin 0 y sin 1.

7.17. Demuéstrese que un elemento que es mínimo y máximo simultáneamente no es comparable con ningún elemento distinto de él.

7.18. Sea $\mathfrak{P}(S)$ una familia de todos los subconjuntos del con-

junto S. Para $A, B \in \mathcal{P}(S)$ pongamos $A \subseteq B$, si A es un subconjunto del conjunto B. Demuéstrese que $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado llamado *booleano*. Hállense: 0,1, conjuntos de átomos y coátomos del pooseano. Represéntese el diagrama de Hasse del booleano en $\mathcal{P}(S_n)$, si $|S_n| = n$. ¿Será el booleano $\mathcal{P}(S)$ un conjunto localmente finito, si S es un conjunto infinito?

Se denomina *longitud* $l(C)$ de una *cadena finita* C a un número igual a $|C| - 1$. Suele decirse que un conjunto parcialmente ordenado P es de *longitud* n, si en P existe una cadena de longitud n y todas las demás cadenas en P tienen longitud no superior a n. Diremos que la *anchura del conjunto parcialmente ordenado* P es igual a n, si en P existe una anticadena compuesta de n elementos, mientras que todas las anticadenas restantes de P contienen no más de n elementos. Es evidente que la longitud del conjunto parcialmente ordenado P es igual a $|P| - 1$, y la anchura, a 1.

7.19. Sea $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ una anticadena arbitraria en el booleano $\mathcal{P}(S_n)$. Demuéstrese la *desigualdad* de *Yamamoto—Lubel—Meshalkin*:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leqslant 1.$$

7.20. Demuéstrese el teorema de Sperner: la anchura del booleano $\mathcal{P}(S_n)$ es igual a $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$, donde $[x]$ es la parte entera de x.

7.21. Demuéstrese que toda cadena de longitud n es isomorfa al subconjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ de números enteros ordenados de un modo corriente.

Se denomina *producto directo* $P \times Q$ de los conjuntos parcialmente ordenados P y Q a un conjunto de todos los pares del tipo (x, y), donde $x \in P$, $y \in Q$, con la particularidad de que $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$ en $P \times Q$ cuando y sólo cuando $x_1 \leqslant x_2$ en P e $y_1 \leqslant y_2$ en Q.

7.22. Demuéstrese que el booleano $\mathcal{P}(S_n)$ es isomorfo a un producto cartesiano de n cadenas, donde la longitud de cada cadena es igual a 2.

7.23. Compruébese que la unión de una sucesión creciente de cadenas encajadas una en otra de cierto conjunto parcialmente ordenado es una cadena.

7.24. Si φ es un isomorfismo y a, un elemento maximal (minimal, máximo, mínimo, respectivamente), entonces $\varphi(a)$ será también un elemento maximal (minimal, máximo, mínimo, respectivamente). Constrúyanse los ejemplos que muestran lo ilícito de la afirmación para una aplicación isótona arbitraria.

7.25. ¿Cómo se pueden ordenar los vértices de un cubo unitario n-dimensional, para que los mismos, junto con dicha ordenación, sean isomorfos al booleano $\mathcal{P}(S)$? ¿Será única tal ordenación?

7.26. Sea $\mathcal{D}(n)$ un conjunto de todos los divisores enteros no negativos de un número natural n ordenados según la divisibilidad $|$. Compruébese que $(\mathcal{D}(n), |)$ es un conjunto parcialmente ordenado, hállense sus 0 y 1 y los conjuntos de átomos y coátomos. Dibújese su diagrama de Hasse.

7.27. Sea $(B(S_n), \subset)$ un belliano, es decir, un conjunto de todas las particiones de Bell (particiones no ordenadas tanto en el interior de los bloques, como también en los propios bloques) del conjunto $S_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, ordenadas por la unión de los bloques: para las particiones $\pi_1, \pi_2 \in B(S_n)$ pongamos $\pi_1 \subset \pi_2$ cuando y sólo cuando cualquier bloque de π_1 está contenido en cierto bloque de π_2. Compruébese que $(B(S_n, \subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado, hállense su 0 y 1 y descríbanse los niveles de su diagrama de Hasse.

7.28. Sea $(P(n), \leqslant)$ un conjunto de particiones del número n en sumandos naturales ordenados de un modo tal que si $p_1, p_2 \in (P(n), \leqslant)$, entonces $p_1 \leqslant p_2$ cuando y sólo cuando se puede obtener p_2 sumando las partes separadas de la partición p_1. Compruébese que dicho conjunto es parcialmente ordenado, descríbanse los niveles de su diagrama de Hasse.

7.29. Sea $(V_n(q), \subset)$ un conjunto de todos los subespacios del espacio vectorial n-dimensional V_n sobre un campo finito con q elementos, ordenado por inclusión. Demuéstrese que este conjunto es parcialmente ordenado y descríbase su diagrama de Hasse.

7.30. Sea $(\Pi_n, \subset)$ un conjunto de todas las aristas de un poliedro Π_n, ordenado por inclusión. Demuéstrese que este conjunto es parcialmente ordenado y descríbase su diagrama de Hasse.

7.31. ¿Cómo están ligados entre sí los conjuntos $(B(S_n), \subset)$ y $(P(n), \leqslant)$?

7.32. Sea $\mathcal{D}(n)$ un conjunto de todos los divisores naturales de un número natural n, ordenado según la divisibilidad $|$, y $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, donde p_i son diferentes números primos y α_i los números naturales. Demuéstrese que

$$\mathcal{D}(n) \cong \mathcal{D}(p_1^{\alpha_1}) \times \mathcal{D}(p_2^{\alpha_2}) \times \ldots \times \mathcal{D}(p_s^{\alpha_s}).$$

7.33. Sea $(A, \leqslant)$ uno de los conjuntos parcialmente ordenados citados en los problemas 7.18 y 7.26—7.30, y sea, $(A, \leqslant)_k$ un conjunto de todos los elementos del k-ésimo nivel de su diagrama de Hasse. Dése la respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos elementos distintos hay en $(A, \leqslant)$?

b) ¿Cuántos elementos de nivel dado hay en $(A, \leqslant)$?

c) ¿Cuál es el número de cadenas máximas entre el cero y la unidad en el conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$?

d) ¿Cuál es el número de cadenas máximas entre el cero y la unidad que pasan por un elemento fijo $a \in (A, \leqslant)$?

e) ¿Cuál es la anchura del conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$?

7.34. Sea $(A, <)$ un conjunto finito parcialmente ordenado. Demuéstrese que los elementos de A pueden enumerarse del modo siguiente: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, de suerte que de $a_i < a_j$ se desprenderá $i < j$.

Una cadena, en la cual cada subconjunto no vacío posee un elemento mínimo lleva el nombre de conjunto *bien ordenado*. El conjunto bien ordenado lo constituye cada cadena finita.

7.35. Dése un ejemplo de conjunto que no está bien ordenado.

7.36. Demuéstrese que si una cadena C y una cadena dual respecto de C en un conjunto dual parcialmente ordenado están bien ordenadas, entonces C contiene un número finito de elementos.

Se dice que un conjunto parcialmente ordenado P satisface la condición de mínimo (de máximo, respectivamente), siempre que cada subconjunto no vacío de P sea un conjunto parcialmente ordenado que contiene elementos mínimos (máximos, respectivamente).

7.37. ¿Satisface cualquier conjunto bien ordenado P la condición del mínimo? ¿Qué puede decirse sobre el cumplimiento de la condición de máximo en P y en un conjunto P^*, dual respecto a P?

Un conjunto parcialmente ordenado P satisface la *condición de rotura de las cadenas decrecientes (condición de rotura de las cadenas crecientes, respectivamente)*, si para una sucesión numerable arbitraria $\{a_n | n = 1, 2, \ldots\}$ de elementos de P tal que $a_1 \geqslant a_2 \ldots \geqslant a_n \geqslant \geqslant \ldots$ $(a_1 \leqslant a_2 \ldots \leqslant a_n \ldots)$, respectivamente existe un número k tal que $a_n = a_k$ para cualquier $n \geqslant k$.

7.38. Demuéstrese que en un conjunto parcialmente ordenado P la condición de mínimo es equivalente a la de rotura de las cadenas decrecientes. ¿Será cierto que la condición de máximo es equivalente a la condición de rotura de las cadenas crecientes?

7.39. Demuéstrese que si un conjunto parcialmente ordenado no contiene ni cadenas infinitas ni anticadenas infinitas, es finito.

7.40. Demuéstrese que un conjunto finito satisface las condiciones de mínimo y de máximo.

7.41. Demuéstrese que si una cadena no es bien ordenada, contiene una subcadena dual respecto de una serie natural.

7.42. Demuéstrese que un conjunto parcialmente ordenado localmente finito satisface la condición de mínimo.

7.43. Demuéstrese el *teorema de Dilworth*: el número mínimo de cadenas disjuntas que contienen todos los elementos de un conjunto finito parcialmente ordenado P es igual a la anchura de P.

7.44. Sea P un conjunto finito parcialmente ordenado. Demuéstrese que el número máximo de elementos en la cadena de P es igual al número mínimo de anticadenas disjuntas, que contienen todos los elementos del conjunto P.

7.45. Sea $G(V, E)$ un grafo orientado sin contornos. Diremos

que a es superior a b, donde $a, b \in V$, si en G existe una cadena orientada desde a hacia b. Formúlese el teorema de Dilworth en términos del grafo orientado sin contornos.

El teorema de Dilworth, demostrado en 1950, cuenta con un amplio dominio de aplicación. Es equivalente [1]) a los teoremas fundamentales del análisis combinatorio tales como, por ejemplo, el teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos (véase el cap. III, § 2), los teoremas de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo, los teoremas de tipo de Menger, Konig y otros que ocupan el lugar central en la matemática combinatoria.

Se denomina red a un grafo conexo orientado $G(V, E)$ con el conjunto de vértices V y el conjunto de arcos E, en el cual a todo arco $(x,y) \in E$ se le ha puesto en correspondencia un número no negativo $c(x, y)$ llamado *capacidad del arco* (x, y). Sean s, t dos vértices distintos de G, $\Gamma(x) = \{y \in V \mid (x, y) \in E\}$ y $\Gamma^{-1}(x) = \{y \in V \mid (y, x) \in E\}$. Se denomina *flujo estacionario de la magnitud* v de s a t la función real f que está definida sobre el conjunto de arcos E y que satisface las siguientes correlaciones

$$\sum_{y \in \Gamma(x)} f(x, y) - \sum_{y \in \Gamma^{-1}(x)} f(y, x) = \begin{cases} v, & \text{si } x = s; \\ 0, & \text{si } x \neq s, t; \\ -v, & \text{si } x = t; \end{cases} \tag{7.1}$$

$$0 \leqslant f(x, y) \leqslant c(x, y) \text{ para todos los } (x, y) \in E. \tag{7.2}$$

En este caso el vértice s se llama *fuente* y t, salida (vertedero). En el *problema sobre el flujo máximo* entre dos vértices se requiere construir un flujo estacionario desde el vértice s al vértice t, que tenga la magnitud máxima posible v. Sea X un subconjunto de vértices de la red G tal que $s \in X$, $t \notin X$. En este caso el conjunto de todos los arcos $(x, y) \in E$ tales que $x \in X$, y y $\notin X$, se llama *corte* de la red G y se designa $(X, \bar{X})$. La capacidad del corte se llama magnitud $\sum_{x \in X, y \in \bar{X}} c(x, y)$.

Resulta válido el siguiente teorema de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo y corte mínimo: la magnitud máxima de un flujo en una red arbitraria es igual a la capacidad mínima de sus cortes.

Si la función de la capacidad de los arcos se expresa en números enteros, existe un flujo máximo que también se mide en números enteros (*teorema sobre el flujo* en números enteros).

Muchos problemas de la optimización discreta se reducen al problema sobre el flujo máximo entre dos vértices.

En la fig. 7.1 está representada una red, en la cual el primer número en el arco es igual a la capacidad de éste, y el segundo, al valor

[1]) Es decir, puede obtenerse directamente de la validez de cada uno de los teoremas citados más abajo, y viceversa, cada uno de estos últimos se deduce, a su vez, directamente del teorema de Dilworth.

de la función del flujo f. Con línea s punteadas están designados dos cortes cuyas capacidades son iguales a 4. El valor del flujo en esta red es igual a 4 y este flujo es máximo.

Se denomina *sistema de representantes distintos* (o transversal) de una familia de subconjuntos $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ del conjunto X a tal sistema de elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que $x_i \in X_i$, y $x_i \neq x_j$ para cualesquiera $i \neq j$.

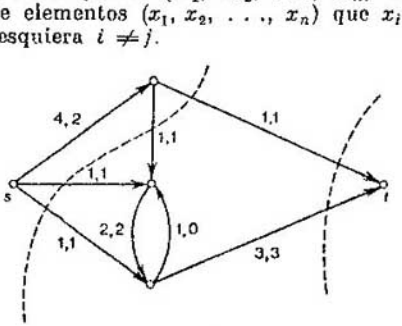


Fig. 7.1.

TEOREMA DE P. HALL SOBRE EL SISTEMA DE REPRESENTANTES DISTINTOS: para una familia arbitraria de subconjuntos $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ del conjunto X una transversal existe cuando y sólo cuando para cualesquiera $i_1, i_2, \ldots, i_n$ tales que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, se verifica la desigualdad $|X_{i_1} \cup \ldots \cup X_{i_k}| \geqslant k$.

Se denomina *combinación de pares* en el grafo $G(V, E)$ un subconjunto de sus aristas M, $M \subseteq E$, dos cualesquiera de las cuales no

Fig. 7.2.

Fig. 7.3.

tienen vértices comunes. Dicho de otro modo, una combinación de pares es una familia de aristas no adyacentes de dos en dos. Un *grafo bipartido*, es el grafo $G(V, E)$, en el cual el conjunto de vértices V puede dividirse en dos subconjuntos disjuntos S y T (es decir, $V = S \cup T$, $S \cap T = \varnothing$) de un modo tal que cada arista une cierto vértice de S con un vértice de T. En las figs. 7.2 y 7.3 se muestran los grafos bipartidos, en los cuales las aristas de las combinaciones de pares se expresan mediante líneas punteadas. El conjunto de vértices del grafo $G(V, E)$ lleva el nombre de *conjunto de vértices* (A, B)-*separador*, donde A, $B \subseteq V$ y $A \cap B = \varnothing$, si la supresión en el grafo de dichos

vértices junto con las aristas incidentes a ellos (o arcos) rompe todas las cadenas que van de los vértices del conjunto A a los vértices del conjunto B. Análogamente, se denomina conjunto de aristas (o de arcos) (A, B)-separador a tal familia de aristas (arcos) del grafo $G(V, E)$, cuya supresión de G rompe todas las cadenas que van de los vértices del conjunto A a los del conjunto B. Supongamos que en el grafo representado en la fig. 7.4 $A = \{a, b\}$ y $B = \{c, g\}$. Entonces $\{f, b, d\}$ es un conjunto de vértices (A, B)-separador, y $\{(a, f); (b, e); (b, d); (b, c)\}$, un conjunto de aristas (A, B)-separador.

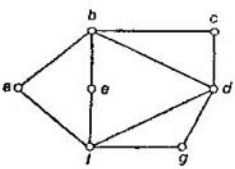


Fig. 7.4.

TEOREMA DE KONIG: el número máximo de aristas de una combinación de pares en un grafo bipartido arbitrario $G(S \cup T, E)$ es igual a la potencia mínima del conjunto de vértices (S, T)-separador del grafo G.

TEOREMA DE MENGER: sean s y t dos vértices de un grafo orientado G. Entonces el número máximo de caminos que no se intersecan en los arcos de s a t en G, es igual a la potencia mínima del conjunto de arcos (s, t)-separador del grafo G.

7.46. Demuéstrese el *análogo matricial del teorema de Konig*: el número mínimo de filas y columnas de una matriz que contienen todos los elementos no nulos, es igual al número mínimo de dichos elementos no dispuestos de dos en dos en una misma fila o en una misma columna.

7.47. Demuéstrese el *análogo de vértice del teorema de Menger*: sean s y t dos vértices no adyacentes en un grafo orientado G. Entonces, la potencia mínima del conjunto de vértices (s, t)-separador en el grafo G es igual al número máximo de caminos de s a t, que no tienen vértices comunes.

7.48. Demuéstrese que las afirmaciones del teorema de Menger y de su análogo concerniente a los vértices (problema 7.47) son válidas también para los grafos no orientados.

7.49. Demuéstrese una variante más del análogo de vértices del teorema de Menger: sea $G(V, E)$ un grafo (orientado) y sea S, $T \subseteq V$. Entonces la potencia mínima del conjunto de vértices (S, T)-separador es igual al número máximo de cadenas que van de los vértices del conjunto S a los vértices del conjunto T y que no tienen vértices comunes.

7.50. Dedúzcase el teorema de Konig:

a) del teorema de Dilworth;

b) del teorema de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y de corte mínimo:

c) del teorema de Menger;

d) del teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos.

7.51. Demuéstrese, basándose en el teorema de Konig, la validez:

a) del teorema de Dilworth;
b) del teorema de Menger;
c) del teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos.

7.52. Dedúzcase el teorema de Menger a partir del teorema de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo.

7.53. Dedúzcase el teorema de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo a partir del teorema de Menger.

Todas las implicaciones, establecidas en los problemas 7.50—7.53, entre los teoremas principales de mini—máx del análisis combinatorio están reducidas a un grafo orientado expresado en la fig. 7.5; en dicho grafo los vértices corresponden a los teoremas y el arco

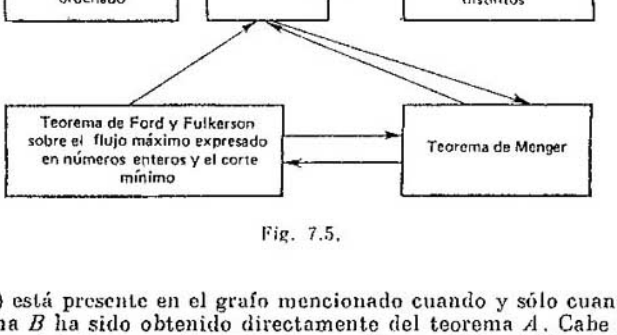


Fig. 7.5.

(A, B) está presente en el grafo mencionado cuando y sólo cuando el teorema B ha sido obtenido directamente del teorema A. Cabe indicar que al haber resuelto todos los problemas 7.50—7.53, el lector mismo establecerá el hecho de equivalencia de los teoremas de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo, de Dilworth sobre el ancho de un conjunto parcialmente ordenado, de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos, de Menger sobre la separación de las aristas y vértices y de Konig sobre la combinación máxima de pares en un grafo bipartido.

Representa interés el problema de hallar (demostrar) todas las implicaciones entre los teoremas del análisis combinatorio mencionados más arriba. Proponemos que el mismo lector halle todas las implicaciones que faltan, es decir, resuelva el siguiente problema:

7.54. Demuéstrense todas las implicaciones necesarias para que el grafo representado en la fig. 7.5 se haga grafo orientado completo sin bucles (*lazos*).

§ 2. Retículos

Sea $(A, \leqslant)$ un conjunto arbitrario parcialmente ordenado y B su subconjunto no vacío. El elemento $a \in A$ se llama *cota superior exacta (supremo)* del conjunto B, si $a \geqslant b$ para todos los $b \in B$ y si de la validez de la relación $v \geqslant b$ para todo $b \in B$ se deduce que $v \geqslant a$. De un modo dual se define la *cota inferior exacta (ínfimo)* del conjunto B: el elemento $a \in A$ se denomina cota inferior exacta, si $a \leqslant b$ para todo $b \in B$ y si de la condición $u \leqslant b$ para cualquier $b \in B$ se deduce que $u \leqslant a$. Las cotas exactas superior e inferior del conjunto B en $(A, \leqslant)$ se designarán por los símbolos $\sup_A B$ e $\inf_A B$, respectivamente. Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ se denomina *retículo* (o *estructura*), si para todos los a, $b \in A$ existen $\sup\{a, b\}$ y $\inf\{a, b\}$. En los retículos se emplearán también las designaciones $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, $a \vee b = \sup\{a, b\}$; llamaremos $\wedge$ intersección, $\vee$, unión.

7.55. Sea $A \subseteq \mathfrak{P}(S)$. Demuéstrese que $\sup A$ coincide con la unión de los subconjuntos que integran A, mientras que $\inf A$, con su intersección.

7.56. Sea $A \subseteq B \subseteq P$ y supongamos que existen $\sup A$ y $\sup B$ ($\inf A$ y $\inf B$). Demuéstrese que $\sup A \leqslant \sup B$ ($\inf A \geqslant \inf B$).

7.57. Demuéstrese que si $a \leqslant b$, entonces $\sup\{a, b\} = b$ e $\inf\{a, b\} = a$.

7.58. Sea $\{A_\alpha\}$ cierta totalidad de subconjuntos del conjunto parcialmente ordenado P, $A = \bigcup A_\alpha$, y supongamos que existen $\sup A$ y $\sup A_\alpha$ ($\inf A$ y $\inf A_\alpha$) para todo α. Demuéstrese que en este caso

$$\sup A = \sup\{\sup A_\alpha\} \quad (\inf A = \inf\{\inf A_\alpha\}).$$

7.59. Sea Q un subconjunto del conjunto parcialmente ordenado P. Demuéstrese que si $A \subseteq Q$ y existe $a = \sup_P A \in Q$ ($b = \inf_P A \in Q$, respectivamente), entonces $a = \sup_Q A$ ($b = \inf_Q A$, respectivamente).

7.60. Dése un ejemplo en que de la existencia de $\sup_Q A$ (en las condiciones del problema 7.59) no se deduce que existe $\sup_P A$.

7.61. Demuéstrese que si a y b son elementos máximos, entonces $\sup\{a, b\}$ existe cuando y sólo cuando $a = b$.

7.62. Dése un ejemplo de conjunto parcialmente ordenado en el cual no existe $\inf \varnothing$.

7.63. Demuéstrese que si $\inf B$ existe para cualquier subconjunto no vacío B del conjunto parcialmente ordenado P, entonces en P existe también $\sup \varnothing$.

7.64. Demuéstrese que si L es un retículo con $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ y $a \vee b = \sup\{a, b\}$, entonces las operaciones binarias $\wedge$ y $\vee$ para cualesquiera a, b, $c \in L$ satisfacen las siguientes propiedades:

a) $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$ (idempotencia);

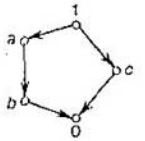
b) $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$ (conmutatividad);

c) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,
$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (asociatividad);

d) $a \wedge (a \vee b) = a$; $a \vee (a \wedge b) = a$ (absorción).

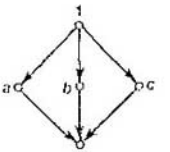
7.65. ¿Cuáles de los conjuntos parcialmente ordenados, correspondientes a los diagramas de Hasse representados en las figs. 7.6, 7.7 y 7.8, son retículos?

7.66. Compruébese que los conjuntos parcialmente ordenados de los problemas 7.18, 7.26, 7.27, 7.29, 7.30 son retículos.



Pentagono

Fig. 7.6.



Diamante

Fig. 7.7.

P(6)

Fig. 7.8.

7.67. Demuéstrese que el conjunto parcialmente ordenado del problema 7.28 no es un retículo, cuando $n \geqslant 5$.

7.68. ¿Qué conjuntos parcialmente ordenados del problema 7.12 son retículos? Calcúlense $a \wedge b$ y $a \vee b$ para aquellos que son retículos.

7.69. Muéstrese que cualquier cadena es un retículo.

7.70. Demuéstrese que si un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ es un retículo, entonces el conjunto parcialmente ordenado $(A, \geqslant)$, dual respecto a $(A, \leqslant)$, también lo es.

7.71. Sea A un conjunto de todos los subgrupos (normales) del grupo G y para X, $Y \in A$ supongamos que $X \leqslant Y$ significa que $X \subseteq Y$. Demuéstrese que $(A, \leqslant)$ es un retículo; calcúlense $X \wedge Y$, $X \vee Y$.

7.72. Sea $(A, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado en el que $\inf B$ existe para cualquier $B \subseteq A$. Muéstrese que $(A, \leqslant)$ es un retículo.

7.73. Demuéstrese que todo elemento mínimo (máximo) de un retículo es un cero (unidad).

7.74. Demuéstrese que si a, b, c son elementos de un retículo y $a \vee b \vee c = a \wedge b \wedge c$, entonces $a = b = c$.

7.75. Sea A un conjunto con dos operaciones binarias $\wedge$ y $\vee$, que son idempotentes, conmutativas, asociativas y satisfacen las propiedades de absorción; además, $a \leqslant b$ significa que $a \vee b = b$. Demuéstrese que la relación $\leqslant$ es relación de orden sobre el conjunto A y el conjunto parcialmente ordenado que surge resulta ser un retículo, con la particularidad de que

$$a \vee b = \sup \{a, b\},$$
$$a \wedge b = \inf \{a, b\}.$$

7.76. ¿Qué cambiará, si en el problema 7.75 ponemos $a \leqslant b$ cuando y sólo cuando $a \wedge b = a$?

7.77. ¿Serán retículos los conjuntos parcialmente ordenados representados en la fig. 7.9?

7.78. Muéstrese que en la fig. 7.10 está representado dos veces un mismo retículo.

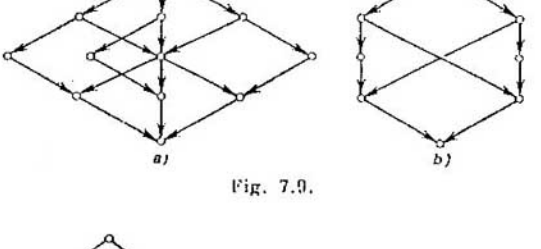


Fig. 7.9.

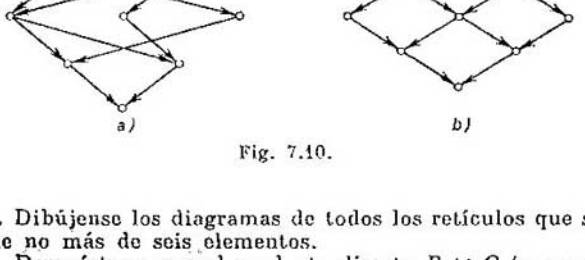


Fig. 7.10.

7.79. Dibújense los diagramas de todos los retículos que se componen de no más de seis elementos.

7.80. Demuéstrese que el producto directo $P \times Q$ (como conjuntos parcialmente ordenados) de cualesquiera dos retículos P y Q es un retículo llamado *producto directo de retículos*.

Un conjunto parcialmente ordenado se denomina *retículo completo*, siempre que todo su subconjunto no vacío tiene tanto cota superior exacta, como cota inferior exacta.

7.81. Dénse los ejemplos de retículos completos.

7.82. ¿Formará el retículo completo un conjunto de todos los números enteros con orden corriente según su valor?

7.83. Compruébese que todo retículo completo es un retículo. ¿Es cierto que todo retículo es retículo completo?

7.84. Compruébese que el belliano $\mathfrak{B}(S_n)$ es un retículo completo.

7.85. Demuéstrese que un producto directo de retículos completos es un retículo completo.

7.86. Demuéstrese que si un conjunto parcialmente ordenado P tiene la cifra 1 y si cada su subconjunto no vacío tiene cota inferior exacta, entonces P es un retículo completo.

Para los retículos hay dos conceptos equivalentes de isomorfismo:

a) Los retículos L_0 y L_1 se llaman *isomorfos*, si son isomorfos como conjuntos parcialmente ordenados.

b) Los retículos L_0 y L_1 se llaman isomorfos, si existe un isomorfismo φ del conjunto L_0 sobre el conjunto L_1 tal que para cualesquiera $a,\ b \in L_0$ tiene lugar:

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b);$$
$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b).$$

Se denomina *homomorfismo* del retículo L_0 en el retículo L_1 la aplicación φ: $L_0 \to L_1$ que satisface, para cualesquiera $a,\ b \in L_0$, las condiciones:

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b);$$
$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b).$$

7.87. Demuéstrese que todo homomorfismo de los retículos es una aplicación isótona. ¿Será cierta la afirmación inversa de que toda aplicación isótona de los retículos es un homomorfismo?

Un subconjunto B del retículo L se denominará también *pentágono* o *diamante*, si es un subretículo isomorfo al pentágono (véase fig. 7.6) o al diamante (véase fig. 7.7). De este modo, afirmando que $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ es un pentágono (diamante, respectivamente) suponemos que la aplicación φ: $b_1 \to 0$; $b_2 \to a$; $b_3 \to b$; $b_4 \to c$, $b_5 \to 1$ es un isomorfismo del retículo B sobre el retículo representado en la fig. 7.6 (en la fig. 7.7, respectivamente).

7.88. Muéstrese que la imagen homomorfa de un diamante la constituye el propio diamante o un retículo de un solo elemento.

Una aplicación isótona φ del conjunto parcialmente ordenado P en sí mismo lleva el nombre de *operador de clausura*, si $\varphi(x) \geqslant x$ y $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ para todo $x \in P$. El elemento $\varphi(x)$ se llama φ-*clausura* de x. Un elemento que coincide con su φ-clausura se llama φ-*cerrado*.

7.89. Dénse ejemplos de operadores de clausura sobre los conjuntos parcialmente ordenados e indíquense todos los elementos cerrados en estos conjuntos parcialmente ordenados.

7.90. Sea φ un operador de clausura sobre el conjunto parcialmente ordenado P; el subconjunto $A \subseteq P$ consta de elementos φ-cerrados y $a = \inf A$ existe. Demuéstrese que en este caso a es un elemento φ-cerrado.

7.91. Sea φ un operador de clausura sobre el retículo completo P. Demuéstrese que un conjunto parcialmente ordenado L de todos los elementos φ-cerrados, considerado como un subcojunto del conjunto parcialmente ordenado P, es también un retículo completo y que

en tal caso para cualquier subconjunto no vacío A del conjunto L tiene lugar $\inf_L A$ $\inf_P A$ y $\sup_L A = \varphi$ ($\sup_P A$).

7.92. Demuéstrese que si φ es un operador de clausura sobre el conjunto parcialmente ordenado P, todos los elementos máximos de P son φ-cerrados.

Un retículo L se llama *modular*, si para cualesquiera $a, b, c \in L$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c))$$

o bien, lo que es equivalente a la condición siguiente:

$$a \geqslant c \text{ lleva consigo } a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c.$$

7.93. Muéstrese que los retículos que siguen:

a) diamante (véase fig. 7.7);

b) retículo del problema 7.29;

c) retículo dual respecto del retículo modular;

d) subretículo de un retículo modular;

e) producto directo de los retículos modulares;

f) imagen homomorfa de un retículo modular son todos modulares.

7.94. Dénse ejemplos de retículos no modulares.

7.95. Demuéstrese que un belliano $\mathcal{B}(S_n)$ es un retículo modular, si y sólo si $k \leqslant 3$.

7.96. Demuéstrese que el retículo L es modular si y sólo si no contiene pentágonos.

7.97. Demuéstrese que el retículo L es modular cuando y sólo cuando para todos los $a, b, c \in L$ de $b \geqslant a$, $a \wedge c = b \wedge c$ y de $a \vee c = b \vee c$ se deduce que $a = b$.

7.98. Demuéstrese que si a y b son elementos de un retículo modular L, los intervalos $[a \wedge b, a]$ y $[b, a \vee b]$ son isomorfos. En este caso el isomorfismo se realiza mediante las aplicaciones:

$$\varphi(x) = x \vee b, \quad \text{si } x \in [a \wedge b, a]$$
$$\psi(y) = a \wedge y, \quad \text{si } y \in [b, a \vee b]$$

7.99. Demuéstrese que si L es un retículo modular y si $a, b \in L$: entonces para cualesquiera $x, y \in [a \wedge b, b]$ se verifica la igualdad

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y).$$

Un retículo L se llama distributivo, si para cualesquiera $a, b, c \in L$ se verifica una de las siguientes identidades:

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c);$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c).$$

7.100. Muéstrese que los retículos que siguen:

a) booleano; b) toda cadena finita; c) retículo compuesto por no más de 4 elementos; d) retículo de números enteros no negativos ordenados según la divisibilidad; e) dual respecto del retículo distributivo; f) subretículo de un retículo distributivo; g) imagen homomor-

fa de un retículo distributivo; h) producto directo de los retículos distributivos son todos distributivos.

7.101a. Dénse ejemplos de retículos no distributivos.

7.101b. ¿Será cierto que un belliano $\mathscr{B}(S_n)$ es retículo distributivo, si y sólo si $n \leqslant 2$?

7.102. Demuéstrese que un retículo modular L es distributivo cuando y sólo cuando no contiene diamantes.

7.103. Demuéstrese que un retículo L es distributivo cuando y sólo cuando para cualesquiera $a, b, c \in L$ de $a \wedge c = b \wedge c$, $a \vee c = b \vee c$ se deduce que $a = b$.

7.104. Demuéstrese que el retículo L es distributivo si y sólo si para cualesquiera $a, b, c \in L$ se verifica

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \wedge a).$$

Escribamos $a \preccurlyeq b$ $(b \succcurlyeq a)$, si $a \prec b$, ó $a = b$. Se dice que el retículo L satisface la *condición de recubrimiento por arriba* si para cualesquiera $a, b, c \in L$ de $a \prec b$ se deduce que $a \vee c \preccurlyeq b \vee c$. La *condición de recubrimiento por debajo* se define de un modo dual.

7.105. Demuéstrese que un retículo modular arbitrario satisface las condiciones de recubrimiento por arriba y por debajo.

El retículo L se denominará *semimodular*, si satisface la condición de recubrimiento por arriba.

7.106. ¿Serán semimodulares los retículos representados en la fig. 7.11?

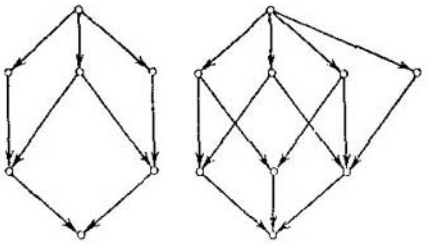


Fig. 7.11.

7.107. Demuéstrese que el producto directo de los retículos semimodulares, la imagen homomorfa del retículo semimodular finito y el belliano $\mathscr{B}(S_n)$ son retículos semimodulares.

7.108. Dénse ejemplos de retículos semimodulares que no son modulares.

Sea L un retículo con 0. Definamos en él una *función de rango* $r(a)$ del modo siguiente: $r(a)$ es igual a la longitud de la cadena máxima más larga en el intervalo $[0, a]$, si tal cadena existe, y

$r(a) = \infty$ en el caso contrario. Diremos que L es un retículo de longitud finita, si $r(a) < \infty$, cualquiera que sea $a \in L$.

7.109. Demuéstrese que en un retículo semimodular L de longitud finita se cumple la condición de Jordan—Hölder: cualesquiera dos cadenas máximas entre los elementos arbitrarios del retículo L son de igual longitud.

7.110. ¿Se cumplirá la condición de Jordan—Hölder en un retículo de longitud finita que satisface la condición de recubrimiento por debajo?

Así pues, en virtud de la condición de Jordan—Hölder, que se cumple en los retículos semimodulares de longitud finita, el rango $r(a)$ coincide con la longitud de la cadena máxima arbitraria en el intervalo $[0, a]$.

7.111. Demuéstrese que:

a) si en un conjunto parcialmente ordenado A con O se cumple la condición de Jordan—Hölder, entonces su función de rango $r(a)$, definida para todo $a \in A$, satisface las siguientes condiciones: $r(0) = 0$ y de $a \prec b$ se deduce que $r(b) = r(a) + 1$;

b) si sobre un conjunto parcialmente ordenado A, está definida una función r tal que $r(0) = 0$ y si de $a \prec b$ se deduce que $r(b) = r(a) + 1$, entonces A satisface la condición de Jordan—Hölder y esta función coincide con su función de rango.

7.112. Demuéstrese que en el retículo L de longitud finita son equivalentes las siguientes condiciones:

a) L es un retículo semimodular;

b) si $a, b \in L$, $a \neq b$, y los elementos a, b cubren el elemento $a \wedge b$, entonces el elemento $a \vee b$ cubre los elementos a y b;

c) si $a, b, c \in L$, $a \leqslant b$ y C es una cadena máxima en el intervalo $[a, b]$, entonces $\{x \vee c \mid x \in C\}$ es la cadena máxima en el intervalo $[a \vee c, b \vee c]$;

d) para cualesquiera $a, b \in L$ se verifica la desigualdad

$$r(a) + r(b) \geqslant r(a \wedge b) + r(a \vee b).$$

7.113. Demuéstrese que si en un retículo de longitud finita L se cumple la condición de recubrimiento por debajo, entonces para cualesquiera $a, b \in L$ se verifica la desigualdad

$$r(a) + r(b) \leqslant r(a \wedge b) + r(a \vee b).$$

7.114. Demuéstrese que el retículo L es semimodular cuando y sólo cuando para cualesquiera $x, y \in L$ de $x \succ x \wedge y$ se deduce $x \vee y \prec y$.

7.115. Demuéstrese que para los retículos semimodulares resulta válido el axioma de sustitución de Mac Lane—Steinitz: si p y q son átomos del retículo L y si $a \in L$, $a < a \vee q \leqslant a \vee p$, entonces $a \vee p = a \vee q$.

7.116. Demuéstrese que para el retículo L de longitud finita son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) L es un retículo modular;

b) el retículo L satisface las condiciones de recubrimiento tanto por arriba, como por debajo;

c) L no contiene pentágonos;

d) para cualesquiera $a, b \in L$ se verifica la igualdad

$$r(a) + r(b) = r(a \vee b) + r(a \wedge b).$$

7.117. Demuéstrese que en un retículo semimodular L de longitud finita para cualesquiera $x_i \in L$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se verifica la desigualdad

$$r(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \leqslant r(x_1) + r(x_2) + \ldots + r(x_n).$$

7.118. Demuéstrese que en un retículo semimodular L de longitud finita, si p es un átomo tenemos: $p \leqslant a$ ó $a \vee p \succ a$.

Un par de elementos (a, b) del retículo L se llama modular y se denota aMb, si de $x \leqslant b$ se deduce, para cualquier $x \in L$, que $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$.

Inmediatamente de la definición se desprende que el retículo L es modular cuando y sólo cuando aMb para cualesquiera $a, b \in L$.

7.119. Demuéstrese que para los elementos a y b de un retículo arbitrario L y las aplicaciones φ y ψ, definidas en el problema 7.98, son equivalentes las siguientes condiciones:

a) aMb;

b) φ es la aplicación de $[a, a \vee b]$ sobre $[a \wedge b, b]$;

c) ψ es la aplicación biunívoca de $[a \wedge b, b]$ en $[a, a \vee b]$;

d) $\varphi\psi(x) = x$ para todo $x \in [a \wedge b, b]$.

7.120. Demuéstrese que en un retículo semimodular L de longitud finita aMb cuando y sólo cuando

$$r(a) + r(b) = r(a \vee b) + r(a \wedge b).$$

Un retículo L se llama M-simétrico, si aMb lleva consigo bMa para cualesquiera $a, b \in L$.

7.121. Muéstrese que en el retículo representado en la fig. 7.11 a) de aMb no se desprende bMa.

7.122. Demuéstrese que un retículo arbitrario L de longitud finita es semimodular cuando y sólo cuando es M-simétrico.

Sea L un retículo con 0. El subconjunto X del conjunto $L \setminus \{0\}$ se denomina *independiente*, si para cualesquiera subconjuntos finitos suyos A y B es válida la igualdad

$$\inf\{\sup A, \sup B\} = \sup(A \cap B).$$

7.123. Demuéstrese que un subconjunto X del retículo L es independiente cuando y sólo cuando la aplicación $\varphi: A \to \sup A$, definida para todos los $A \in \mathcal{P}(X)$, es un ismorfismo entre el retículo del booleano $\mathcal{P}(X)$ y un subretículo del retículo L, engendrado por el conjunto X.

7.124. Sea L un retículo modular con 0. Demuéstrese que el subconjunto de n elementos $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq L - \{0\}$ es independiente, si y sólo si para cualesquiera $i = 1, 2, \ldots, n-1$ son válidas las correlaciones

$$(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0.$$

7.125. Sea L un retículo modular con 0. Demuéstrese que

a) si $a_i \leqslant b_i$, $a_i, b_i \in L$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son independientes en L, entonces $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son también independientes;

b) Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son elementos independientes del retículo L y si $a_i = a_{i1} \vee a_{i2} \vee \ldots \vee a_{ih_i}$ donde $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ih_i}$ también son elementos independientes del retículo L y $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces los elementos $a_{11}, \ldots, a_{1h_1}, a_{21}, \ldots, a_{2h_2}, \ldots \ldots, a_{nh_n}$ son independientes.

El conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de elementos de un retículo semimodular de longitud finita será independiente, si satisface la siguiente condición

$$r(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) = r_1(x_1) + r(x_2) = \ldots + r(x_n).$$

7.126. Demuéstrese que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son elementos indes pendientes del retículo semimodular L de longitud finita, entonce para todos los $i = 1, 2, \ldots, n-1$ se verifican las siguientes correlaciones:

a) $(x_1 \vee \ldots \vee x_i) \wedge x_{i+1} = 0$;

b) $(x_1 \vee \ldots \vee x_i) M x_{i+1}$;

c) $x_1, \ldots, x_i$, son elementos independientes.

7.127. ¿Será cierta la afirmación del problema 7.124 para los retículos semimodulares de longitud finita?

7.128. Demuéstrese que si $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un conjunto de átomos de un retículo semimodular, entonces serán equivalentes las siguientes condiciones:

a) X es un conjunto independiente;

b) $(a_1 \vee \ldots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

c) $r(a_1 \vee \ldots \vee a_n) = n$.

7.129. Muéstrese que si en un retículo semimodular los átomos $p_1, \ldots, p_s$ son independientes y los átomos $q_1, \ldots, q_{s+1}$ también son independientes, será independiente también cierto conjunto $p_1, \ldots, p_s, q_i$.

Un retículo L con 0 y 1 se llama *retículo con complementos*, si para cualquier $x \in L$ existe tal elemento $x^* \in L$ que $x \wedge x^* = 0$ y $x \vee x^* = 1$, con la particularidad de que el elemento x^* se denomina *complemento del elemento* x en L. Un retículo L recibe el nombre de retículo con complementos relativos, si de que $a \leqslant x \leqslant b$, donde a y b son elementos arbitrarios del retículo L, y $x \in L$ se deduce la existencia de tal elemento $y \in L$ que $x \wedge y = a$, $x \vee y = b$, y en este caso el elemento y se denomina *complemento relativo del*

elemento x en el intervalo $[a, b]$. De acuerdo con las definiciones dadas, cada retículo L con complementos relativos que posee 0 y 1 será retículo con complementos.

7.130. Sea L un retículo representado en la fig. 7.12. Hállense los complementos relativos: a) del elemento b en el intervalo $[e, 1]$; b) de los elementos a y e en el intervalo $[0, b]$. ¿Será el retículo L un retículo con complementos o complementos relativos? ¿Podrá un elemento tener varios complementos (relativos)?

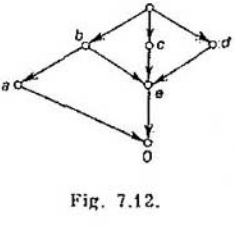


Fig. 7.12.

7.131. ¿Será cierto que cada retículo con complementos es un retículo con complementos relativos? Arguméntese la respuesta.

7.132. ¿Será un pentágono (véase fig. 7.6): a) retículo con complementos; b) retículo con complementos relativos?

7.133. Muéstrese que todos los retículos con complementos relativos que tienen no más de 8 elementos son modulares.

7.134. Demuéstrese que si en un retículo modular con 0 y 1 el elemento a tiene complemento, poseerá también complemento relativo en cualquier intervalo que lo contiene.

7.135. Demuéstrese que en un retículo de *longitud finita* L con complementos relativos, cada elemento a es una unión de átomos en él contenidos. ¿Será cierto que en un retículo modular de longitud finita con complementos, cada elemento es una unión de átomos en él contenidos?

7.136. Sea L un retículo modular con complementos y sea $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ una cadena en L. Supongamos, además, que $b_1 = a_1$, b_2 es un complemento relativo de a_1 en el intervalo $[0, a_2]$, ... , b_n es un complemento relativo del elemento a_{n-1} en el intervalo $[0, a_n]$. Demuéstrese que el conjunto $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ es independiente en L.

7.137. Sea L un retículo con 0 y 1; $a, b, c, x, y, z, t \in L$; supongamos que x es un complemento relativo del elemento a en el intervalo $[b, c]$, y es un complemento relativo del elemento c en el intervalo $[x, 1]$, z es un complemento relativo del elemento b en el intervalo $[0, x]$ y t es un complemento relativo del elemento x en el intervalo $[z, y]$. Compruébese que t es un complemento del elemento a en L.

7.138. Demuéstrese que en un retículo distributivo L con 0 y 1 cualquier elemento a tiene a lo sumo: a) un complemento relativo en cada intervalo; b) un complemento en L.

7.139. Demuéstrese que si en un retículo distributivo L los elementos a y b tienen complementos a^* y b^*, respectivamente, entonces los elementos $a \wedge b$ y $a \vee b$ también poseen los complementos $(a \wedge b)^*$ y $(a \vee b)^*$, respectivamente; además, son válidas en este caso las *identidades de Morgan*:

$$(a \wedge b)^* = a^* \vee b^* \text{ y } (a \vee b)^* = a^* \wedge b^*.$$

7.140. Sea L un retículo distributivo con 0 y 1; $a, b \in L$. Demuéstrese que si los elementos $(a \wedge b)$ y $(a \vee b)$ tienen complementos, los elementos a y b también tienen complementos en L.

7.141. Demuéstrese que un retículo semimodular de longitud finita L es un retículo con complementos, si y sólo si su 1 es una unión de sus átomos.

7.142. Demuéstrese que un retículo semimodular L es un retículo con complementos relativos, si y sólo si cada elemento x de él es tal que $x > 0$, es una unión de átomos.

7.143. Demuéstrese que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son elementos independientes del retículo modular L con 0, entonces el subretículo H del retículo L, engendrado por los intervalos $[0, a_i]$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$, es isomorfo al producto $[0, a_1] \times [0, a_2] \times \ldots \times [0, a_n]$.

Se llama *retículo de Boole* un retículo distributivo con complementos. En vista del problema 7.138, cada elemento del retículo de Boole B tiene un único complemento, y en virtud del problema 7.134, el retículo de Boole cuenta con complementos relativos. Por ser simétrico el complemento, tenemos $x^{**} = x$ para todo $x \in B$ (esta propiedad lleva el nombre de *involutividad*). Un retículo de Boole, en el cual 0, 1 y * (operación de complementar) se consideran como operaciones principales, recibe el nombre de álgebra de Boole. De este modo el álgebra de Boole es en realidad un sistema algebraico $(B; \wedge, \vee, *, 0, 1)$, donde $\wedge$, $\vee$ son operaciones binarias, * es operación monaria, y 0, 1, las constantes de operaciones que satisfacen las propiedades de: idempotencia, conmutatividad, asociatividad, absorción (retículo), modularidad, (retículo modular), distributividad (retículo distributivo), fronteras universales (retículo con 0 y 1), complementariedad (retículo con complementos), involutividad e identidades de Morgan (retículo de Boole).

7.144. Muéstrese que los retículos: a) booleano $\mathfrak{P}(S)$; b) el retículo modular con complementos únicos; c) cualquier subretículo del retículo de Boole; d) el producto directo de retículos de Boole, son todos retículos de Boole.

7.145. Demuéstrese que un retículo de Boole finito es isomorfo a cierto booleano $\mathfrak{P}(S_n)$.

Dos intervalos $[x, y]$ y $[x', y']$ del retículo L se llaman *transpuestos*, si $[x, y] = [b, a \vee b]$ y $[x', y'] = [a \wedge b, a]$ para ciertos $a, b \in L$. Diremos que los intervalos $[x, y]$ y $[x', y']$ son *proyectivos* (la designación es: $[x, y] \sim [x', y']$), si existe una sucesión finita de intervalos

$$[x, y], [x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n], [x', y'],$$

en la cual cualesquiera dos intervalos vecinos son transpuestos.

7.146. Demuéstrese que en los retículos modulares de longitud finita se cumple la *condición reforzada de Jordan—Hölder*: cualesquiera dos cadenas máximas entre los elementos arbitrarios del retículo modular L de longitud finita tienen longitud igual; si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ y $b_0 = a_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n = a_n$ es un par de tales

cadenas máximas, existe una permutación σ de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $[a_{i-1}, a_i] \sim [b_{\sigma(i)-1}, b_{\sigma(i)}]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Además, si L es un retículo modular, la permutación σ está definida del modo unívoco.

7.147. Sea S un conjunto finito; L, un subretículo del retículo de Boole $\mathfrak{P}(S)$; S^-, el elemento minimal del subretículo y S^+, el complemento en S de su elemento maximal. Demuéstrese que si $A_0 = S^-, A_1, \ldots, A_n = S \setminus S^+$ es la cadena máxima en L y $\mathfrak{F} = \{A_i \setminus A_{i+1} \mid i = 1, \ldots, n\}$, entonces $(S^-, \{F: F \in \mathfrak{F}\}, S^+)$ será partición del conjunto S que no depende del modo de elegir la cadena máxima entre S^- y $S \setminus S^+$ en L (los conjuntos S^- y S^+ pueden ser vacíos, todos los $F \in \mathfrak{F}$ no son conjuntos vacíos).

Una cadena se denomina *puntual*, si cada uno de sus elementos es una unión de átomos. Un retículo semimodular puntual de longitud finita se llama *geométrico* (o bien matroidal). De este modo, en virtud del problema 7.142, el retículo geométrico es un retículo semimodular de longitud finita con complementos relativos.

7.148. Muéstrese que los retículos: a) booleano $\mathfrak{P}(S_n)$; b) belliano $\mathfrak{B}(S_n)$; c) el conjunto parcialmente ordenado del problema 7.29; d) el intervalo arbitrario $[a, b]$ del retículo geométrico L; e) el producto directo de los retículos geométricos, son todos geométricos.

7.149. Sea G un retículo geométrico y A, cierto conjunto de sus átomos. Demuéstrese que el conjunto L de toda clase de uniones de átomos $p \in A$ es un retículo geométrico, si le agregamos un elemento más 0 y ponemos $0 = \sup \varnothing$.

7.150. ¿Será posible despreciar en las afirmaciones de los problemas 7.141 y 7.142 el requisito de semimodularidad de los retículos? Arguméntese la respuesta.

7.151. Demuéstrese que un retículo L de longitud finita con complementos relativos es geométrico, si y sólo si se cumple en él una de las siguientes condiciones:

a) si $a, b \in L$, $a \neq b$, y los elementos a, b cubren el elemento $c\ (= a \wedge b)$, entonces el elemento $a \vee b$ cubre los elementos a y b;

b) si p es un átomo del retículo L, entonces para un elemento arbitrario $a \in L$ o bien $p \leqslant a$, o bien $a \vee p$ cubre a;

c) si p, q son los átomos del retículo L y $a < a \vee q \leqslant a \vee p$, donde $a \in L$, entonces $a \vee q = a \vee p$.

d) la propiedad de independencia de los átomos es simétrica (es decir, invariante respecto de todas las permutaciones de átomos).

7.152. Demuéstrese que un retículo puntual de longitud finita es semimodular (geométrico) cuando y sólo cuando para cualquier elemento $a \in L$ y para cada átomo $p \in L$: pMa.

7.153. Supongamos que en un retículo geométrico los elementos $c \leqslant b$ son complementos de a. Demuéstrese que si aMb y aMc, entonces $b = c$.

7.154. Sea G un grupo abeliano. Denotemos con L el retículo de todos los subgrupos H tales que el grupo cociente G/H no tiene ele-

mentos de orden finito, salvo el cero. Demuéstrese que L es un retículo geométrico.

7.155. Sea a^* un complemento del elemento arbitrario a de un retículo geométrico L. Demuéstrese que $a^* \; Ma$.

Sea A un conjunto de todos los átomos del retículo geométrico L y sea B un subconjunto arbitrario suyo. Se llama *rango* r (b) *del subconjunto* B el rango del elemento $\sup B$ en el retículo L.

7.156. Demuéstrese que la función de rango r de los subconjuntos del conjunto A de átomos del retículo geométrico L satisface las siguientes condiciones:

a) $r(\varnothing) = 0$;

b) $r(B) \leqslant r(B \cup \{p\}) \leqslant r(B) + 1$;

c) si $r(B) = r(B \cup \{p\}) = r(B \cup \{q\})$, entonces $r(B) = r(B \cup \{p\} \cup \{q\})$, cualesquiera que sean $B \subseteq A$ y $p, q \in A$.

Es evidente que el subconjunto B de átomos del retículo geométrico L será independiente cuando y sólo cuando $r(B) = |B|$ (véa-

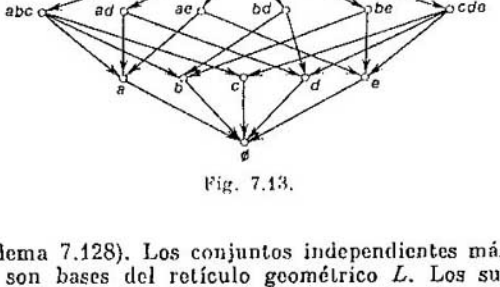


Fig. 7.13.

se el problema 7.128). Los conjuntos independientes máximos (por inclusión) son bases del retículo geométrico L. Los subconjuntos $B \subseteq A$, que no son independientes, se llamarán *dependientes* y los conjuntos dependientes mínimos (por inclusión), *ciclos*. Por ejemplo, en el retículo geométrico representado en la fig. 7.13 los subconjuntos de átomos *ab*; *bcd*, *ade* son independientes; los *abc*; *cde*; *abcd* son dependientes; *abc*; *cde* son ciclos, y *ace*; *bcd*; *acd*, bases.

7.157. Demuéstrese que para el conjunto de todas las bases del retículo geométrico L se cumplen las siguientes condiciones:

a) ningún subconjunto propio de una base será base;

b) para cualesquiera bases B_1 y B_2 y para cada $a \in B_1$ existe un átomo $b \in B_2$ tal que $(B_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ también será una base.

7.158. Demuéstrese que para el conjunto de todos los ciclos de un retículo geométrico L se cumplen las siguientes condiciones:

a) ningún ciclo no es subconjunto propio de otro ciclo;

b) si C_1 y C_2 son ciclos diferentes y $a \in C_1 \cap C_2$, existe un ciclo C_3 tal que $C \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$;

c) si C_1 y C_2 son ciclos diferentes, $a \in C_1 \cap C_2$ y $b \in C_1 \setminus C_2$, entonces existe un ciclo C_3 tal que $b \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$.

Dos elementos a y b del retículo L con complementos se denominan *perspectivos*, si tienen un complemento común, es decir, $a \vee c = b \vee c = 1$, y $a \wedge c = b \wedge c = 0$ para cierto elemento $c \in L$. En este caso el elemento c lleva el nombre de *eje de la perspectiva*.

Si L es un retículo modular con complementos y si sus elementos a y b son perspectivos con el eje de perspectiva c, entonces, al emplear sucesivamente las aplicaciones φ y ψ del problema 7.98:

$$[0, a] = [a \wedge c, a] \to [c, a \vee c] = [c, 1] = \\ = [c, b \vee c] \to [b \wedge c, b] = [0, b],$$

establezcamos el isomorfismo entre los intervalos $[0, a]$ y $[0, b]$. Además, los intervalos $[0, a]$ y $[0, b]$ son proyectivos. Por eso, teniendo en cuenta la analogía con los intervalos proyectivos, emplearemos la designación $a \sim b$ para escribir los elementos perspectivos a y b.

7.159. Sea L un retículo geométrico. Muéstrese que $a \sim b$ en el retículo L cuando y sólo cuando $a \vee x = b \vee x$, y $a \wedge x = b \wedge x$ para cierto elemento $x \in L$.

7.160. Sean a y b los átomos del retículo geométrico L. Demuéstrese que $a \sim b$, cuando y sólo cuando existe un ciclo C del retículo L que contenga a y b simultáneamente.

7.161. Demuéstreso que la relación de perspectividad de los átomos de un retículo geométrico es una relación de equivalencia.

7.162. Compruébese que en los problemas 7.85, 7.93 e), 7.100 h), 7.107 y 7.148 e) son válidas también las afirmaciones inversas.

Diremos que un retículo L con 0 y 1 es *desarrollable*, si existen intervalos no triviales $L_1 = [0, z_1]$ y $L_2 = [0, z_2]$ tales que para cada elemento $x \in L$ se encuentre un único par $(x_1, x_2) \in L_1 \times L_2$ de tal índole que $x = x_1 \vee x_2$. Indiquemos que esto es equivalente a la afirmación de que L es isomorfo a $L_1 \times L_2$.

7.163. Demuéstrese que un retículo *geométrico* es indesarrollable cuando y sólo cuando dos de sus átomos cualesquiera son perspectivos.

7.164. Demuéstrese que cualquier retículo geométrico es isomorfo al producto directo de los retículos geométricos indesarrollables.

7.165. Sean x e y los elementos arbitrarios de un retículo modular geométrico M, y sea z uno de sus átomos tal que $z \leqslant x \vee y$, y $z \not\leqslant y$. Demuéstrese que se encontrará un átomo x' tal que $x' \leqslant x$ y $z \leqslant x' \vee y$.

7.166. Sean a y b dos átomos distintos de un retículo geométrico modular M. Demuéstrese que $a \sim b$ cuando y sólo cuando el elemento $a \vee b$ contiene el tercer átomo $c \in M$.

Se denomina *estructura de incidencia* a un par (P, L) de conjuntos disjuntos P y L, donde P es un conjunto de *puntos* y L, una familia

de *rectas* relacionadas entre sí por la *relación de incidencia*. Se llamará *subespacio* de la estructura de incidencia (P, L) al subconjunto S del conjunto P, para el cual si $p, q \in S$ y $p \neq q$, entonces el conjunto de puntos de una recta que pasa por los puntos p y q también pertenecen a S. Un subespacio se considera *engendrado* por el conjunto de puntos A, si es un subespacio mínimal de la estructura de incidencia que contiene el conjunto A. Dos rectas *se intersecan*, si son incidentes respecto de un mismo punto. Una estructura de incidencia se llama *geometría proyectiva de dimensión proyectiva* $n-1$, si satisface los siguientes cuatro axiomas:

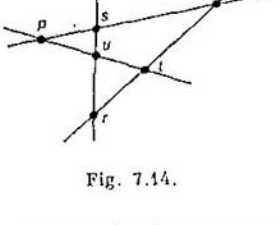


Fig. 7.14.

*PG*1) dos puntos diferentes se ubican en una y sólo una recta;

*PG*2) si una recta corta dos lados de un triángulo (no en el punto de su intersección), entonces corta también su tercer lado (véase fig. 7.14);

*PG*3) cada recta contiene por lo menos tres puntos;

*PG*4) el conjunto de todos los puntos está engendrado por un subconjunto que contiene n puntos, y no es engendrado por ningún subconjunto con número inferior de puntos.

7.167. Muéstrese que una familia de subespacios de la geometría proyectiva forma un retículo puntual.

7.168. Muéstrese que cualesquiera dos rectas distintas de la geometría proyectiva de dimensión proyectiva $n-1$ se intersecan en un punto, si $n \leqslant 3$.

7.169. Demuéstrese que un retículo de los subespacios de la geometría proyectiva de dimensión proyectiva $n-1$ es isomorfo al retículo de subespacios de cierto espacio vectorial n-dimensional para $n \geqslant 4$.

7.170. Demuéstrese que el retículo de los subespacios de la geometría proyectiva es modular.

Así pues, en los problemas 7.167—7.170 se ha establecido que los retículos de los subespacios de una geometría proyectiva son retículos geométricos modulares.

Sea ahora M un retículo geométrico modular. Llamemos *recta* al elemento $x \in M$ con $r(x) = 2$ y *puntos* de la recta x a los átomos del intervalo $[0, x]$. De este modo, hemos difenido la estructura de incidencia $PG(M)$.

7.171. Demuéstrese que la estructura de incidencia $PG(M)$ satisface los axiomas *PG*1, *PG*2 y *PG*4. ¿Podrá ser que en $PG(M)$ no se cumpla el axioma *PG*3?

7.172. Demuéstrese que un retículo geométrico modular M es indesarrollable cuando y sólo cuando la estructura de incidencia $PG(M)$ es una geometría proyectiva.

7.173. ¿Será cierto que cada retículo geométrico modular es un producto directo de un número finito de geometrías proyectivas?

Los retículos L que satisfacen para todos los $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in L$ la desigualdad

$$(a_0 \vee b_0) \wedge (a_1 \vee b_1) \wedge (a_2 \vee b_2) \leqslant$$
$$\leqslant ((c \vee a_1) \wedge a_0) \vee ((c \vee b_1) \wedge b_0),$$

donde $c = ((a_0 \vee a_1) \wedge (b_0 \vee b_1)) \wedge (((a_0 \vee a_2) \wedge (b_0 \vee b_2)) \vee ((a_1 \vee a_2) \wedge (b_1 \vee b_2)))$, se denominan *arguesanos*.

7.174. Demuéstrese que del carácter arguesano de un retículo se deduce su modularidad.

7.175. Sea M un retículo geométrico modular. Demuéstrese que en la geometría proyectiva $PG(M)$ se verifica el teorema de Desargue (véase el capítulo V, § 3) cuando y sólo cuando el retículo M satisface la identidad arguesana.

7.176. Sea M un retículo geométrico indesarrollable de longitud no inferior a 4. Demuéstrese que M es un retículo arguesano.

Sea L un retículo geométrico de longitud finita. Denotemos por $E(i)$ el conjunto de todos los elementos del retículo L de rango i, y supongamos que $W_i = |E(i)|$. Es evidente que el conjunto $E(i)$ es una anticadena del retículo L.

7.177. Sea L un retículo geométrico de longitud finita, en el cual cualquier elemento a de rango i se cubre por k_i elementos y cubre m_i elementos (los números k_i y m_i sólo dependen del rango i). Demuéstrese que la anchura de L es igual a $\max\limits_{i:0 \leqslant i \leqslant r(L)} W_i$.

7.178. Demuéstrese que si L es un retículo geométrico de rango n, entonces

$$W_1 \leqslant W_t \quad \text{para } t = 2, 3, \ldots, n-1$$

y

$$W_1 + \ldots + W_k \leqslant W_{n-k} + \ldots + W_{n-1}, \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n-2.$$

7.179. Sea L un retículo geométrico de rango n. Demuéstrese que para cualquier $k = 1, 2, \ldots, n-2$ la igualdad

$$W_1, \ldots + W_k = W_{n-k} + \ldots + W_{n-1}$$

se verifica si y sólo si el retículo L es modular.

7.180. Sea L un retículo geométrico modular de rango n. Demuéstrese que $W_k = W_{n-k}$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n$.

§ 3. Funciones de incidencia e inversión de Moebius

Sea P un conjunto parcialmente ordenado y localmente finito y sea K un campo de característica 0 (habitualmente, un campo de los números reales). Veamos una clase $A(P)$ de funciones $f(x, y)$ que toman valores en el campo K y que están definidas para cualesquiera $x, y \in P$. Exijamos que $f(x, y) = 0$, si no se cumple la condición

$x \leqslant y$. La *suma* de dos tales funciones, como también la *multiplicación por los escalares* se definirán del modo siguiente:

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$
$$(\alpha \cdot f)(x, y) = \alpha \cdot f(x, y);$$

mientras que el *producto* (o *convolución*) $f*g$ se definirá así:

$$(f*g)(x, y) = \sum_{z : x \leqslant z \leqslant y} f(x, z)\, g(z, y).$$

La convolución está definida correctamente, pues, por ser localmente finito el conjunto parcialmente ordenado P, en el segundo miembro es finito el número de sumandos y $(f*g)(x, y) = 0$ cada vez que $x \not\leqslant y$.

El conjunto $A(P)$ con operaciones de sumación, multiplicación por escalares y convoluciones recibe el nombre de *álgebra de incidencia del conjunto parcialmente ordenado P sobre el campo K*, y sus elementos, de *funciones de incidencias* del conjunto P. Entre las funciones de incidencia en $A(P)$ destaquemos las siguientes:

función de Kronecker (o bien función delta)

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ si } x = y; \\ 0, \text{ en el caso contrario;} \end{cases}$$

función zeta

$$\xi(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \leqslant y; \\ 0, \text{ en el caso contrario;} \end{cases}$$

función lambda

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ si } x = y, \text{ o bien } y \text{ cubre } x; \\ 0, \text{ en el caso contrario} \end{cases}$$

función de las cadenas (o bien función eta)

$$\eta(x, y) = \xi(x, y) - \delta(x, y);$$

función de recubrimiento (o bien función kappa)

$$\varkappa(x, y) = \lambda(x, y) - \delta(x, y);$$

función de Moebius

$$\mu(x, y) = \xi^{-1}(x, y);$$

función de la longitud (o bien función rho)

$$\rho(x, y) = l(x, y),$$

donde $l(x, y)$ es la longitud del intervalo $[x, y]$ en P. Las razones que nos hacen destacar estas funciones y sus nombres se aclararán después de resolver algunos problemas correspondientes.

7.181. Compruébese que la convolución de las funciones de incidencia es asociativa y la función de Kronecker sirve de elemento neutral respecto de la convolución.

7.182. Pruébese que una convolución en $A(P)$ es conmutativa cuando y sólo cuando P es una anticadena.

7.183. Demuéstrese que una función de incidencia f en $A(P)$ tiene tanto la función inversa izquierda como la función inversa derecha respecto de la operación de convolución cuando y sólo cuando $f(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$. ¿Coincidirán entre sí las funciones inversas derecha e izquierda?

7.184. ¿Por qué es correcta la definición de la función de Moebius como función inversa de la función zeta?

7.185. Compruébese que la función de Moebius $\mu(x, y)$ de un conjunto parcialmente ordenado localmente finito P puede ser calculada de un modo recurrente con ayuda de la fórmula:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \not\leqslant y; \\ 1, & \text{si } x = y; \\ -\sum\limits_{z: x < z \leqslant y} \mu(z, y) = -\sum\limits_{z: x \leqslant z < y} \mu(x, z), \end{cases}$$

si $x < y$.

7.186. Sea P^* un conjunto parcialmente ordenado dual respecto de P y supongamos que $f(x, y) \in A(P)$, y $f^*(x, y) \in A(P^*)$. Compruébese que $f^*(x, y) = f(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in P$, cuando $f(x, y)$ es una de las funciones de incidencia analizadas más arriba.

7.187. Demuéstrense las siguientes identidades:

a) $$\zeta^n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \eta^i(x, y);$$

$$\eta^n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{k}{i} \zeta^i(x, y);$$

b) $$\lambda^n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \varkappa^i(x, y);$$

$$\varkappa^n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \lambda^i(x, y);$$

c) $(\varkappa * \zeta)(x, y)$ = al número de todos los átomos en el intervalo $[x, y]$ de P;

d) $(\zeta * \varkappa)(x, y)$ = al número de todos los coátomos en el intervalo $[x, y]$ de P;

e) $\eta^k(x, y)$ = al número de todas las cadenas de longitud k entre x e y en P;

f) $\varkappa^k(x, y)$ = al número de todas las cadenas máximas de longitud k entre x e y en P;

g) $\zeta^2(x, y) = |[x, y]|$.

7.188. Demuéstrese el *teorema de Stanly*: sean P y Q los conjuntos parcialmente ordenados localmente finitos y sea K cierto campo. Entonces, si las álgebras de incidencia $A(P)$ y $A(Q)$ sobre el campo K son isomorfas, lo serán también los conjuntos parcialmente ordenados P y Q.

Muy a menudo se considera en las aplicaciones no toda el álgebra de incidencia $A(P)$ en su integridad, sino ciertas subálgebras, exigiendo que las funciones de incidencia tengan o valores constantes en los intervalos isomorfos del conjunto ordenado P, o bien la llamada multiplicatividad. Supongamos que P es un retículo. La función de incidencia $f \in A(P)$ se llama multiplicativa, si para cualesquiera $x, y \in P$ de la condición

$$[x \wedge y, x \vee y] \cong [x \wedge y, x) \times [x \wedge y, y]$$

se deduce que

$$f(x \wedge y, x \vee y) = f(x \wedge y, x) \cdot f(x \wedge y, y).$$

Como ejemplos de funciones multiplicativas de incidencia para los retículos intervienen δ, ζ y ζ^2.

7.189. Demuéstrese que si f es una función inversa multiplicativa de $A(P)$, entonces $f(x, x) = 1$, cualquiera que sea $x \in P$.

7.190. Sea $S(P)$ un subconjunto de todas las funciones de incidencia $f \in A(P)$, para las cuales del isomorfismo de cualesquiera intervalos $[x, y]$ y $[a, b]$ en un conjunto parcialmente ordenado P se deduce que $f(x, y) = f(a, b)$. Demuéstrese que $S(P)$ es una subálgebra del álgebra de incidencia $A(P)$ que lleva el nombre de *álgebra estándar*.

7.191. Compruébese que si una función de incidencia pertenece al álgebra estándar $S(P)$ y es invertible en $A(P)$, será invertible también en $S(P)$.

7.192. ¿Pertenecerán al álgebra estándar $S(P)$ de un conjunto parcialmente ordenado P todas las funciones examinadas más arriba?

7.193. Sea P un retículo. Demuéstrese que todas las funciones invertibles multiplicativas de $S(P)$ forman un grupo respecto de la operación de convolución.

7.194. Calcúlense las funciones de Moebius para los siguientes conjuntos parcialmente ordenados:

a) anticadena;

b) subconjunto $N = \{0, 1, \ldots, k\}$ de números enteros con orden corriente;

c) booleano $\mathcal{P}(S_n)$;

d) conjunto de todos los divisores enteros no negativos de un número natural n, ordenado según la divisibilidad;

e) belliano $B(S_n)$ sobre el conjunto S_n, donde $|S_n| = n$;

f) conjunto de todos los subespacios de un espacio vectorial n-dimensional V_n sobre un campo finito con q elementos, ordenado por inclusión;

g) conjunto de todas las caras de un poliedro Π_n ordenado por inclusión.

7.195. Demuéstrese la *I^a fórmula de inversión de Moebius*: supongamos que g y f son las funciones definidas en el conjunto finito parcialmente ordenado P con valores en el conjunto de números reales y que

$$g(x) = \sum_{y:\, y \leqslant x} f(y) \quad \text{para todo } x \in P.$$

Entonces

$$f(x) = \sum_{y:\, y \leqslant x} g(y)\, \mu(y, x) \quad \text{para todo } x \in P.$$

7.196. Demuéstrese *la 2ª fórmula de inversión de Moebius*: sean g y f unas funciones definidas sobre un conjunto finito parcialmente ordenado P con valores en el conjunto de números reales y supongamos que

$$g(x) = \sum_{y:\, y \geqslant x} f(y) \quad \text{para } x \in P.$$

Entonces

$$f(x) = \sum_{y:\, y \geqslant x} \mu(x, y)\, g(y) \quad \text{para todo } x \in P.$$

7.197. Las fórmulas de inversión de Moebius son válidas también para los conjuntos parcialmente ordenados y localmente finitos. En este caso, con el fin de garantizar la finitud de las sumas, se impone una condición adicional. Formúlen su propia versión de una de las fórmulas de inversión de Moebius para el conjunto parcialmente ordenado y localmente finito.

7.198. Sean g y f las funciones reales, definidas sobre un conjunto $N = \{0, 1, \ldots, n\}$ con orden corriente. Cerciórese de que para $\forall m \in N$ se verifican las relaciones:

a) $g(m) = \sum_{i=0}^{m} f(i) \iff f(m) = g(m) - g(m-1)$;

b) $g(m) = \sum_{i=m}^{n} f(i) \iff f(m) = g(m) - g(m+1)$.

7.199. Sean g y f las funciones reales definidas sobre un booleano $\mathfrak{P}(S_n)$. Cerciórese de que para $\forall B \in \mathfrak{P}(S_n)$ se verifican las siguientes relaciones:

a) $g(B) = \sum_{A:\, A \subseteq B} f(A) \iff f(B) = \sum_{A:\, A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} g(A)$;

b) $g(B) = \sum_{A:\, A \supseteq B} f(A) \iff f(B) = \sum_{A:\, A \supseteq B} (-1)^{|B|-|A|} g(A)$.

Sea P un conjunto finito parcialmente ordenado y $|P| = n$. Hagamos extender el orden prefijado en éste hasta que se obtenga el orden lineal, el cual dispondrá los elementos del conjunto P en una sucesión finita $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de un modo tal que si $x_i \leqslant x_j$ en P, entonces $i \leqslant j$ (véase el problema 7.34). Ahora, a toda función de incidencia $f(x, y)$ de $A(P)$ pongamosle en correspondencia una matriz $F = (f_{ij})_{i,j=1-n}$ con elementos del campo K, en la cual las filas y las columnas están coordenadas con la numeración de los elementos de P, a saber:

$$f_{ij} = f(x_i, x_j).$$

7.200. Escríbase la matriz de la función zeta para los siguientes conjuntos parcialmente ordenados:

a) el booleano $\mathfrak{P}(S_3)$, donde $S_3 = \{a, b, c\}$;

b) la cadena de 5 elementos;

c) la anticadena de 5 elementos.

¿Pará que la matriz de una función de incidencia no sea triangular superior?

7.201. Muéstrese que si P es un conjunto finito parcialmente ordenado, la matriz de incidencia $A(P)$ puede ser considerada como subálgebra del álgebra de todas las matrices triangulares de orden $|P|$.

7.202. Sean Δ, Z, H y M las matrices de la función de Kronecker, de la función zeta, de la función de cadenas y de la de Moebius provenientes de $A(P)$, respectivamente. Supongamos, además, que E es la matriz unidad y 0, una matriz compuesta únicamente de ceros. Enúnciese la afirmación del problema 7.183 para las matrices triangulares superiores. Compruébese que $\Delta = E$; $H^k = 0$ para todo $k > l$, y $M = Z^{-1}(\Delta + H)^{-1} = E - H + H^2 - H^3 + \ldots$ $\ldots + (-1)^l H^l$, donde l es la longitud del conjunto parcialmente ordenado P. Observemos que $l < n$.

7.203. Sean P un conjunto finito parcialmente ordenado, $\mu(x, y)$, su función de Moebius y $C_k(x, y)$, el número de cadenas de longitud k entre los elementos x e y en P. Demuéstrese la *fórmula de P. Hall*:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{l} (-1)^k C_k(x, y), & \text{si } x < y; \\ 1, & \text{si } x = y; \\ 0, & \text{en el caso contrario,} \end{cases}$$

donde l es la longitud del conjunto parcialmente ordenado P.

7.204. Supongamos que A es un conjunto parcialmente ordenado, φ, el operador de clausura en A, y Q, un conjunto parcialmente ordenado de todos los elementos φ-cerrados de A. Demuéstrese el *teorema de Rota*:

$$\sum_{z \in A:\ \varphi(z) = \varphi(y)} \mu_A(x, z) = \begin{cases} \mu_Q(\varphi(x), \varphi(y)), & \text{si } x = \varphi(x); \\ 0, & \text{si } x < \varphi(x). \end{cases}$$

7.205. Supongamos que $\mathcal{P}(S)$ es un booleano sobre el conjunto finito S; φ es el operador de clausura definido en $\mathcal{P}(S)$, y Q, un conjunto de todos los subconjuntos φ-cerrados del conjunto S, con la particularidad de que $\varphi(\varnothing) = \varnothing$. Demuéstrese que si r_k es el número de k-subconjuntos X del conjunto S, para los cuales $\varphi(X) = S$, entonces

$$\mu_Q(0, 1) = \sum_{k=1}^{|S|} (-1)^k r_k.$$

El problema que sigue, en el que están formulados los resultados del teorema de P. Hall (Hall P. "Proc. London Math. Soc.", 1934, 36 (2), p. 29 —95) es de gran importancia desde el punto de vista teórico, pues establece la relación entre la propiedad de la función de Moebius de ser distinta de cero y las propiedades del retículo de ser puntual o con complementos.

7.206. Sea L un retículo finito. Demuéstrense las afirmaciones de P. Hall:

a) si 0 no es una intersección de los coátomos del retículo L, o bien si 1 no es una unión de los átomos del retículo L, entonces $\mu(0, 1) = 0$;

b) si $x, y \in L$, $x \leqslant y$, e y no son una unión de elementos que cubren x, o si x no es una intersección de los elementos que se cubren por y, entonces $\mu(x, y) = 0$.

7.207. Sea L un retículo finito. ¿Serán válidas las siguientes afirmaciones:

a) si $\mu(0, 1) \neq 0$, entonces L es un retículo con complementos;

b) si $\mu(x, y) \neq 0$ para cualesquiera $x, y \in L$, $x \leqslant y$, entonces L es un retículo con complementos relativos;

c) si L es un retículo semimodular y si $\mu(0, 1) \neq 0$, entonces L es un retículo geométrico;

d) si L es un retículo con complementos (relativos), entonces $\mu(0, 1) \neq 0$;

e) si L es un retículo geométrico, entonces $\mu(x, y) \neq 0$ para cualesquiera $x, y \in L$ y $x \leqslant y$.

7.208. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si L es un retículo distributivo, entonces

$$\mu(0, 1) = \begin{cases} (-1)^{r(L)}, & \text{si } L \text{ es un retículo geométrico;} \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$$

b) si L es un retículo modular indesarrollable, entonces

$$\mu(0, 1) = \begin{cases} (-1)^{r(L)} q^{\binom{r(L)}{2}}, & \text{si } L \text{ es un retículo geométrico} \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

donde q es la potencia de cierto número primo.

7.209. Sea L un retículo finito y supongamos que $a \in L$ y $a^{\perp}$ es un conjunto de todos los complementos de a en L. Demuéstrese el *teorema de Crapo*:

$$\mu(0, 1) = \sum_{w,\, z \in a^{\perp}} \mu(0, w)\, \zeta(w, z)\, \mu(z, 1).$$

7.210. Sea L un retículo finito y supongamos que $x, y, z \in L$ y $x \leqslant z \leqslant y$. Demuéstrese la fórmula de Weisner:

$$\sum_{t \in L:\ t \vee z = y} \mu(x, t) = \begin{cases} \mu(x, y), & \text{si } z = x, \\ 0, & \text{si } z \neq x. \end{cases}$$

7.211. Sea L un retículo finito. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si $a \in L$ y $a > 0$, entonces para todo $b \in L$

$$\sum_{t \in L:\ t \vee a = b} \mu(0, t) = 0;$$

b) si $a \in L$ y $a < 1$, entonces para todo $b \in L$

$$\sum_{t \in L:\ t \wedge a = b} \mu(t, 1) = 0.$$

7.212. Sea L un retículo finito. Demuéstrese que son válidas las siguientes afirmaciones:

a) si L carece de complementos, entonces $\mu(0, 1) = 0$;

b) si L es modular, entonces $\mu(0, 1) = \mu(0, a) \times \sum_{z \in a^{\perp}} \mu(0, z)$, para todo $a \in L$;

c) si L es un retículo geométrico, $x, y \in L$ y $x \leqslant y$, entonces $\mu(x, y) \neq 0$, con la particularidad de que $\mu(x, y) > 0$, si $r(y) - r(x)$ es par, y $\mu(x, y) < 0$, si $r(y) - r(x)$ es impar;

d) si L es distributivo, $x, y \in L$ y $x \leqslant y$, entonces

$$\mu(x, y) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{si } y \text{ es igual a la unión de } n \text{ elementos} \\ & \text{diferentes que cubren } x; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Sean P y L los conjuntos parcialmente ordenados. Un par (σ, τ) de aplicaciones δ: $P \to L$ y τ: $L \to P$ se llama correspondencia de Galois entre P y L, si para cualesquiera $x, y \in P$ y cualesquiera $a, b \in L$ se cumplen las siguientes condiciones:

a) si $x \leqslant y$ en P, entonces $\sigma(x) \geqslant \sigma(y)$ en L;

b) si $a \leqslant b$ en L, entonces $\tau(a) \geqslant \tau(b)$ en P;

c) $x \leqslant \tau\sigma(x)$ para cualesquiera $x \in P$ y $a \leqslant \sigma\tau(a)$ para todo $a \in L$.

7.213. Sea R una relación binaria, $R \subseteq S \times T$. Definamos la aplicación σ: $\mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(T)$ del modo siguiente:

$$\sigma(A) = \begin{cases} \{z \in T \mid (x, z) \in R \text{ para todo } x \in A, & \text{si } A \neq \varnothing; \\ T, & \text{si } A = \varnothing. \end{cases}$$

De un modo análogo definamos la aplicación τ: $\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(S)$. Demuéstrese que (σ, τ) es la correspondencia de Galois entre los booleanos $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{P}(T)$.

7.214. Sea $(\sigma; \tau)$ una correspondencia de Galois entre los conjuntos parcialmente ordenados P y L. Demuéstrese que:

a) $\sigma\tau\sigma = \sigma$ y $\tau\sigma\tau = \tau$;

b) $\tau\sigma$ y $\sigma\tau$ son operadores de clausura sobre P y L, respectivamente.

7.215. Sean P y L conjuntos finitos parcialmente ordenados (P posee 0, y L poseo tanto 0 como 1), en tanto que (σ, τ) es una correspondencia de Galois entre P y L tal que

a) $\tau(a) = 0$ cuando y sólo cuando $a = 1$;

b) $\sigma(0) = 1$.

Demuéstrese que si μ_P y μ_L son funciones de Moebius de los conjuntos parcialmente ordenados P y L, entonces

$$\mu_L(0, 1) = \sum_{x \in P\,:\, x > 0} \mu_P(0, x)\, \zeta_L(\sigma(x), 0) = \sum_{x \in P:\ \sigma(x) \neq 0} \mu_P(0, x)$$

7.216. Sean f: $P \to L$, g: $L \to P$ unas funciones que conservan el orden entre P y L (el conjunto parcialmente ordenado P posee 1, y L, tanto 0, como 1), tales que

a) $g(a) = 1$ cuando y sólo cuando $a = 1$;

b) $f(1) = 1$;

c) $fg(a) \geqslant a$ para todo $a \in L$ y $gf(x) \leqslant x$ para todo $x \in P$.

Demuéstrese que en este caso

$$\mu_L(0, 1) = \sum_{x \in P : x < 1} \mu_P(x, 1)\, \zeta_L(f(x), 0) = \sum_{x \in P : f(x) = 0} \mu_P(x, 1).$$

7.217. Demuéstrese que si (σ, τ) es una correspondencia de Galois entre los conjuntos parcialmente ordenados P y L, entonces para todo $x \in P$ y todo $y \in L$ se verifica la siguiente relación:

$$\sum_{z \in P:\ \sigma(z) = y} \mu_P(x, z) = \sum_{v \in L:\ \tau(u) = x} \mu_L(y, u) =$$

$$= \begin{cases} \mu_P(x, \tau(y)), & \text{si } x = \tau\sigma(x) \text{ e } y = \sigma\tau(y); \\ 0 & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

§ 4. Problemas mixtos sobre conjuntos parcialmente ordenados

7.218. Está dado un alfabeto $\{a_1, \ldots, a_n\}$. ¿Cuántas palabras de longitud $2n$ pueden formarse a partir de él, con la particularidad de que las palabras han de contener una letra exactamente dos veces y, además, no debe haber al lado dos letras iguales?

7.219. Supongamos que se tiene un stock ilimitado de cuentas de vidrio que tienen colores distintos. ¿Cuántos collares diferentes pueden confeccionarse a partir de n cuentas? Los collares se consideran

iguales, si se obtienen uno de otro por desplazamiento cíclico de las cuentas.

7.220. A una mesa redonda han de sentarse n cónyuges. ¿De cuántos modos puede hacerse, si se requiere que los varones y las mujeres se alternen y que ningún marido se sitúe al lado de su esposa.

7.221. Sea $L(G)$ un conjunto de todos los subgrafos del gráfo G obtenidos a partir de G haciendo encoger cierto subconjunto de sus aristas. Diremos que $H \leqslant T$ en $L(G)$, $H, T \in L(G)$, si H es un subgrafo del grafo T. Demuéstrese que $(L(G), \leqslant)$ es un retículo geométrico.

7.222. Sea $L(G)$ un conjunto de todos los subgrafos del grafo G que se obtienen de G por contracción de cierto subconjunto de sus aristas (véase el problema 7.221). Demuéstrese que

$$P(G; \lambda) = \sum_{H \in L(G): H \leqslant G} |\lambda|^{|V(H)|} \mu(H, G),$$

donde $V(H)$ es el conjunto de vértices del grafo H; $\mu(H, G)$ es la función de Moebius del retículo geométrico $L(G)$.

Sea P un conjunto finito parcialmente ordenado con 0, 1 y la función de rango r. El polinomio $\chi(P; x) = \sum_{a \in P} \mu(0, a)\, x^{r(1)-r(a)}$ se llama *polinomio característico del conjunto parcialmente ordenado* P.

7.223. Hállense los polinomios característicos:

a) para un booleano $\mathcal{P}(S_n)$;

b) para un conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{D}(n)$ de divisores de un número natural ordenados según la divisibilidad.

7.224. Sea P un conjunto finito parcialmente ordenado con 0 y 1 que cuenta con una función de rango r. Demuéstrese que si $P = P_1 \times P_2$, entonces $\chi(P; x) = \chi(P_1; x)\, \chi(P_2; x)$.

7.225. Hállense los polinomios característicos para los conjuntos parcialmente ordenados estudiados en el § 1 de este capítulo.

En vista de los razonamientos evidentes (véase el problema 7.222), $P(G, \lambda)$ se denomina *polinomio cromático del grafo* G. La relación existente entre los polinomios cromáticos y característicos, así como también los polinomios característicos para el caso en que P es un retículo geométrico, se analizarán detalladamente en el capítulo VIII. Sea V_n un espacio vectorial de n dimensión sobre el campo $GF(q)$; $G(n, q)$, el *número de Galois* (el número de todos los espacios de V_n) y $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]_q$, el coeficiente *q-binomial de Gauss* (el número de espacios de k-dimensiones de V_n) (véase la solución del problema 7.33).

7.226. Compruébese la validez de las siguientes relaciones:

a) $|V_n| = q^n$;

b) $G(n, q) = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]_q$;

c) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} (q^i - 1)}{\prod_{i=1}^{k} (q^i - 1) \prod_{i=1}^{n-k} (q^i - 1)}$, para $k = 0, 1, \ldots, n$;

d) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$, para $k = 0, 1, \ldots, n$;

e) $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q < \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q < \ldots < \begin{bmatrix} n \\ \frac{n}{2} \end{bmatrix}_q > \begin{bmatrix} n \\ \frac{n}{2}+1 \end{bmatrix}_q > \ldots > \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q$, si

n es par, y

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q < \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q < \ldots < \begin{bmatrix} n \\ \frac{n-1}{2} \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}_q > \ldots > \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q,$$

si n es impar;

f) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$ para $k = 1, 2, \ldots, n$;

g) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{q^{n-k}}{q^{k-1}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$ para $k = 1, 2, \ldots, n$;

h) $\sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \begin{bmatrix} 2m \\ r \end{bmatrix}_q = (1-q)(1-q^3) \ldots (1-q^{2m-1})$;

i) $\sum_{r=0}^{2m+1} (-1)^r \begin{bmatrix} 2m+1 \\ r \end{bmatrix}_q = 0$;

q) $G(n+1, q) = 2G(n, q) + (q^n - 1) G(n-1) q$;

k) $1 = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q G(k, q) (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}}$.

7.227. Sea a un átomo arbitrario (hiperplano en V_n) en el retículo $L(V_n)$ de los subespacios de un espacio vectorial n-dimensional V_n sobre el campo $GF(q)$. ¿Cuán grande puede ser el número de subespacios x de V_n con las propiedades $a \wedge x = 0$ y $r(x) \neq 0$ en $L(V_n)$? Recordemos que en los retículos modulares la función de rango coincide con la dimensión.

7.228. ¿Cuán grande puede ser el número de subespacios disjuntos dos a dos del espacio V_n de dimensión k? ¿Cómo puede ser de grande este número si la condición es que la dimensión de una intersección no es inferior a l?

7.229. Si $d_1, \ldots, d_m$ son divisores distintos del número N, entre los cuales cualesquiera dos tienen divisor común superior a la unidad, ¿cuán grande puede ser m?

7.230. Supongamos que $\mathscr{B}(S_n)$ es un belliano sobre el n-conjunto S_n. $\pi, \sigma \in \mathscr{B}(S_n)$, $\pi \leqslant \sigma$ y $b(\sigma)$ es el número de bloques en la partición σ. Demuéstrese que $[\pi\sigma] \cong \coprod_{i=1}^{b(\sigma)} \mathscr{B}(S_{m_i})$ para ciertos números no negativos m_i tales que $\sum_{i=1}^{b(\sigma)} m_i = b(\pi)$. En particular, $[\pi, 1] \cong \mathscr{B}(S_{b(\pi)})$ y $[0, \pi] \cong \coprod_{i=1}^{b(\pi)} \mathscr{B}(S_{n_i})$, donde $\pi = (A_1, \ldots, A_{b(\pi)}) \in \mathscr{B}(S_n)$ y $|A_i| = n_i$; $i = 1, \ldots, b(\pi)$.

El problema 7.230 permite introducir para cualesquiera $\pi, \sigma \in \mathscr{B}(S_n)$ de un modo formal el concepto de tipo del intervalo $[\pi, \sigma]$ y de tipo del elemento π:

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es el *tipo del intervalo* $[\pi, \sigma]$,

$$\text{si } [\pi, \sigma] = \coprod_{i=1}^{n} [\mathscr{B}(S_i)]^{\alpha_i},$$

y

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es el *tipo de la partición* π,

$$\text{si } [0, \pi] \cong \coprod_{i=1}^{n} [\mathscr{B}(S_i)]^{\alpha_i},$$

es decir, si π contiene exactamente α_i bloques de potencia i para $i = 1, \ldots, n$.

7.231. ¿Cuántos elementos del tipo fijo $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ están contenidos en un belliano $\mathscr{B}(S_n)$?

7.232. Sea $\pi = (A_1, \ldots, A_{b(\pi)}) \in \mathscr{B}(S_n)$, $|A_i| = n_i$ para $i = 1, 2, \ldots, b(\pi)$ y $\sum_{i=1}^{b(\pi)} n_i = n$. Hállense $|[0, \pi]|$ y $|[\pi, 1]|$.

Supongamos que $\mathscr{B}(S_n)$ es un belliano sobre el n-conjunto S_n; $B(n)$ es el *número de Bell* (el número de todas las particiones de $\mathscr{B}(S_n)$, y $S(n, k)$, el *número de Stirling de segundo genero* (número de todas las particiones de $\mathscr{B}(S_n)$ con k bloques exactamente).

7.233. Demuéstrese la validez de las siguientes identidades:

a) $B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$;

b) $S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$;

c) $S(n+1, k) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} S(j, k-1)$;

d) existe un k tal que

$$S(n, 0) < S(n, 1) < \ldots < S(n, k-1) \leqslant S(n, k) > S(n, k+1) > \ldots$$
$$\ldots > S(n, n);$$

e) $B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$;

f) $1 = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h-1} (h-1)! \times$

$$\times \sum_{\substack{1\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+n\alpha_n=n \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=h}} \frac{n! B(1)^{\alpha_1} \ldots B(n)^{\alpha_n}}{\alpha_1! \ldots \alpha_n! (1!)^{\alpha_1} \ldots (n!)^{\alpha_n}}$$

7.234. Demuéstrese que el número de grafos conexos simples con vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$ es igual a

$$\sum_{(b_1, \ldots, b_n): \sum_{i=1}^{n} i b_i = n} (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)-1} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) - 1\right)! \, 2^{\sum_{i=2}^{n} \left(b_i \binom{i}{2}\right)}$$

Sea K un retículo distributivo con 0 y 1. Una función real μ, definida en K, recibe el nombre de *función submodular*, si para cualesquiera $x, y \in K$

$$\mu(x) + \mu(y) \geqslant \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y).$$

Si para cualesquiera $x, y \in K$ se verifica la igualdad

$$\mu(x) + \mu(y) = \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y),$$

μ será *función modular*.

7.235. Dense ejemplos de funciones modulares y submodulares.

7.236. Sean L un subretículo del retículo distributivo K, μ, una función submodular en K y, $a, b \in L$ tales que

$$\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b).$$

Demuéstrese que para todo $x \in [a \wedge b, a \vee b]$ se verifican las siguientes igualdades:

a) $\mu(x) + \mu(a) = \mu(x \vee a) + \mu(x \wedge a)$;

b) $\mu(x) + \mu(b) = \mu(x \vee b) + \mu(x \wedge b)$;

c) $\mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) = \mu(x) + \mu(a \wedge b)$;

d) $\mu(x \vee a) + \mu(x \vee b) = \mu(a \vee b) + \mu(x)$.

7.237. Sea L un subretículo del retículo distributivo K tal que para cualesquiera $a, b \in L$ se verifica la desigualdad

$$\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b).$$

Demuéstrese que si $a,\ a',\ b,\ b' \in L$ y $[a,\ a'] \sim [b,\ b']$, entonces

$$\mu\ (x) - \mu\ (\pi\ (x)) = \mu\ (a) - \mu\ (b) = \mu\ (a') - \mu\ (b')$$

para todo $x \in [a,\ a']$ en K, donde π es un isomorfismo natural de $[a,\ a']$ en $[b,\ b']$, condicionado por la proyectividad de los intervalos.

Supongamos que μ es una función submodular sobre K; L, un subretículo del retículo K con un elemento mínimal a^- y en elemento maximal a^+; $a^- = a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n = a^+$, y $a^- = a'_0,\ a'_1,\ \ldots,\ a'_m = a^+$ son cadenas máximas arbitrarias que en L van de a^- a a^+ ($n = m$, en virtud del problema 7.109). Definamos en K dos funciones nuevas μ_i y μ'_i del modo siguiente:

$$\mu_i\ (x) = \mu\ (x) - \mu\ (a_{i-1}) \quad \text{para todo } x \in [a_{i-1},\ a_i], \tag{7.3}$$

$$\mu'_i\ (x) = \mu\ (x - \mu\ (a'_{i-1}) \text{ para todo } x \in [a'_{i-1},\ a'_i], \tag{7.4}$$

donde $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Si los intervalos $[0,\ a^-]$ y $[a^+,\ 1]$ no son vacíos definamos en ellos adicionalmente las funciones μ_i y μ'_i de un modo igual, poniendo

$$\mu_0\ (x) = \mu'\ (x) = \mu\ (x) \quad \text{para } x \in [0,\ a^-], \tag{7.5}$$

$$\mu_{n+1}\ (x) = \mu'_{n+1}\ (x) = \mu\ (x) - \mu\ (a^+)$$
$$\text{para todo } x \in [a^+,\ 1] \tag{7.6}$$

7.238. Supongamos que L es un subretículo del retículo distributivo finito K; μ es una función submodular sobre K; $\mu_i\ (x)$ y $\mu'_i(x)$ son funciones en K definidas, al igual que en (7.3) y (7.4), con ayuda de dos diferentes cadenas máximas $a^- = a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n = a^+$ y $a^- = a'_0,\ a'_1,\ \ldots,\ a'_n = a^+$ del retículo L; σ es la permutación de índices $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ tal que $[a_{i-1},\ a_i] \sim [a_{\sigma(i)-1},\ a'_{\sigma(i)}]$ para $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ (σ está definida unívocamente, en virtud del problema 7.146); π es el isomorfismo natural de $[a_{i-1},\ a_i]$ en $[a'_{\sigma(i)-1},\ a'_{\sigma(i)}]$, condicionado por la proyectividad de los intervalos. Demuéstrese la *condición de Jordan—Hölder para las funciones submodulares*: para todo $x \in [a_{i-1},\ a_i]$ y cualquier $i,\ i = 1,\ \ldots,\ n$, la igualdad $\mu_i\ (x) = \mu'_{\sigma(i)}\ (\pi_i\ (x))$ se verifica cuando y sólo cuando $\mu\ (a) + \mu\ (b) = \mu\ (a \wedge b) + \mu\ (a \vee b)$, cualesquiera que sean $a,\ b \in L$.

Un subretículo L del retículo distributivo K se denomina μ-esqueleto, si para la función submodular μ, definida sobre K, se verifica la igualdad

$$\mu\ (a) + \mu\ (b) = \mu\ (a \vee b) + \mu\ (a \wedge b),$$

cualesquiera que sean $a,\ b \in L$.

7.239. Sea μ una función submodular sobre el booleano $\mathfrak{B}\ (S)$. Demuéstrese que si un subretículo L del booleano $\mathfrak{B}\ (S)$ es un μ-esqueleto, la familia de funciones submodulares $\{\mu_i;\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ n + 1\}$ definidas según las fórmulas (7.3—7.6) no depende de la elección de las cadenas máximas en L.

Sea que $\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i(x)$, donde $\mu_i(x)$ son funciones submodulares sobre el retículo distributivo K y $c_i > 0$ para todo i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

7.240. ¿Será la $\mu(x)$ una función submodular sobre K?

7.241. Sea mín $\{\mu(x)\} = w$. Demuéstrese que si para ciertos $y_1, y_2 \in K$ $\mu(y_1) = \mu(y_2) = w$, entonces $\mu(y_1 \vee y_2) = \mu(y_1 \wedge y_2) = w$.

7.242. En el problema anterior se ha establecido que la familia L de todos los elementos del retículo distributivo K, sobre los cuales la función submodular μ alcanza su mínimo, forma el μ-esqueleto del retículo K. Compruébese que L es también μ_i-esqueleto para todo i, $i = 1, \ldots, m$.

El $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$-esqueleto obtenido L del retículo K depende no sólo de las funciones submodulares μ_i, sino también de los coeficientes positivos c_i. Por eso denotemos el μ-esqueleto L por $L(c_1, \ldots, c_m)$, subrayando su dependencia de $c_1, \ldots, c_m$. Entonces $L(c'_1, \ldots, c'_m)$ será el μ'-esqueleto del retículo K, donde $\mu'(x) = \sum_{i=1}^{m} c'_i \mu_i(x)$. Es evidente que

$$L(\lambda c_1, \lambda c_2, \ldots, \lambda c_m) = L(c_1, \ldots, c_m) \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

7.243. Supongamos que $y \in L(c_1, \ldots, c_m)$ e $y' \in L(c'_1, \ldots, c'_m)$, con la particularidad de que las funciones submodulares $\mu_i(x)$ son, para $i = 1, 2, \ldots, p$, no decrecientes y, además son no crecientes cuando $i = p + 1, \ldots, q$, mientras que los coeficientes c_i y c'_i están ligados entre sí por las desigualdades: $c_i \geqslant c'_i$ para $i = 1, 2, \ldots, p$; $c_i \leqslant c'_i$ para $i = p + 1, \ldots, q$, y $c_i = c'_i$, cuando $i = q + 1, \ldots, m$. Demuéstrese que $y \wedge y' \in L(c_1, \ldots, c_m)$, $y \vee y' \in L(c'_1, \ldots, c'_m)$ y $\mu_i(y) + \mu_i(y') = \mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')$ para todo i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

CAPÍTULO VIII

MATROIDES

El presente capítulo está dedicado a los sistemas de conjuntos de tipo especial que llevan el nombre de matroides.

Los matroides surgen en los más diversos contextos combinatorios y algebraicos. Tales conceptos como son la independencia y la base en los espacios vectoriales, la dependencia algebraica, los ciclos en los grafos, las superficies en las geometrías proyectivas y los retículos semimodulares puntuales, se reducen todos a una misma estructura (matroidal). El hecho de que los matroides aparecen en tan variados dominios y en tan diferentes aspectos, los hace dignos de ser estudiados. Debido a la posibilidad de aplicación, al exponer la teoría de matroides, del aparato de la teoría de los retículos, de los grafos y de los espacios vectoriales, así como del lenguaje geométrico, se puso de manifiesto inesperadamente la similitud entre los resultados de las teorías de los grafos, de las transversales, de la de codificación, del álgebra, la topología, la electrotecnia, la geometría y el análisis combinatorio.

§ 1. Conceptos fundamentales y ejemplos

Sea $\mathcal{P}(S)$ un conjunto de todos los subconjuntos del conjunto finito S. Un sistema $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(S)$ de subconjuntos de S lleva el nombre de *matroide* $M = (S, \mathcal{J})$, y los conjuntos de $\mathcal{J}$ se llaman *independientes*, si se cumplen las siguientes condiciones:

(*i*1) $\varnothing \in \mathcal{J}$;

(*i*2) si $A \subseteq B$ y $B \in \mathcal{J}$, entonces $A \in \mathcal{J}$;

(*i*3 si $A, B \in \mathcal{J}$ y $|A| > |B|$, entonces existe un $a \in A \setminus B$ tal que $B \cup \{a\} \in \mathcal{J}$.

Se denomina *base del matroide* M a un conjunto de $\mathcal{J}$ que es máximo por inclusión. Un subconjunto A de S se llama *dependiente* si $A \notin \mathcal{J}$. Se llama *ciclo del matroide* M un subconjunto dependiente de S, mínimo por inclusión. Los conjuntos de todas las bases, de todos los ciclos y de todos los conjuntos dependientes del matroide M se designarán por $\mathcal{B}(M)$, $\mathcal{C}(M)$ y $\mathcal{D}(M)$, respectivamente.

Dos matroides $M_1 = (S_1, \mathcal{J}_1)$ y $M_2 = (S_2, \mathcal{J}_2)$ se llaman *isomorfos* (la designación es $M_1 \cong M_2$), si existe una correspondencia biunívoca entre S_1 y S_2, para la cual los subconjuntos independientes de un matroide corresponden a los subconjuntos independientes del otro matroide y los subconjuntos dependientes, a los dependientes.

8.1. Demuéstrese que sobre un conjunto de n elementos existen para $n = 1, 2, 3$ exactamente 2^n, y para $n = 4$, 17 matroides no isomorfos.

8.2. Sea S un conjunto finito, $x, y \in S$, y sea $\mathcal{J}$ una familia de subconjuntos A de S, para los cuales $|A \cap \{x, y\}| < 2$. ¿Será el par $(S, \mathcal{J})$ un matroide?

8.3. Supongamos que $|S| = n$ y k es un cierto número entero tal que $1 \leqslant k \leqslant n$ y, además, $\mathcal{J} = \{A \subseteq S \mid |A| \leqslant k\}$. Compruébese que $U_{k, n} = (S, \mathcal{J})$ es un matroide. Hállense $\mathcal{B}(U_{k, n})$, $\mathcal{C}(U_{k, n})$ y $\mathcal{D}(U_{k, n})$.

El matroide $U_{k, n}$ del problema 8.3 se llama *homogéneo*. Si $k = n$, el matroide $U_{k, n}$ se denomina libre y lo designan con F_n.

8.4. Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sea $\mathcal{J}$ una familia de subconjuntos A del conjunto S, distintos de $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 6,\}$ $\{2, 3, 6\}$, $\{3, 4, 5\}$ y tales que $|A| \leqslant 3$. Compruébese que $(S, \mathcal{J})$ es un matroide.

8.5. Hállense tales 6 puntos en un plano que, al numerarlos de 1 a 6, las bases del matroide del problema 8.4 se hacen precisamente conjuntos de tres puntos no colineares.

Sea L un espacio lineal sobre el campo F, $u_1, \ldots, u_n \in L$. La expresión de la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, donde $\lambda_i \in F$, $i = 1, \ldots, n$, lleva el nombre de *combinación lineal de vectores* $u_1, \ldots, u_n$. Un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ se llama linealmente dependiente, siempre que existe una combinación lineal de los citados vectores igual al vector nulo, en la cual por lo menos uno de los coeficientes es distinto de cero. De lo contrario el conjunto de vectores se llama linealmente independiente.

8.6. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ con un subconjunto linealmente dependiente es de por sí linealmente dependiente;

b) cualquier subconjunto de un conjunto linealmente independiente de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es linealmente independiente;

c) entre los vectores linealmente dependientes $u_1, \ldots, u_n$ por lo menos un vector es una combinación lineal de los demás;

d) si uno de los vectores $u_1, \ldots, u_n$ se expresa linealmente a través de los demás, entonces los vectores $u_1, \ldots, u_n$ son linealmente dependientes;

e) si un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es linealmente independiente, mientras que $\{u_1, \ldots, u_n, u\}$ es linealmente dependiente, entonces u es una combinación lineal de vectores $u_1, \ldots, \ldots, u_n$;

f) si un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es linealmente independiente y el vector u_{n+1} no puede expresarse a través de ellos, entonces el conjunto $\{u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}\}$ es linealmente independiente.

8.7. Sea S un conjunto finito arbitrario de vectores del espacio lineal L sobre el campo F y supongamos que $A \subseteq S$. Diremos que

$A \in \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando A es un conjunto linealmente independiente de vectores de L. Compruébese que $(S, \mathcal{J})$ es un matroide llamado vectorial.

8.8. Sea F^3 un espacio lineal aritmético 3-dimensional sobre el campo F, $S = \{(1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 1, 1)\} \subset F^3$ y sea M un matroide vectorial en S del problema 8.7. Compruébese que si F es un campo de números reales, entonces $M \cong F_3$. ¿Se conservará el isomorfismo, si $F = GF(2)$?

Sea L un espacio lineal sobre el campo F. La combinación lineal $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, donde $u_i \in L$, $\lambda_i \in F$, se denomina *combinación afín*, si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset L$ se denominará *independiente de manera afín* sobre el campo F, si de $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ se desprende que $\lambda_i = 0$ para todo i, $i = 1, \ldots, n$. De lo contrario el conjunto de vectores se llamará *dependiente de manera afín*. Notemos que la independencia afín se deduce de la independencia lineal, pero no viceversa.

8.9. Demuéstrense las siguientes afirmaciones

a) cualquier subconjunto de un conjunto independiente de manera afín de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es independiente de manera afín;

b) entre los vectores dependientes de manera afín $\{u_1, \ldots, u_n\}$ por lo menos un vector es una combinación afín de los demás;

c) si un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es independiente de manera afín, entonces también será independiente de manera afín el conjunto $\{u_1 - u, \ldots, u_n - u\}$, donde u es un vector arbitrario de L;

d) un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es independiente de manera afín cuando y sólo cuando el conjunto $\{u_1 - u_n, \ldots, u_{n-1} - u_n\}$ es linealmente independiente;

e) si un conjunto de vectores $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$, donde $n \geqslant 2$, es independiente de manera afín, entonces el conjunto $A \setminus \{u_i\}$ es linealmente independiente para cierto i, $i = 1, \ldots, n$;

f) un subconjunto de vectores $\{(x_1^1, \ldots, x_n^1); \ldots (x_1^m, \ldots, x_n^m)\} \subset F^n$ es independiente de manera afín cuando y sólo cuando el subconjunto de vectores $\{(x_1^1, \ldots, x_n^1, 1), \ldots, (x_1^m, \ldots, x_n^m, 1)\} \subset F^{n+1}$ es linealmente independiente.

8.10. Sea S un subconjunto finito arbitrario de vectores del espacio lineal L sobre el campo F y $A \subseteq S$. Diremos que $A \in \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando A es independiente de manera afín en L. Demuéstrese que $(S, \mathcal{J})$ es un matroide que se llama *afín*.

Sea G un *grupo abeliano sin torsión*, es decir, todos sus elementos, salvo el cero, tienen orden infinito. Diremos que $a \in G$ depende de los elementos de $A \subseteq G$, si ma, donde m es cierto número entero, pertenece a un subgrupo del grupo G, engendrado por el conjunto A.

En otras palabras, si existen los elementos $a_1, \ldots, a_n$ de A y los números enteros $m, k_1, \ldots, k_n$ $(m \neq 0)$ tales que $ma = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$. El subconjunto $A \subseteq G$ se denomina *independiente*, si ningún elemento a de A depende de los elementos de $A \setminus \{a\}$.

8.11. Sea S un subconjunto finito del grupo abeliano G sin torsión y $A \subseteq S$. Diremos que $A \in \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando A es un subconjunto independiente en G. Compruébese que $(S, \mathcal{J})$ es un matroide.

Sea K una extensión (dilatación) del campo F. El elemento a de K se llama algebraico sobre el campo F, si existe un polinomio $f(x)$ no igual a cero idénticamente, con los coeficientes del campo F tales que $f(a) = 0$. Un elemento a de K, que no es algebraico sobre F, recibe el nombre de elemento transcendente sobre F. Un elemento b de K se llama *algebraicamente dependiente* de $a_1, \ldots, a_n$, si b es algebraico sobre el campo $F(a_1, \ldots, a_n)$ (sobre el menor de los campos que contienen F y $a_1, \ldots, a_n$), es decir, si b satisface la ecuación algebraica

$$f_0(a)\, b^m + f_1(a)\, b^{m-1} + \ldots + f_m(a) = 0,$$

cuyos coeficientes $f_0(a), \ldots, f_m(a)$ son polinomios de $a_1, \ldots, a_n$ con coeficientes del campo F y no todos son iguales a cero. Los elementos $a_1, \ldots, a_n$ de K se denominan *algebraicamente independientes* sobre el campo F, si ninguno de ellos es algebraicamente dependiente de los demás.

8.12. Dénse los ejemplos de números reales algebraicos y transcendentes sobre el campo de números racionales.

8.13. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) todo elemento a_i, $i = 1, \ldots, n$, es algebraicamente dependiente de los elementos $a_1, \ldots, a_n$;

b) si b depende algebraicamente de $a_1, \ldots, a_n$, pero no de $a_1, \ldots, a_{n-1}$, entonces a_n es algebraicamente dependiente de $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$;

c) si un elemento c depende algebraicamente de $b_1, \ldots, b_s$ y si cada b_i, $i = 1, \ldots, s$, depende algebraicamente de $a_1, \ldots, a_n$ entonces c es algebraicamente dependiente de $a_1, \ldots, a_n$;

d) los elementos $a_1, \ldots, a_n$ de K son algebraicamente independientes sobre el campo F cuando y sólo cuando de $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, donde f es un polinomio con coeficientes de F, se deduce que todos los coeficientes del polinomio f son nulos.

8.14. Sea K, una extensión del campo F y S, un subconjunto finito de K, $A \subseteq S$ y $A \subseteq \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando los elementos de A son algebraicamente independientes sobre el campo F. Demuéstrese que $\mathcal{J}$ es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide M en el conjunto S, el cual se llama *algebraico*.

8.15. Sea $n = 2p$ y S_1, S_2 dos subconjuntos disjuntos de p elementos del conjunto S, donde $p \geqslant 2$ y $|S| = n$. Demuéstrese

que si $\mathcal{J} = \{A \subseteq S \mid |A| \leqslant n-3,\ S_1 \not\subseteq A \text{ y } S_2 \not\subseteq A\}$, entonces $(S, \mathcal{J})$ es un matroide.

8.16. Demuéstrese que cualesquiera dos bases del matroide M contienen un número igual de elementos.

8.17. Axiomas de las bases demuéstrese: si M es un matroide en el conjunto finito S, entonces para la familia $\mathcal{B}(M)$ de sus bases son válidas las siguientes propiedades:

($b1$) ningún subconjunto propio de una base es base;

($b2$) si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1$, entonces $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ para cierto $y \in B_2$.

Viceversa, si una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos del conjunto finito S satisface las condiciones ($b1$) y ($b2$), entonces será una familia de bases del matroide M, definido unívocamente, sobre el conjunto S, que se designará por $(S, \mathcal{B})$. (En el matroide $(S, \mathcal{B})$ el conjunto $A \in \mathcal{J}$, donde $A \subseteq S$, cuando y sólo cuando existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B$).

8.18. Sea $\mathcal{B}$ una anticadena no vacía compuesta de los subconjuntos del conjunto S. Demuéstrese que la afirmación ($b2$) del problema 8.17 es equivalente a la siguiente:

($b2'$) para cualesquiera $X, Y \subseteq S$ tales que $X \subseteq Y$, de $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $X \subseteq B_1$, $B_2 \subseteq Y$ se deduce que existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $X \subseteq B_3 \subseteq Y$.

8.19. Sea $M = (S, \mathcal{J})$ un matroide sobre el conjunto S; $\mathcal{J}$, una familia de sus conjuntos independientes y $X, Y \subseteq S$. Demuéstrese que si $X,\ Y \in \mathcal{J}$ y $|X| < |Y|$, entonces existe un subconjunto $Z \subseteq Y \setminus X$ tal que $|X \cup Z| = |Y|$ y $X \cup Z \in \mathcal{J}$.

8.20. Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y supongamos que la familia $\mathcal{B}$ se compone de todos los subconjuntos del conjunto S que contienen tres elementos, a excepción de los subconjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{3, 6, 7\}$. Compruébese que $(S, \mathcal{B})$ es un matroide Φ llamado *matroide de Fano*. En la fig. 8.1. se enumerarán los vértices de 1 a 7 de un modo tal que las bases del matroide de Fano no estén situadas en una misma curva.

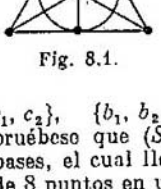


Fig. 8.1.

8.21. Sea $S = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2\}$ y supongamos que cada conjunto de cuatro elementos pertenece a la familia $\mathcal{B}$, salvo los siguientes conjuntos: $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, $\{a_1, a_2, c_1, c_2\}$, $\{b_1, b_2, c_1, c_2\}$, $\{b_1, b_2, d_1, d_2\}$ y $\{c_1, c_2, d_1, d_2\}$. Compruébese que $(S, \mathcal{B})$ es un matroide, donde $\mathcal{B}$ es la familia de sus bases, el cual lleva el nombre de *Vamos*. Dibújese una configuración de 8 puntos en un espacio 3-dimensional de un modo tal que las bases de $\mathcal{B}$ del matroide de Vamos sean exáctamente conjuntos de 4 puntos no coplanares.

Se denomina *función de rango* del matroide $M = (S, \mathcal{J})$ a una función de números enteros $r(A)$, definida para todo $A \subseteq S$, tal que

$$r(A) = \max \{|X| \mid X \subseteq A, \quad X \in \mathcal{J}\}.$$

Por cuanto todos los subconjuntos independientes máximos A del conjunto S son de una misma potencia, $r(A)$ será la potencia del subconjunto independiente máximo de A. Por ejemplo, en el matroide de $U_{k,n}$ (véase el problema 8.3) $r(A) = \text{mín}\ \{|A|; k\}$.

8.22. Axiomas de rango. Demuéstrese:

Si $M = (S, \mathcal{J})$ es un matroide sobre el conjunto finito S con función de rango r, entonces para cualesquiera $A, B \subseteq S$ y $a, b \in S$ se cumplen las siguientes condiciones:

(r1) $0 \leqslant r(A) \leqslant |A|$;

(r2) si $A \subseteq B$, entonces $r(A) \leqslant r(B)$ (monotonía);

(r3) $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leqslant r(A) + r(B)$ (semimodularidad);

(r4) $r(\varnothing) = 0$;

(r5) $r(A) \leqslant r(A \cup \{a\}) \leqslant r(A) + 1$;

(r6) si $r(A) = r(A \cup \{a\}) = r(A \cup \{b\})$, entonces $r(A) = r(A \cup \{a, b\})$.

Viceversa, sea r una función arbitraria de números enteros, definida en los subconjuntos del conjunto finito S, tal que satisface las condiciones (r1), (r2) y (r3), o bien las (r4), r5) y r6). Entonces la familia $\mathcal{J}$ de subconjuntos $A \subseteq S$, para los cuales $r(A) = |A|$, forma un matroide $(S, \mathcal{J})$ con la función de rango r (este matroide se denotará con (S, r)).

8.23. Sea M un matroide vectorial con la función de rango r en el conjunto S. Demuéstrese que para cualesquiera subconjuntos $A, B, C, \mathcal{D}$ del conjunto S se verifica la siguiente desigualdad:

$$r(A) + r(B) + r(A \cup B \cup C) + r(A \cup B \cup \mathcal{D}) + r(C \cup \mathcal{D}) \leqslant$$
$$\leqslant r(A \cup B) + r(A \cup C) + r(A \cup \mathcal{D}) + r(B \cup C) + r(B \cup \mathcal{D}).$$

¿Será lícita la desigualdad para el matroide de Vamos (véase el problema 8.21)?

8.24. Sea $r(A)$ una función de rango del matroide $M = (S, \mathcal{J})$ y sea k cierto número entero no negativo. Demuéstrese que

$$\rho(A) = \text{mín}\ \{|A|; r(A) + k\}$$

es también una función de rango de cierto matroide sobre el conjunto S.

8.25. Axiomas de los ciclos. Demuéstrese: si M es un matroide en el conjunto finito S, entonces para una familia $\mathcal{C}(M)$ de sus ciclos son válidas las siguientes propiedades:

(c1) ningún subconjunto propio de un ciclo es ciclo;

(c2) si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$, $C_1 \neq C_2$ y $x \in C_1 \cap C_2$, entonces hay tal ciclo $C^* \in \mathcal{C}(M)$ que $C^* \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$;

(c2') si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M), x \in C_1 \cap C_2, y \in C_1 \setminus C_2$, existe un ciclo $C^* \in \mathcal{C}(M)$ tal que $y \in C^* \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$.

Viceversa, si la familia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(S)$ satisface las condiciones (c1), (c2) ó (c1), (c2'), será una familia de ciclos del matroide $M = (S, \mathcal{J})$ definido unívocamente, en el cual $A \in \mathcal{J}$, donde $A \subseteq S$ cuando y

sólo cuando A no contiene, a título de subconjuntos, los términos de $\mathscr{C}$.

8.26. Sea $M = (S, \mathcal{I})$ un matroide sobre el conjunto finito S, y: $\mathscr{C}(M)$, una familia de todos los ciclos suyos. Demuéstrese que si $A \in \mathcal{I}$, y para cierto $x \in S \setminus A$ el conjunto $A \cup \{x\}$ contiene un ciclo $C \in \mathscr{C}(M)$, entonces $(A \cup \{x\}) \setminus \{y\} \in \mathcal{I}$ para todo $y \in C$. ¿Podrá el conjunto $A \cup \{x\}$, donde $A \in \mathcal{I}$ y $x \in S$, contener más de un ciclo del matroide M?

8.27. Sea B una base del matroide M sobre el conjunto finito S y supongamos que $y \in S \setminus B$. Demuéstrese que:

a) $B \cup \{y\}$ contiene cierto ciclo C;

b) $y \in C$;

c) C es el único ciclo en $B \cup \{y\}$;

d) $(B \cup \{y\}) / \{x\}$ es la base del matroide M si y sólo si $x \in C$.

Un ciclo C del matroide M que se obtiene igual que en el problema 8.27 se denomina *fundamental respecto de la base* B.

8.28. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S. Demuéstrese la validez de las siguientes afirmaciones:

a) si C es un ciclo del matroide M y $x \in C$, entonces existe una base B del matroide M tal que C es el único ciclo en $B \cup \{x\}$;

b) un elemento $x \in S$ pertenece a toda base del matroide M cuando y sólo cuando x no yace en ningún ciclo del matroide M.

8.29. Sea G un grafo con un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas E. Demuéstrese que la familia de todos los ciclos del grafo G es un conjunto de ciclos de cierto matroide $M(G)$ sobre el conjunto E.

El matroide $M(G)$ del problema 8.29 lleva el nombre de *matroide cíclico* del grafo G. Un matroide M se llama *gráfico*, si existe un grafo G cuyo matroide cíclico $M(G)$ es isomorfo al matroide M.

8.30. Demuéstrese que un matroide homogeneo $U_{k,n}$, donde $0 \leqslant k \leqslant n$, es gráfico cuando y sólo cuando $k = 0, 1, n-1$, o bien a n.

8.31. ¿Podrán los grafos no isomorfos tener matroides cíclicos isomorfos?

8.32. Sea A, $B \subseteq S$ y $A \Delta B$, su diferencia simétrica (es decir, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$). Demuéstrese que si A y B son ciclos de un matroide gráfico M sobre el conjunto S, entonces $A \Delta B$ es o bien un ciclo, o bien una unión de los ciclos disjuntos del matroide M. ¿Podrá un matroide que no es gráfico, poseer esta propiedad? Dénse los ejemplos.

8.33. Sean $M_1 = (S, \mathcal{I}_1)$ y $M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ dos matroides sobre el conjunto S y supongamos que B es su base común. Dénse los ejemplos de matroides no isomorfos con un mismo sistema de ciclos fundamentales respecto de la base B.

8.34. Sean B_1 y B_2 las bases del matroide $M = (S, \mathcal{I})$. Demuéstrese que para cualquier $x \in B_1$ se encontrará $y \in B_2$ tal que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ y $(B_2) \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ son las bases del matroide M.

8.35. Sea M un matroide sobre el conjunto S y sean B_1, B_2 las

bases diferentes del matroide M. Demuéstrese la validez de las siguientes afirmaciones:

a) existe una biyección π: $B_1 \to B_2$ tal que para todo $x \in B_1$ $(B_2 \setminus \{\pi(x)\}) \cup \{x\}$, es una base del matroide M;

b) existe una biyección π': $B_1 \to B_2$ tal que para todo $x \in B_1$ $(B_1 \setminus x)) \cup \{\pi'(x)\}$, es una base del matroide M.

Supongamos que $M = (S, \mathcal{J})$ es un matroide sobre el conjunto finito S, $x \in S$ y $A \subseteq S$. Diremos que x *depende de* A (la designación es $x \sim A$), si o bien $x \in A$, o bien $x \notin A$ y $B \cup \{x\} \notin \mathcal{J}$ para cierto subconjunto independiente B del conjunto A.

8.36. Demuéstrese que si $x \sim A$ y $\mathcal{D}$ es un subconjunto independiente máximo del conjunto A, entonces $x \sim \mathcal{D}$.

8.37. Axiomas de dependencia. Demuéstrese: si $M = (S, \mathcal{J})$ es un matroide sobre el conjunto finito S, entonces para cualesquiera diferentes $x, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n \in S$ se cumplen las siguientes propiedades:

(*d*1) $y_k \sim \{y_1, \ldots, y_m\}$, donde $k = 1, 2, \ldots, m$;

(*d*2) si $m \geqslant 1$, $x \sim \{y_1, \ldots, y_m\}$ y $x \not\sim \{y_2, \ldots, y_m\}$, entonces $y_1 \sim \{x, y_2, \ldots, y_m\}$;

(*d*3) si $x \sim \{y_1, \ldots, y_m\}$ e $y_k \sim \{z_1, \ldots, z_n\}$, donde $k = 1, 2, \ldots, m$, entonces $x \sim \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Viceversa, supongamos que para los elementos del conjunto S se cumplen las condiciones (*d*1)—(*d*3). Entonces la familia $\mathcal{J}$ de subconjuntos $A \subseteq S$ tales que $x \not\sim A \setminus \{x\}$ forma un matroide $(S, \mathcal{J})$ para cualquier $x \in A$.

8.38. Demuéstrese que si $x \notin A$, entonces $x \sim A$ cuando y sólo cuando existe un ciclo C tal que $x \in C \subseteq A \cup \{x\}$.

8.39. Demuéstrese que una familia $\mathcal{J}$ de subconjuntos del conjunto S es un conjunto de conjuntos independientes del matroide M sobre el conjunto S cuando y sólo cuando $\mathcal{J}$ satisface las condiciones (*i*1), (*i*2) y la siguiente afirmación:

(*i*3′) si A es un subconjunto arbitrario del conjunto S, todos los subconjuntos máximos B del conjunto A tales que $B \in \mathcal{J}$ tienen potencias iguales.

8.40. Axiomas de clausura. Demuéstrese: supongamos que $M = (S, r)$ es un matroide sobre el conjunto finito S con función de rango r, $A \subseteq S$ y $\overline{A} = \{x \in S \mid r(A) = r(A \cup \{x\})\}$. Compruébese que la aplicación $A \to \overline{A}$, definida para todos los $A \subseteq S$, es un operador de clausura:

(*cl*1) $A \subseteq \overline{A}$ para todo $A \subseteq S$;

(*cl*2) si A, $B \subseteq S$ y $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

(*cl*3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ para todos los $A \subseteq S$;

el cual satisface el axioma de sustitución de Maclain-Steinitz:

(*cl*4) para cualesquiera $x, y \in S$ y todo $A \subseteq S$ de $y \in \overline{A \cup \{x\}} \times$ $\times$ e $y \notin A$ se deduce que $x \in \overline{A \cup \{y\}}$.

Viceversa, supongamos que la aplicación $A \to \overline{A}$, definida para todos los $A \subseteq S$, satisface los axiomas (*cl1*) — (*cl4*). Entonces la familia $\mathcal{J}$ de subconjuntos $A \subseteq S$ tales que de $x \in A$ se deduce que $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, forma un matroide $M = (S, \mathcal{J})$ con el operador de clausura $A \to \overline{A}$ (este matroide se denotará con $(S, \bar{})$).

8.41. Demuéstrese que en el matroide $M = (S, \bar{})$, $x \in \overline{A}$ cuando y sólo cuando, $x \in A$ o existe un ciclo C, para el cual $C \setminus A = \{x\}$.

Un conjunto A del matroide M se llama *cerrado*, si coincide con su clausura. Todo conjunto cerrado de un matroide se denominará *superficie*[1]).

8.42. Sean X e Y las superficies del matroide M. Demuéstrese que $X \cap Y$ es también una superficie del matroide M.

8.43. Dése un ejemplo de matroide en el cual la unión de superficies no es obligatoriamente una superficie.

8.44. Demuéstrese que un matroide de rango n tiene por lo menos 2^n superficies.

Se denomina *geometría combinatoria* (en adelante siempre *geometría*) a un matroide, en el cual todos los subconjuntos de un solo elemento, como también el conjunto vacío, son cerrados.

La definición de una geometría sobre el conjunto S se diferencia de la definición de una topología sobre S en que para la clausura no se requiere que se cumplan las condiciones $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$, cualesquiera que sean $A, B \in \mathcal{P}(S)$, mas tiene lugar la propiedad de sustitución (*cl4*), la cual, hablando en general, puede no cumplirse para la clausura de la topología.

8.45. Sea $G = (S, \bar{})$ un matroide y sea $L(G)$ un conjunto de todas las superficies del matroide G ordenadas por inclusión. Demuéstrese que $L(G)$ es un retículo geométrico y en este conjunto las operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ para todos los $A, B \in L(G)$ se definen del modo siguiente: $A \vee B = \overline{A \cup B}$ y $A \wedge B = A \cap B$.

8.46. Sea L un retículo geométrico arbitrario con el conjunto de átomos S y supongamos que $\overline{A} = \{a \in S \mid a \leqslant \sup A\}$ para todo $A \subseteq S$. Demuéstrese que $(S, \bar{})$ es una geometría y su retículo de superficies es isomorfo al retículo L.

8.47. ¿Es cierto que la afirmación del problema 8.46 es un corolario de los axiomas de clausura y de uno de los problemas 7.156, 7.157 ó 7.158?

8.48. Axiomas de los conjuntos cerrados (o de las superficies o flats). Demuéstrese: si M es un matroide sobre el conjunto finito S, entonces para una familia $\mathcal{F}$ de todos los conjuntos cerrados del matroide M se cumplen las siguientes propiedades:

($f1$) $S \in \mathcal{F}$;

($f2$) si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;

---

[1]) En la literatura matemática se usa también, a la par con el término «superficie», el término inglés «flat».

(*f3*) si $F, F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{F}$ y $F_i \supset\!\!\!- F$ para todo, i, $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces $\{F_1 \setminus F, \ldots, F_k \setminus F\}$ es una partición del conjunto $S \setminus F$.

Viceversa, supongamos que para la familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos del conjunto S se cumplen las condiciones (*f1*) — (*f3*). Entonces la familia $\mathcal{J}$ de los subconjuntos $A \subseteq S$ tales que para todo $a \in A$ existe un subconjunto $F \in \mathcal{F}$, para el cual $A \setminus F = \{a\}$, forma un matroide $(S, \mathcal{J})$ con la familia de las superficies $\mathcal{F}$.

Sean M un matroide sobre el conjunto S y $\mathcal{F} = \{A \subseteq S \mid A = \overline{A}\}$ una familia de todas las superficies del matroide M. Suele decirse que un subconjunto $B \subseteq A$ *engendra* A, donde $A \in \mathcal{F}$, si $\overline{B} = A$. El subconjunto B se denomina *conjunto engendrador del matroide*, si $\overline{B} = S$. Los subconjuntos propios máximos (por inclusión) $H \in \mathcal{F}$ del conjunto S llevan el nombre de *hiperplanos* del matroide M.

8.49. Sea M un matroide sobre el conjunto S. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si A es un conjunto engendrador del matroide y si $B \supseteq A$, entonces B es también un conjunto engendrador;

b) una familia de conjuntos engendradores mínimos de un matroide coincide exactamente con el conjunto de sus bases;

c) una familia de conjuntos máximos que no son engendradores coincide exactamente con el conjunto de todos los hiperplanos del matroide M.

8.50. Axiomas de los hiperplanos. Demuéstrese: si M es un matroide sobre el conjunto finito S, entonces para la familia $\mathcal{H}$ de todos los hiperplanos del matroide M se cumplen las siguientes condiciones:

(*h1*) $S \notin \mathcal{H}$;

(*h2*) ningún subconjunto propio de un hiperplano es hiperplano;

(*h3*) para cualesquiera H_1, $H_2 \in \mathcal{H}$ y para todo $x \in S$ existe un hiperplano H tal que $(H_1 \cap H_2) \cup \{x\} \subseteq H$.

Viceversa, supongamos que para la familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos del conjunto S se cumplen las condiciones (*h1*) — (*h3*). Entonces la familia $\mathcal{J}$ de subconjuntos $A \subseteq S$ tales que para todo $a \in A$ se encontrará un subconjunto $H \in \mathcal{H}$, para el cual $A \setminus H = \{a\}$, forma un matroide $(S, \mathcal{J})$ con una familia de hiperplanos $\mathcal{H}$.

Sea $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ una familia de subconjuntos no vacíos del conjunto infinito S. Se denomina *transversal* (o *sistema de representantes distintos*) para $\mathcal{F}$ a un subconjunto A del conjunto S que se compone de n elementos: a un elemento de cada conjunto A_i, es decir, si existe una aplicación biunívoca φ: $A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a \in A_{\varphi(a)}$ para todo $a \in A$. La transversal de una subfamilia arbitraria de la familia $\mathcal{F}$ se llamará *transversal parcial* para $\mathcal{F}$.

8.51. ¿Cuáles de las siguientes familias de subconjuntos del conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tienen transversales:

a) $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4, 5\}\}$;

b) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 5\}\}$;

c) $\{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{3\}\}$;
d) $\{\{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}$?

8.52. Sea S un conjunto de letras en la palabra MATROIDS. ¿Cuántas transversales tiene la siguiente familia de subconjuntos de S: STAR; ROAD; MOAT; RIOT; RIDS; DAMS; MIST?

8.53. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos no vacíos del conjunto finito S. Demuéstrese que un par $(S, \mathcal{J})$, donde $\mathcal{J}$ es la familia de todas las transversales parciales para $\mathcal{F}$, forma un matroide $M(S; \mathcal{F})$ en el cual $\mathcal{J}$ es una familia de conjuntos independientes.

El matroide $M(S, \mathcal{J})$ del problema 8.53 se denomina *matroide transversal de la familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos del conjunto S*. Diremos que un matroide M sobre el conjunto S es *transversal*, si existe tal familia finita $\mathcal{F}$ de subconjuntos del conjunto S que $M = M(S, \mathcal{F})$. La familia $\mathcal{F}$ se llamará en este caso *representación del matroide M*.

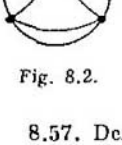


Fig. 8.2.

8.54. Demuéstrese que cada matroide k-homogéneo $U_{k,n}$ es transversal.

8.55. Demuéstrese que los matroides cíclicos de un grafo completo K_4 y del grafo representado en la fig. 8.2 no son transversales.

8.56. Demuéstrese que cada matroide sobre no más de 5 elementos es transversal.

8.57. Demuéstrese que el matroide de Fano no es transversal.

8.58. Muéstrese que existen no menos de 2^n y no más de 2^{n^2} matroides transversales no isomorfos sobre un conjunto de n elementos.

Sea S un conjunto finito, a cada elemento a del cual se le atribuye cierto número no negativo $w(a)$ llamado *peso* del *elemento* a. Se denomina *peso de un subconjunto* $A \subseteq S$ a la suma de pesos de todos los elementos de A. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos del conjunto S. Veamos el siguiente problema: en la familia $\mathcal{F}$ hallar el subconjunto del peso máximo. Para resolver este problema apliquemos un algoritmo que se llama *ávido*:

a) Elíjase un elemento a_1 tal que $\{a_1\} \in \mathcal{F}$ y $w(a_1) \geqslant w(a)$ para todos los a tales que $\{a\} \in \mathcal{F}$. Si tal a_1 no existe, viene una parada.

b) Elíjase un elemento a_2 tal que $\{a_1, a_2\} \in \mathcal{F}$ y $w(a_2) \geqslant w(a)$ para todos aquellos $a \neq a_1$ que $\{a_1 a\} \in \mathcal{F}$. Si tal a_2 no existe, tiene lugar una parada.

c) Elíjase tal elemento a_k, distinto de $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, que $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k\} \in \mathcal{F}$ y $w(a_k)$ es máximo entre todos los a tales que $a \neq a_i$, siendo $i = 1, 2, \ldots, k-1$, y $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a\} \in \mathcal{F}$. Si tal a_k no existe, tiene lugar una parada.

Es evidente que el algoritmo ávido finaliza su trabajo asegurando el subconjunto de $\mathcal{F}$, máximo por inclusión.

8.59. Aplíquese el algoritmo ávido para los siguientes sistemas ponderados:

a) $S = \{a, b, c\}$, $w(a) = 3$, $w(b) = w(c) = 2$ y $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$;

b) $S = \{a, b, c, d\}$, $w(a) = 4$, $w(b) = w(c) = 3$, $w(d) = 1$ y $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b\}, \{d\}, \{c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$;

c) $S = \{a, b, c, d\}$, $w(a) = 4$, $w(b) = 3$, $w(c) = 2$, $w(d) = 2$ y $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, \{b, d\}\}$;

d) $S = \{a, b, c, d\}$, $w(a) = 6$, $w(b) = 3$, $w(c) = 2$, $w(d) = 2$ y $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, \{b, d\}\}$.

¿Es cierto que como resultado del algoritmo ávido se ha obtenido un conjunto de $\mathcal{F}$ que tiene peso máximo?

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos del conjunto finito S, a cuyos elementos se les atribuyen los pesos no negativos. Supongamos que los elementos de cada subconjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \in \mathcal{F}$ están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos, es decir, que $w(a_1) \geqslant w(a_2) \ldots \geqslant w(a_k)$. Diremos que $B \in \mathcal{F}$ es *óptimo* en $\mathcal{F}$, si $|A| \leqslant |B|$ para todos los $A \in \mathcal{F}$ y $w(a_i) \leqslant w(b_i)$ para todo i, donde $a_i \in A$, $b_i \in B$ y $i = 1, 2, \ldots, |A|$. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \in \mathcal{F}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \in \mathcal{F}$, con la particularidad de que los elementos de los conjuntos A y B están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos. Diremos que A es *lexicográficamente mayor* que B, si existe tal k que $w(a_i) = w(b_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, k-1$ y $w(a_k) > w(b_k)$, o bien si $w(a_i) = w(b_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, y $m > n$. El conjunto $A \in \mathcal{F}$ que es lexicográficamente no inferior a cualquier otro conjunto de $\mathcal{F}$ se denomina *lexicográficamente máximo en* $\mathcal{F}$.

8.60. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S, a cuyos elementos a se les atribuyen los pesos no negativos $w(a)$. Demuéstrese que para una base B del matroide M son equivalentes las siguientes condiciones:

a) B es óptimo en la familia $\mathcal{J}$ de conjuntos independientes del matroide M;

b) B es la base de peso máximo;

c) B es el máximo lexicográfico de la familia $\mathcal{B}$ de bases del matroide M;

d) para todo $a \in B$ el conjunto $\{a' \in B \mid w(a') > w(a)\}$ es un subconjunto independiente máximo del conjunto $\{a' \in S \mid w(a') > w(a)\}$.

8.61. Demuéstrese que la aplicación de un algoritmo ávido a la familia $\mathcal{J}$ de conjuntos independientes de un matroide sobre el conjunto finito S, a cuyos elementos a se les atribuyen los pesos no negativos $w(a)$, proporciona un subconjunto de $\mathcal{J}$ que tiene peso máximo.

8.62. Sea $\mathcal{F}$ tal familia de subconjuntos del conjunto finito S que si $A \in \mathcal{F}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{F}$. Demuéstrese que la aplicación a $\mathcal{F}$ de un algoritmo ávido nos da un subconjunto de $\mathcal{F}$ que tiene peso máximo, cuando y sólo cuando $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos independientes del matroide sobre S.

8.63. Muéstrese que si por medio del algoritmo ávido están

elegidos k elementos, el subconjunto formado tiene peso máximo entre todos los conjuntos independientes que constan de k o menos elementos.

8.64. En un ordenador se necesita realizar un conjunto de tareas. Todas las tareas requieren para su realización un tiempo igual. A toda tarea se le atribuye el plazo de tiempo extremal para su realización. Por una tarea no realizada en el plazo de tiempo establecido se debe pagar una multa. Demuéstrese que el juego de todos los subconjuntos de tareas que pueden realizarse según el horario forma un conjunto de todos los conjuntos independientes del matroide. ¿En qué orden hace falta realizar las tareas, para que la multa total sea mínima?

8.65. Sea M un matroide, a cuyos elementos están atribuidos los pesos no negativos. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) ningún elemento de la base de peso máximo tiene peso mínimo en ningún ciclo del matroide M.

b) cada elemento de la base de peso máximo tiene peso máximo por lo menos en un cociclo del matroide M;

Sea S un conjunto finito y sea n un número natural. Una totalidad $\mathcal{F}$ de subconjuntos del conjunto S se llama n-partición del conjunto S, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) si $A \in \mathcal{F}$, entonces $|A| \geqslant n$;

b) cada subconjunto de n elementos del conjunto S se contiene en un y sólo un subespacio de $\mathcal{F}$.

Observemos que la 1-partición es partición de un conjunto en el sentido habitual.

8.66. Supongamos que $\mathcal{F}$ es una n-partición del conjunto S y $|\mathcal{F}| \geqslant 2$. Demuéstrese que existe un matroide $M(S, \mathcal{F})$ sobre el conjunto S, cuyos coátomos (hiperplanos) son exactamente subconjuntos de $\mathcal{F}$ y sólo ellos.

Un matroide M se llama *matroide de recubrimiento*, si para cierta n-partición $\mathcal{F}$ con $|\mathcal{F}| \geqslant 2$ es isomorfo al matroide $M(S, \mathcal{F})$ del problema 8.66. Notemos que el matroide de recubrimiento inducido por la n-partición tiene el rango $n + 1$.

8.67. Dénse ejemplos de matroides de recubrimiento.

Supongamos que el conjunto finito S, cuyos elementos se llaman *puntos*, satisface junto con las familias $\mathcal{K}$ y $\mathcal{F}$, cuyos elementos se llaman *curvas* y *superficies*, respectivamente, las condiciones siguientes:

($G1$) cualesquiera $n + 1$ puntos diferentes están situados en una curva única y cada curva contiene no menos de $n + 1$ diferentes puntos;

($G2$) cualesquiera $n + 2$ puntos diferentes, que no yacen en una misma curva, están situados en una única superficie, y cada superficie contiene por lo menos $n + 2$ puntos diferentes que no se encuentran en una misma curva.

($G3$) junto con cualesquiera $n + 1$ puntos diferentes pertenece a

la superficie y también toda la curva definida por los puntos mencionados;

(Un conjunto $A \subseteq S$ se llama subespacio, si contiene todas las curvas y superficies que pasan por cualesquiera $n + 1$ ó $n + 2$ puntos de A, y si se definen por las condiciones $(G1)$ y $(G2)$. Es evidente que la intersección de los subespacios es también un subespacio. Por consiguiente, la aplicación $A \to \overline{A}$, donde $\overline{A}$ es el subespacio mínimo que contiene A es un operador de clausura sobre S).

$(G4)$ si dos superficies se disponen en la clausura de un subconjunto de $(n + 3)$ elementos de S, la intersección de ellas contiene al menos $n + 1$ puntos diferentes.

La estructura de incidencia $(S, \mathscr{K}, \mathscr{F})$ que satisface, para cierto número entero no negativo n, los axiomas $(G1) - (G4)$ junto con el operador de clausura definido más arriba, lleva el nombre de *geometría de Wille de grado n* y se denota por $G(S, \mathscr{K}, \mathscr{F})$. Indiquemos que para $n = 0$ la geometría de Wille es una geometría proyectiva (véase el capítulo 7, § 2).

8.68. Supongamos que $G(S, \mathscr{K}, \mathscr{F})$ es una geometría de Wille de grado n, $A \neq B$ son subespacios y $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A \cap B$. Demuéstrese que

$$A \vee B = \overline{A \cup B} = \bigcup_{a \in A,\ b \in B} \overline{(a_1, \ldots, a_n, a, b)}.$$

8.69. Demuéstrese que cada geometría de Wille $G(S, \mathscr{K}, \mathscr{F})$ de grado n es un matroide y que para todos los subespacios A de rango igual a n se cumple la condición: en el retículo de los subespacios de la geometría de Wille el intervalo $[0, 1]$ es distributivo, y el $[A, 1]$, modular.

8.70. Demuéstrese que un matroide M sobre el conjunto finito S es isomorfo a la geometría de Wille de grado n cuando y sólo cuando $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{a} = a$ para todo $a \in S$ (en el caso en que $n \geqslant 1$), mientras que el intervalo $[0, A]$ en el retículo de superficies del matroide M es distributivo, y el $[A, 1]$, modular para todas las superficies A del matroide M tales que $r(A) = n$.

8.71. Sea M un matroide sobre el conjunto S tal que $A \subseteq S$, y supongamos que $X \in \mathscr{J}$, si X es un conjunto independiente en M y $X \cap A \neq \varnothing$. Demuéstrese que $(S, \mathscr{J})$ es un matroide sobre el conjunto S.

Sea M un matroide sobre un conjunto finito S con la familia $\mathscr{J}$ de conjuntos independientes. El elemento $x \in S$ se denomina *bucle* (lazo) *del matroide M*, si $\{x\} \notin \mathscr{J}$. Los elementos $x_1, \ldots, x_n \in S$ se llaman *paralelos* en M, si ninguno de ellos es un bucle y si cada par de ellos $\{x_i, x_j\} \notin \mathscr{J}$.

8.72. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S con la función de rango r y el operador de clausura $(-)$. ¿Serán ciertas las afirmaciones que siguen más abajo:

a) el elemento $x \in S$ es un bucle cuando y sólo cuando $x \in \overline{\varnothing}$;

b) $x \in S$ es un bucle cuando y sólo cuando $r(\{x\}) = 0$;

c) si x es un bucle y si $x \in A$, entonces A es un conjunto dependiente del matroide M;

d) si x es un bucle, entonces $x \in \overline{A}$ para todo $A \subseteq S$;

e) el elemento x es un bucle cuando y sólo cuando $\{x\}$ es un ciclo del matroide M;

f) el elemento x es un bucle en aquel y sólo en aquel caso en que x no está contenido en ningún base del matroide M.

8.73. Demuéstrese que para cada matroide M sobre el conjunto finito S el bucle pertenece a cada superficie del matroide M, y el conjunto vacío es cerrado en M cuando y sólo cuando M no contiene bucles.

8.74. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S con el operador de clausura $(^-)$ y supongamos que $x, y, z \in S$. Compruébese la validez de las siguientes afirmaciones:

a) los elementos distintos $x, y \in S$ son paralelos cuando y sólo cuando $\{x, y\}$ es un ciclo del matroide M;

b) si el elemento x es paralelo a y, el elemento y es paralelo a z, y $x \neq z$, entonces x es paralelo a z;

c) si $x \neq y$, entonces x es paralelo a y cuando y sólo cuando $x \in \overline{y}$, $y \in \overline{x}$, y x, y no son bucles del matroide M;

d) si $x \in \overline{A}$ para cierto subconjunto A de S, y si y es paralelo a x, entonces $y \in \overline{A}$;

e) si A contiene dos elementos paralelos del matroide M, entonces A es un conjunto dependiente en M.

8.75. Sea G un grafo no orientado con un conjunto de aristas S. Demuéstrese que la familia de todos los cortes mínimos (por inclusión) del grafo G es precisamente familia de ciclos de cierto matroide $M^*(G)$ sobre el conjunto S.

El matroide $M^*(G)$ del problema 8.75 se denomina *matroide de los cortes* del grafo G. El matroide M se llama *cográfico*, si existe un grafo G cuyo matroide de los cortes $M^*(G)$ es isomorfo a M.

8.76. ¿Serán ciertas las afirmaciones que siguen:

a) los matroides de los cortes de los grafos K_5 (de un grafo completo sobre 5 vértices) y K_{33} (de un grafo bipartido completo sobre 6 vértices, a 3 en cada capa) no son gráficos (véase la fig. 8.3);

b) los matroides cíclicos de los grafos K_5 y K_{33} no son cográficos;

c) un matroide cíclico de cualquier grafo planario es cográfico;

d) un matroide de los cortes de un grafo planario arbitrario es gráfico;

e) el matroide de Fano Φ no es gráfico, ni tampoco cográfico?

8.77. Supongamos que $G(V, S)$ es un grafo con el conjunto de vértices V y el conjunto de aristas S, $a, b \in V$ y $A \subseteq S$. Diremos que los vértices a y b son *A-conexos*, si existe una sucesión de aristas (camino) $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ de A tal que $x_0 = a$ y $x_n = b$. Para todo $A \subseteq S$ definamos $\overline{A}$: la arista $(a, b) \in A$ cuando

y sólo cuando los vértices a y b son A-conexos. Demuéstrese que el conjunto de aristas del grafo con operador $A \to \overline{A}$ forman el matroide $M(G(V, S))$.

8.78. Sea $M(G(V, S))$ un matroide del grafo $G(V, S)$ del problema 8.77. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) $A \subseteq S$ es independiente en M cuando y sólo cuando $G(V, A)$ es un bosque en G;

b) $B \subseteq S$ es una base del matroide M si y sólo si $G(V, B)$ es un bosque engendrador, es decir, el bosque $G(V, B)$ y el grafo $G(V, B)$ tienen un mismo número de componentes conexos;

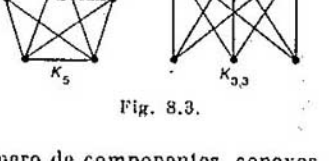


Fig. 8.3.

c) $C \subseteq S$ es un ciclo en M cuando y sólo cuando C es un conjunto de aristas del ciclo en el grafo $G(V, S)$;

d) $H \subseteq S$ es un contorno en M siempre que $G(V, H)$ tiene el número de componentes conexos exactamente en una unidad mayor que $G(V, S)$, y es un subgrafo máximo con esta propiedad, y viceversa:

e) $r(A) = |V| - k(A)$, donde $k(A)$ es el número de componentes conexos en el subgrafo $G(V, A)$?

Las aristas de un grafo se llaman *independientes*, si no tienen vértices comunes. Una *combinación de pares* es un conjunto de aristas independientes del grafo. El vértice del grafo G se denomina *saturado en la combinación de pares* P, si es un vértice terminal de la arista de P.

8.79. Sea G un grafo no orientado con un conjunto de vértices V. Demuéstrese que si $\mathcal{J}$ es una familia de todos aquellos subconjuntos $A \subseteq V$ en que los elementos de A se saturan en cierta combinación de pares del grafo G, entonces $\mathcal{J}$ es una familia de los conjuntos independientes de cierto matroide sobre el conjunto V, el cual lleva el nombre de *matroide de las combinaciones de pares*.

8.80. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S; $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{H}$ son las familias de sus ciclos, conjuntos independientes, bases e hiperplanos, respectivamente; $(^-)$ es el operador de clausura del matroide M, y r, su función de rango. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

($c3$) si $C \in \mathcal{C}$, entonces $|C| \geqslant 3$;

($i4$) para todos los $x, y \in S$ el conjunto $\{x, y\} \in \mathcal{J}$;

($b3$) para todos los $x, y \in S$ existe una base $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$\{x, y\} \subseteq B;$$

($cl5$) $\overline{\varnothing} = \varnothing$ y $\overline{\overline{x}} = x$ para cada $x \in S$;

($r7$) para todo $X \subseteq B$, si $|X| \leqslant 2$, entonces $r(X) = |X|$;

($h4$) para cualesquiera $x, y \in S$, $x \neq y$, existe un hiperplano $H \in \mathcal{H}$ tal que $x \in H$, $y \notin H$.

En el problema 8.80 están enunciadas las condiciones equivalentes para que un matroide sea geometría combinatoria.

8.81. Sea S un conjunto arbitrario. Agreguemos a cada sistema de axiomas del matroide uno más de los siguientes:

($c4$) si $X \subseteq S$, $| X | = \infty$, existe un ciclo $C \in \mathfrak{C}$ tal que $C \subseteq X$;

($i5$) para cada $A \subseteq \mathfrak{I}$, $| A | < \infty$;

($b4$) para cada $B \in \mathfrak{B}$, $| B | < \infty$;

($cl6$) si $X \subseteq S$, existe $X' \subseteq X$, $| X' | < \infty$, tal que $\overline{X'} = \overline{X}$;

($r8$) si $X \subseteq S$, existe un subconjunto $X' \subseteq X$, $| X | < \infty$, tal que $r(X') = r(X)$;

($h5$) si $X \subseteq S$ y si para cada hiperplano $H \in \mathfrak{H}$ se tiene $X \not\subseteq H$, se encontrará un subconjunto $X' \subseteq X$, $| X' | < \infty$, tal que para cada hiperplano $H \in \mathfrak{H}$ tenemos $X' \not\subseteq H$.

Obtendremos una generalización de los conceptos de matroide y de geometría combinatoria sobre los conjuntos infinitos. Demuéstrese la equivalencia de los conceptos obtenidos en este caso.

8.82. Demuéstrese que el subconjunto $A \subseteq B$ de la geometría combinatoria G sobre el conjunto S puede ser representado como una unión de los ciclos cuando y sólo cuando para todos los conjuntos cerrados B el conjunto $A \setminus B$ no se compone de un solo punto.

§ 2. Construcciones y operaciones sobre los matroides

8.83. Sea $\mathfrak{B}$ una familia de bases del matroide M sobre el conjunto S. Demuéstrese que $\mathfrak{B}^* = \{S \setminus B \mid B \in \mathfrak{B}\}$ es un conjunto de bases del matroide M^* sobre el conjunto S.

El matroide M^* del problema 8.83 se denomina *dual con relación* a M. Es fácil ver que M es el matroide dual con relación a M^*. Por eso diremos que M y M^* son *matroides duales*. La base del matroide M^* se llama *cobase* del matroide M. Análogamente, el ciclo del matroide M^* se llama *cociclo* del matroide M; el bucle de M^*, *cobucle* (istmo) en M; la función de rango de M^*, *función de corrango* en M, etc. La función de rango del matroide M^* se designará por r^*; la familia de sus bases, por $\mathfrak{B}^*$, la familia de ciclos, por C^*, etc.

8.84. Sean M y M^* los matroides duales sobre el conjunto S. Demuéstrese que para todos los $A \subseteq S$ tiene lugar la relación

$$r^*(A) = | A | + r(S \setminus A) - r(S),$$

donde r y r^* son funciones de rango de los matroides M y M^*, respectivamente.

8.85. Muéstrese que un matroide dual con relación a una geometría combinatoria no es forzosamente geometría combinatoria.

8.86. ¿Podrá un conjunto ser a la vez un ciclo y un coátomo en el matroide M?

8.87. Sea M un matroide sobre el conjunto S con la función de rango r. Demuéstrese que $M^{**} = M$ y $r^*(S) = | S | - r(S)$.

8.88. Sean M y M^* los matroides duales sobre el conjunto S. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si $A \subseteq S$ es un conjunto independiente del matroide M, entonces $S \setminus A$ contiene la cobase del matroide M;

b) si $A^* \subseteq B$ es un conjunto independiente del matroide M^*, entonces $S \setminus A^*$ contiene la base del matroide M;

c) cualquier base B del matroide M tiene una intersección no vacía con cada cociclo del matroide M;

d) cualquier cobase B^* del matroide M tiene una intersección no vacía con cada ciclo del matroide M;

e) para cualquier conjunto independiente A del matroide M existe un cociclo C^* tal que $| A \cap C^* | = 1$; además, si $| A | < r(S)$, entonces existe un cociclo C_1^* tal que $| A \cap C_1^* | = \varnothing$.

8.89. Sean M y M^* los matroides duales sobre el conjunto S y supongamos que A y A^* son unos subconjuntos del conjunto S tales que $A \cap A^* = \varnothing$, y A es independiente en M, mientras que A^* es independiente en M^*. Demuéstrese que existe una base B del matroide M tal que $A \subseteq B$ y $A^* \subseteq B^*$.

8.90. Sea M un matroide sobre el conjunto S. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) el subconjunto $B \subseteq S$ es la base del matroide M cuando y sólo cuando B es el subconjunto mínimo que tiene intersección no vacía con cada cociclo del matroide M;

b) el subconjunto $B^* \subseteq S$ es una cobase del matroide M cuando y sólo cuando dicho subconjunto es mínimo, que tiene una intersección no vacía con cada ciclo del matroide M;

c) el subconjunto $C \subseteq S$ es un ciclo del matroide M cuando y sólo cuando es un subconjunto mínimo, que tiene una intersección no vacía con cada base del matroide M^*;

d) un subconjunto $C^* \subseteq S$ es un cociclo del matroide M cuando y sólo cuando es un subconjunto mínimo, que tiene una intersección no vacía con cada base del matroide M.

8.91. Demuéstrese que si C^* es un cociclo del matroide M sobre el conjunto S, entonces el conjunto $(S \setminus C^*) \cup \{x\}$ contiene la base B del matroide M para cualquier $x \in C$.

8.92. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ las familias de ciclos y coátomos, respectivamente, del matroide M sobre el conjunto S. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) el subconjunto $X \subseteq S$ es un ciclo del matroide M cuando y sólo cuando es un subconjunto mínimo con $| X \cap C^* | \neq 1$ para cualquier cociclo $C^* \in \mathcal{C}^*$;

b) un subconjunto $X^* \in \mathcal{C}^*$ cuando y sólo cuando X^* es tal subconjunto mínimo que $| X^* \cap C | \neq 1$ para cada ciclo $C \in \mathcal{C}^*$.

8.93. Sea C un ciclo del matroide M y supongamos que x e y son elementos diferentes de S. Demuéstrese que existe un cociclo C^* que contiene x e y, pero no contiene ningún otro elemento de C.

8.94. Sea C un matroide sobre el conjunto S, y x, y, z, elementos diferentes de S. Demuéstrese que si existen los ciclos C_1, que con-

tiene x e y, y C_2, que contiene y y z, existe también el ciclo C_3 que contiene x y z.

8.95. Muéstrese que un matroide, dual con relación al matroide transversal, no es forzosamente transversal.

8.96. Demuéstrese que para cualquier grafo G, su matroide de cortes $M^*(G)$ es dual con relación al matroide cíclico $M(G)$, es decir, que $M^*(G) = (M(G))^*$.

Recordemos que el grafo G^* es dual con relación al grafo G, si entre las aristas de los grafos G y G^* existe una correspondencia biunívoca que posee la propiedad de que un subconjunto de aristas de G forma un ciclo en G cuando y sólo cuando el correspondiente subconjunto de aristas de G^* forma un corte en G^*. Un grafo será planario cuando y sólo cuando posee un grafo dual.

8.97. Demuéstrese que si un grafo G^* es dual con relación a G, entonces el matroide cíclico $M(G^*)$ del grafo G^* es isomorfo al matroide $(M(G))^*$, dual con relación al matroide cíclico del grafo G.

8.98. Un matroide M sobre el conjunto S se denomina euleriano, si S puede representarse en forma de una unión de ciclos disjuntos. Un matroide se llama bipartido, si todo su ciclo contiene un número par de elementos. Demuéstrese que el matroide M es bipartido cuando y sólo cuando el matroide M^* es euleriano.

8.99. Sea $G(S)$ un geometría sobre el conjunto S con el operador de clausura $(^-)$. Demuéstrese que $\mathcal{J}_{[A,B]}(C) = \overline{(C \cup A) \cap B} \setminus A$ es un operador de clausura, pero sobre el conjunto $B \setminus A$, donde $A, B \subseteq S$.

8.100. Demuéstrese que el subconjunto $B \subseteq S$, provisto para todo $C \subseteq B$ de la relación $C \to \mathcal{J}(C)$, donde $\mathcal{J}(C) = \bar{C} \cap B$ ($^-$ significa en geometría un operador de clausura) forma la geometría $G(B)$, llamada *subgeometría* de la geometría $G(S)$.

8.101. Demuéstrese que un conjunto $S \setminus A$, provisto para todo $C \subseteq S \setminus A$ de la relación $C \to \mathcal{J}(C)$, donde $\mathcal{J}(C) = (\overline{C \cup A}) \setminus A$, forma una pregeometría que se denotará por G/A y se llamará *contracción* de la geometría $G(S)$.

Sea $\mathcal{J}$ una familia de todos los conjuntos independientes del matroide M sobre S, $B \subseteq S$. Designemos con $\mathcal{J}(M \mid B)$ un conjunto $\{X: X \subseteq B, X \in \mathcal{J}\}$, y con $\mathcal{J}(M.B)$, una familia de tales $X \subseteq B$, para los cuales existe un subconjunto independiente máximo Y de $S \setminus B$ en M tal que $X \cup Y \in \mathcal{J}$.

8.102. Demuéstrese que $\mathcal{J}(M \mid B)$ es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide $M \mid B$ sobre el conjunto B, que se denomina *contracción* de M en B. (Compárese $M \mid B$ con el matroide $G(B)$ del problema 8.100).

8.103. Demuéstrese que $\mathcal{J}(M.B)$ es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide $M.B$ sobre el conjunto B que se llama *contracción de M con ayuda de B*. Muéstrese que $M.B = M/(S \setminus B)$, donde $M/(S \setminus B)$ es una contracción del matroide M sobre el conjunto S definida en el problema 8.101.

8.104. Sea $M \mid A$ un submatroide del matroide M y sean r, r_A las funciones de rango de los matroides M y $M \mid A$, respectivamente. Demuéstrese que para todo $B \subseteq A$.

a) B es independiente en $M \mid A \iff B$ independiente en M;

b) B, que es la base del submatroide $M \mid A \iff B$, es la base del conjunto A en M;

c) B, que es un ciclo en $M \mid A \iff B$, es un ciclo en M;

d) $r_A(B) = r(B)$.

8.105. Sea M/A una contracción del matroide M sobre el conjunto S y supongamos que r, $r_{S/A}$ son funciones de rango de los matroides M y M/A, respectivamente. Demuéstrese que para todo $X \subseteq S \setminus A$ son válidas las siguientes afirmaciones:

a) un conjunto X es independiente en M/A cuando y sólo cuando $X \cup Y$ es independiente en M para todos los subconjuntos independientes $Y \subseteq A$;

b) X es una base del matroide M/A cuando y sólo cuando $X \cup B$ es la base del matroide M para todas las bases B del conjunto A;

c) X es un ciclo en M/A cuando y sólo cuando $X = C \setminus A = \varnothing$, donde C es el ciclo del matroide M y X es el conjunto mínimo con tal propiedad;

d) $r_{S/A}(X) = r(X \cup A) - r(A)$.

8.106. Sea M un matroide sobre el conjunto S y supongamos que $B \subseteq A \subseteq S$. Demuéstrense las siguientes relaciones:

a) $(M \mid A) \mid B = M \mid B$;

b) $M.B = (M.A).B$;

c) $(M \mid A).B = (M.(S \setminus (A \setminus B))) \mid B$;

d) $(M.A) \mid B = (M \mid (S \setminus (A \setminus B))).B$.

8.107. Sea M un matroide sobre el conjunto S y $A \subseteq S$. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) $(M \mid A)^* = M^* \setminus (S \setminus A)$;

b) $(M \setminus A)^* = M^* \mid (S \setminus A)$.

8.108. Sea M un matroide sobre el conjunto S con el operador de clausura $^-$. Entonces el par $(S, \mathcal{J}_{[A,B]})$ se denominará *menor del matroide* M. ¿Será matroide cualquier menor del matroide M? Arguméntese la respuesta.

Sea M un matroide sobre el conjunto S. Muy a menudo para mayor comodidad el submatroide $M \mid (S \setminus \{a\})$, donde $a \in S$, se denota por $M - a$ y suele decirse que se obtiene del matroide M por exclusión del elemento a. Análogamente, un submatroide $M \mid (S \setminus A)$, donde $A \subseteq S$, del matroide M se designa por $M - A$. En este caso resulta natural llamar menor del matroide a una sucesión arbitraria de contracciones y exclusiones.

8.109. Demuéstrese que si $\bar{r}$ es una función de rango del menor $(M/A) - B$ del matroide M sobre el conjunto S con la función de rango r, entonces para cada $\mathcal{Z} \subseteq S \setminus (A \cup B)$ se verifica la relación

$$\bar{r}(\mathcal{Z}) = r(\mathcal{Z} \cup A) - r(A).$$

8.110. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) todo menor de un matroide gráfico es gráfico;

b) cada submatroide de un matroide transversal es transversal.

8.111. Sean $M_1 = (S_1, \mathcal{J}_1)$ y $M_2 = (S_2, \mathcal{J}_2)$ los matroides sobre los conjuntos S_1 y S_2, respectivamente, y $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Pongamos $S = S_1 \cup S_2$ y $\mathcal{J} = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{J}_1,\ B \in \mathcal{J}_2$. Demuéstrese que $M = (S, \mathcal{J})$ es un matroide.

El matroide citado en el problema 8.111 se denomina *suma directa de matroides* y se designa por $M_1 \oplus M_2$.

8.112. Sea $M_i = (S_i, \mathcal{J}_i)$ un matroide sobre el conjunto S_i con una familia de conjuntos independientes $\mathcal{J}_i$, donde $i = 1, 2$, y $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Para cada $A \subseteq S = S_1 \cup S_2$ y $A_i \subseteq S_i$ $(i = 1, 2)$ demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(1) $M = M_1 + M_2$;

(2) $r(A_1 \cup A_2) = r(A_1) + r(A_2)$;

(3) $r(M) = r(M_1) + r(M_2)$;

(4) $r(S) \geqslant r(S_1) + r(S_2)$;

(5) $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando $A_i \in \mathcal{J}_i$ para cada $i = 1, 2$;

(6) $A_1 \cup A_2$ es un conjunto engendrador del matroide M cuando y sólo cuando A_i es un conjunto engendrador del matroide M_i, donde $i = 1, 2$;

(7) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$;

(8) $A_1 \cup A_2$ es un conjunto dependiente en M cuando y sólo cuando A_1 es un conjunto dependiente en M_1 ó A_2 es un conjunto dependiente en M_2;

(9) A es un hiperplano del matroide M cuando y sólo cuando $A = S_1 \cup A_2$ y A_2 es un hiperplano del matroide M_2, o bien $A = A_1 \cup S_2$ y A_1 es hiperplano del matroide M_1;

(10) $\overline{S_1 \cup A} = S_1 \cup \overline{A}$;

(11) $\overline{S_1 \cap A} = S_1 \cap \overline{A}$;

(12) $S_1 \cup K$ es cerrado para todos los conjuntos cerrados K de M;

(13) todos los hiperplanos del matroide M contienen o bien el conjunto S_1, o bien el complemento de éste;

(14) C es un ciclo del matroide M cuando y sólo cuando $C = A_1 \cup A_2$, con la particularidad de que o bien A_1 es un ciclo en M_1 y $A_2 = \varnothing$, o bien A_2 es un ciclo en M_2 y $A_1 = \varnothing$;

(15) si B es una base del matroide M, entonces $B \cap S_1$ será también una base, pero en el matroide M_1;

(16) si $B \cap S_1$ es una base del matroide M y $B \setminus S_1$, una base del matroide $M - S_1$, entonces B es la base del matroide M;

(17) si A_1 es un conjunto independiente en el matroide M_1 y A_2, un conjunto independiente en $M - S_1$, entonces $A_1 \cup A_2$ es un conjunto independiente en M;

(18) $r(M - S_1) = r(M/S_1)$;

(19) $M - S_1 = M/S_1$.

8.113. Sea $M = M_1 \oplus M_2$. Demuéstrese que para todos los $A_i \subseteq S_i$ $(i = 1, 2)$ son válidas las siguientes afirmaciones:

a) $(M_1 - A_1) \oplus (M_2 - A_2) = M_1/A_1 \oplus M_2/A_2$;
b) $M/(A_1 \cup A_2) = M_1/A_1 \oplus M_2/A_2$;
c) $M^* = M_1^* \oplus M_2^*$.

Si $M = M_1 \oplus M_2$, los matroides M_1 y M_2 llevan el nombre de *separadores* del matroide M. Un matroide privado de separadores se llama *conexo*.

8.114. Supongamos que M es un matroide sobre el conjunto S y $p \in S$. ¿Serán ciertas las afirmaciones que siguen:

a) p es un separador cuando y sólo cuando p es un bucle del matroide M;

b) un matroide conexo es o bien un bucle, o bien no tiene bucles.

8.115. Demuéstrese que $M = M_1 \oplus M_2$ cuando y sólo cuando el retículo $L(M)$ de superficies del matroide M es igual al producto directo de los retículos de las superficies de los matroides M_1 y M_2, es decir, $L(M) = L(M_1) \times L(M_2)$.

8.116. Supongamos que M es un matroide conexo sobre el conjunto S y $p \in S$. Demuéstrese que en este caso o $M - p$, o bien M/p es un matroide conexo.

8.117. Demuéstrese que si M' es el menor de un matroide conexo M, entonces existe una sucesión de matroides $M_1, M_2, \ldots, M_n, M_{n+1}$ tal que $M = M_1$, $M' = M_{n+1}$ y para cualquier i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $M_{i+1} = M_i - p_i$, o bien $M_{i+1} = M_i/p_i$.

8.118. Dese la definición de la suma directa $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ de cualquier número finito de matroides M_i. Demuéstrese para $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ las afirmaciones análogas a las citadas en los problemas 8.111 y 8.115.

8.119. Sea f una función semimodular monótona creciente de números enteros, definida sobre los subconjuntos de un conjunto finito S; $f(\varnothing) = 0$ y $\mathcal{J} = \{A \subseteq S \mid$ tales que para cada $B \subseteq A$ tiene lugar la desigualdad $|B| \leqslant f(B)\}$. Demuéstrese que $\mathcal{J}$ es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide cuya función de rango $r(A)$ se calcula, para todos los $A \subseteq S$, según la fórmula

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \{f(B) + |A \setminus B|\}.$$

8.120. Sea $M_i = (S, r_i)$ un matroide sobre el conjunto finito S con la función de rango r_i y una familia de conjuntos independientes $\mathcal{J}_i$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuéstrese que

$$\mathcal{J} = \{A \subseteq S \mid A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \text{donde } A_i \in \mathcal{J}_i\}$$

es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide cuya función de rango r se define por la relación siguiente:

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \{\sum_{i=1}^{n} r_i(B) + |A \setminus B|\}.$$

El matroide del problema 8.120 se llama unión (reunión) de *matroides* M_i y se designa por $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$.

8.121. Sea $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, donde M_i es un matroide sobre el conjunto S con la función de rango r_i. Demuéstrese que para todos los $A \subseteq S$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) el conjunto A es independiente en M;

b) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, donde A_i es un conjunto independiente del matroide M_i para cada i;

c) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, donde $A_i \cap A_j = \varnothing$ para cualquier $i \neq j$ y A_i es un conjunto independiente del matroide M_i para cualesquiera i.

8.122. Sean $M_1 = (S, \mathcal{J}_1)$ y $M_2 = (S, \mathcal{J}_2)$ matroides sobre el conjunto S con las funciones de rango r_1 y r_2, respectivamente. Demuéstrese que el número máximo de elementos del conjunto $A_1 \cup A_2$ tal que $A_1 \in \mathcal{J}_1$ y $A_2 \in \mathcal{J}_2$ es igual a

$$\min_{A \subseteq S} \{r_1(A) + r_2(A) + |S \setminus A|\}.$$

8.123. Sean M_1 y M_2 los matroides sobre el conjunto S. Demuéstrese que la potencia máxima del conjunto independiente en ambos matroides es $\min_{A \subseteq S} \{r_1(A) + r_2(S \setminus A)\}$.

8.124. Sean B_1 y B_2 las bases del matroide M, y $X_1 \cup Y_1$, una partición de la base B_1 en subconjuntos no vacíos disjuntos. Demuéstrese que existe tal partición $X_2 \cup Y_2$ de la base B_2 en la que $X_1 \cup Y_2$ y $X_2 \cup Y_1$ también son bases del matroide M.

8.125. Sean S y T las bases del matroide M y $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, una partición de la base S. Demuéstrese que existe una partición correspondiente de la base $T = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$ tal que $(S \setminus S_i) \cup T_i$ es la base del matroide M para cualquier $i = 1, 2, \ldots, k$.

Se llama extensión unipuntual del matroide M sobre el conjunto S mediante el punto $a \notin S$, tal matroide M' sobre el conjunto $S \cup \{a\}$ que $r(M') = r(M)$ y $M = M' - a$.

8.126. Demuéstrese que para cada matroide existe una extensión unipuntual.

Suele decirse que un par de superficies (A, B) es *modular*, si $\overline{C \cup A} \cap B = \overline{C \cup (A \cap B)}$ para todas las superficies $C \subseteq B$. En términos de la función de rango r un par de superficies (A, B) es modular cuando y sólo cuando $r(A \cup B) + r(A \cap B) = r(A) + r(B)$.

8.127. Sean A, B unas superficies de la geometría G tales que $A \cap B = \varnothing$. Demuéstrese que el par (A, B) es no modular cuando y sólo cuando existe un ciclo K tal que

$$K \subseteq (A \cup B) \setminus \bar{\varnothing}, \quad K \cap A = \varnothing, \quad K \cap B \neq \varnothing.$$

8.128. Sean A, B unas superficies de la geometría G. Demuéstrese que el par (A, B) es modular si y solo si el par $(A \setminus (A \varnothing B), B \setminus (A \cap B))$ es modular en la contracción $G/A \cap B$.

Se denomina *filtro modular* $\mathscr{M}$ de la pregeometría $G(S)$ a una familia $\mathscr{M}$ de subconjuntos del conjunto S tal que

a) si $A \in \mathscr{M}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathscr{M}$;

b) si $A, B \in \mathscr{M}$ y (A, B) es un par modular, entonces $A \cap B \in \mathscr{M}$.

8.129. Sea $G(S \cup \{p\})$ una pregeometría sobre el conjunto $S \cup \{p\}$, $p \notin S$, con el operador de clausura $\mathfrak{I}$ y la función de rango r. Demuéstrese que el conjunto $\mathscr{M} = \{A \subseteq S: p \in \mathfrak{I}(A)\}$ forma un filtro modular de la subpregeometría $G(S)$.

8.130. Demuéstrese que si $\mathscr{M}$ es un filtro modular de la pregeometría $G(S)$, entonces existe una única extensión unipuntual $G(S \cup \{p\})$ tal que $\mathscr{M} = \{A \subseteq S: p \in \mathfrak{I}_{S \cup \{p\}}(A)\}$.

8.131. Supongamos que $\mathscr{M}$ es un filtro modular de la pregeometría $G(S)$ y $G(S \cup \{p\})$, la extensión $G(S)$ construida con ayuda de $\mathscr{M}$.

Demuéstrese que de superficies en $G(S \cup \{p\})$ sirven todos los subconjuntos $S \cup \{p\}$ de los siguientes tipos:

a) $A \cup \{p\}$, si A es una superficie de la pregeometría $G(S)$ y $A \in \mathscr{M}$;

b) A, si A es una superficie de la pregeometría $G(S)$ y $A \notin \mathscr{M}$;

c) $A \cup \{p\}$, si A es una superficie de la pregeometría G y A no se dispone en $\mathscr{M}$ y no se cubre en $G(S)$ por ninguna superficie de $\mathscr{M}$.

8.132. Compruébese que las extensiones unipuntuales de la pregeometría $G(S)$, ordenadas según la inclusión de sus filtros modulares en $G(S)$, forman un retículo.

8.133. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S y sea $\mathfrak{I}$ una familia de sus conjuntos independientes; r es su función de rango y k, un número positivo entero tal que $k \leqslant r(S)$. Demuéstrese que la familia $\mathfrak{I}_k = \{A \subseteq S \mid A \in \mathfrak{I} \text{ y } |A| \leqslant k\}$ es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide M_k sobre el conjunto S con la función de rango $r_k(A) = \min\{k, r(A)\}$.

El matroide M_k citado en el problema 8.133 recibe el nombre de *k-truncamiento del matroide M*. Observemos que el retículo de superficies M_k se obtiene del retículo $L(M)$ de superficies del matroide M al borrar todas las superficies de rango $\geqslant k$ y al sustituirlas por un nuevo elemento maximal del retículo.

8.134. Hállese el truncamiento de un matroide cíclico del grafo completo sobre cuatro vértices.

8.135. Dense los ejemplos de matroides gráficos no isomorfos cuyos truncamientos son isomorfos.

8.136. ¿Podrá ser no gráfico el truncamiento de un matroide gráfico? ¿Podrá ser gráfico el truncamiento de un matroide no gráfico? Dense ejemplos.

Si el matroide M sobre un conjunto S es isomorfo a $(r(H) - 1)$-truncamiento del matroide H sobre el conjunto S, se dice que el matroide H es el *incremento del matroide* M. Sin perder la generalidad podemos considerar que el retículo de superficies del matroide H se obtiene a partir del retículo de superficies del matroide M incluyendo el nivel de nuevos coátomos, situado más arriba de los coátomos iniciales y por debajo del elemento unitario del retículo.

8.137. ¿Existe un incremento para todo matroide?

8.138. Sea M un matroide definido sobre el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, de cuyas bases intervienen los subconjuntos de S que contienen tres elementos, a excepción del subconjunto $\{1, 2, 3\}$. ¿Existe un incremento de este matroide?

Sean $\mathscr{H}$ y $\mathscr{F}$ dos anticadenas del booleano $\mathscr{P}(S)$. Diremos que la anticadena $\mathscr{H}$ es *menor* que la $\mathscr{F}$, si para todo $A \in \mathscr{H}$ existe un elemento $B \in \mathscr{F}$ tal que $A \subseteq B$. En el caso cuando tal elemento $B \in \mathscr{F}$ es único, se dice que $\mathscr{F}$ parte la anticadena $\mathscr{H}$.

8.139. Demuéstrese que los diferentes incrementos (o, con mayor precisión, las familias de coátomos en los retículos de superficies de los incrementos) del matroide M sobre el conjunto finito S, ordenados como anticadenas del booleano, forman el retículo completo $E(G)$, cuyo elemento minimal se denomina *incremento libre del matroide* M.

8.140. Demuéstrese que cada erección de la geometría G sobre el conjunto S parte la anticadena de todas las bases de la geometría G.

8.141. Demuéstrese que si el incremento libre de la geometría G sobre el conjunto finito S se conoce, todas los demás incrementos de esta geometría pueden obtenerse mediante la partición del incremento libre.

8.142. Demuéstrese que un matroide homogéneo $U_{3,7}$ tiene 171 diferentes incrementos.

8.143. ¿Podrá incrementarse el matroide de Vamos (véase el problema 8.21)?

8.144. Constrúyase un matroide de rango 3 que no tenga incrementos.

8.145. (?). La superficie A de un matroide M se denomina *esencial*, si $M \mid A$ tiene un incremento no trivial. Se puede mostrar que sólo las superficies esenciales junto con sus rangos definen unívocamente un matroide. Ofrézcase el método para identificar las superficies esenciales de un matroide.

Se llama *aplicación fuerte* de un retículo geométrico L_1 en el retículo geométrico L_2 la función $\sigma: L_1 \to L_2$ que satisface las condiciones siguientes:

a) $\sigma(x \vee y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$ para todos los $x, y \in L_1$;

b) si p es un átomo del retículo L_1, entonces $\sigma(p)$ es un átomo o cero del retículo L_2.

8.146. Dense ejemplos de las siguientes aplicaciones φ del retículo geométrico L_1 en el retículo geométrico L_2:

a) φ no es una aplicación fuerte;

b) φ es una aplicación fuerte;

c) φ es un homomorfismo (véase el problema 7.87) que no es una aplicación fuerte;

d) φ es una aplicación fuerte que no constituye un homomorfismo.

8.147. Sea L_1 un retículo geométrico de superficies de un matroide gráfico y supongamos que σ: $L_1 \to L_2$ es una aplicación fuerte. ¿Está obligada a ser $\sigma(L_1)$ un retículo de superficies de cierto matroide gráfico?

8.148. Sea σ una aplicación fuerte del retículo geométrico L_1 en el retículo geométrico L_2. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si $x \prec y$ en L_1, entonces $\sigma(x) = \leqslant \sigma(y)$ en L_2;

b) $r_2(\sigma(x)) \leqslant r_1(x)$ para cualquier $x \in L_1$, donde r_1 y r_2 son funciones de rango de los retículos L_1 y L_2, respectivamente;

c) si $y \in L_2$, existe un $x \in L_1$ tal que $\sigma(x) = y$, y $r_2(y) = r_1(x)$, es decir, para cada elemento de imagen se encontrará una preimagen de rango igual.

8.149. Demuéstrese que la aplicación σ: $L_1 \to L_2$ es un isomorfismo cuando y sólo cuando σ es una aplicación fuerte «sobre» y $r(L_1) = r(L_2)$.

Sea M un matroide sobre el conjunto S. Unamos a cada matroide M un elemento nulo 0 que corresponde al conjunto vacío en el siguiente sentido: sea $0 \notin S$ y supongamos que M_0 es la suma directa $M \oplus \{0\}$ sobre el conjunto $S \cup 0$, donde $\{0\}$ es un matroide de rango 0 sobre el conjunto de un solo elemento $\{0\}$. Emplearemos un mismo símbolo 0 para denotar los elementos no nulos de cada uno de los matroides M_0.

Se denomina *aplicación fuerte* del matroide $M(S)$ en el matroide $N(T)$ a una función σ: $S \cup 0 \to T \cup 0$ tal que $\sigma(0) = 0$ y la preimagen de cualquier conjunto cerrado del matroide N_0 es también cerrada en M_0.

Sean $M(S)$ y $N(T)$ unos matroides sobre los conjuntos S y T, respectivamente; $L(M)$ y $L(N)$, retículos de superficies de los matroides M y N, respectivamente y σ: $S \cup 0 \to T \cup 0$. Emplearemos para denotar las superficies en el retículo y en el matroide una misma letra: minúscula en el primer caso y mayúscula, en el segundo, subrayando con ello que en el retículo la superficie es un elemento, y en el matroide, un subconjunto. Definamos la aplicación σ^*: $L(M) \to L(N)$ del modo siguiente: si $x \in L(M)$, entonces $\sigma^*(x) \in L(N)$ y le corresponde en el matroide N la superficie $\sigma(X)$.

8.150. Supongamos que $M(S)$ y $N(T)$ son matroides sobre los conjuntos S y T, respectivamente y que σ: $S \cup 0 \to T \cup 0$ es una función tal que $\sigma(0) = 0$. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) para todo subconjunto $A \subseteq S$ tenemos $\sigma(\overline{A}) \subseteq \overline{\sigma(A)}$;
b) σ es una aplicación fuerte de $M(S)$ en $N(T)$;
c) σ^* es una aplicación fuerte de $L(M)$ en $L(N)$.

8.151. Supongamos que $X \subseteq S$ y la aplicación $\sigma: S \cup 0 \to (S \setminus X) \cup 0$ está definida del modo siguiente:

$$\sigma(a) = \begin{cases} a, & \text{si} \quad a \in S \setminus X; \\ 0, & \text{si} \quad a \in X \cup 0. \end{cases}$$

Demuéstrese que σ induce la aplicación fuerte desde el matroide M sobre el conjunto S en su contracción M/X.

La aplicación fuerte σ; $M(S) \to M/X$ del problema 8.151 se llama *aplicación de contracción* (o, simplemente, *contracción*).

8.152. Supongamos que M es un matroide en el conjunto S, $T \subseteq S$ y $\sigma(a) = a$ para todo $a \in T \cup 0$. Compruébese que σ induce la aplicación fuerte del matroide M en un submatroide $M \mid T$, denominada encaje.

8.153. Supongamos que M es un matroide sobre el conjunto S de rango n y M_k, su k-truncamiento. Compruébese que una función idéntica sobre el conjunto $S \cup 0$ induce la aplicación fuerte del matroide M en M_k, llama $(n-k)$-truncamiento.

Los 1-truncamientos del matroide M de rango n en el matroide M_{n-1} se llamarán simplemente *truncamientos* del matroide M.

Sean M y N los matroides sobre un mismo conjunto S tales que $\sigma(a) = a$ induce para todo $a \in S \cup 0$ la aplicación fuerte de M en N. Entonces N se denomina *factor del matroide* M, y M, *elevador* (*lift*) *del matroide* N.

8.154. Sean M y N dos matroides sobre el conjunto S. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) N es un factor del matroide M;
b) si el conjunto X es cerrado en N, entonces X es también cerrado en M;
c) para cualquier subconjunto $A \subseteq S$ tenemos $\overline{A}^M \subseteq \overline{A}^N$;
d) M^* es un factor del matroide N^*;
e) cada ciclo del matroide M es una unión de ciclos del matroide N;
f) para cualquier par de subconjuntos A y B de S tales que $A \subseteq B$ tiene lugar la siguiente desigualdad:

$$r_M(B) - r_M(A) \geqslant r_N(B) - r_N(A).$$

Una aplicación fuerte del matroide $M(S)$ en el matroide $N(S)$ se llama *elemental*, si $r(M) = r(N) - 1$. En este caso N se denomina cociente[1]) (factor elemental) del matroide M, y M, elevador (*lift*) elemental del matroide N.

---

[1]) En inglés se denomina *quotient*.

8.155. Sean M y N los matroides sobre el conjunto S. Demuéstrese que una función idéntica sobre el conjunto $S \cup 0$ induce la aplicación fuerte del matroide M en el matroide N cuando y sólo cuando induce también una aplicación fuerte del matroide N^* en el matroide M^*, donde los matroides M^* y N^* son duales con relación a M y N, respectivamente.

8.156. Demuéstrese que M es un factor elemental del matroide N cuando y sólo cuando M^* es un elevador elemental del matroide N^*.

8.157. Demuéstrese que cada aplicación fuerte puede ser desarrollada en una sucesión de aplicaciones fuertes elementales.

8.158. Demuéstrese que H es un factor elemental del matroide G sobre el conjunto S cuando y sólo cuando existe el único matroide M sobre el conjunto $S \cup \{p\}$, donde p no es ni bucle ni istmo, tal que $G = M - p$, y $H = M/p$.

8.159. Sea H un factor elemental del matroide G sobre el conjunto S. Demuéstrese que $M = \{A \subseteq S \mid A$ es una superficie del matroide H y $r_G(A) - r_H(A) = 1\}$, un filtro modular del matroide.

8.160. Demuéstrese el *teorema de desarrollo*: cada aplicación fuerte puede ser representada como un encaje con una contracción consecutiva.

Se denomina *aplicación débil* τ del matroide $M(S)$ en el matroide $N(T)$ a la función τ: $S \cup 0 \to T \cup 0$ tal que $\tau(0) = 0$, y si un subconjunto $A \subseteq S$ es de tal índole que la aplicación τ/A es biunívoca en A y $\tau(A)$ es un conjunto independiente en el matroide N_0, entonces A es también un conjunto independiente en el matroide M. Dicho de otro modo, τ: $S \cup U \to T \cup 0$ es la aplicación débil de $M(S)$ en $N(T)$, si para cada $A \subseteq S$ se verifica la siguiente desigualdad: $r_{N_0}(\tau(A)) \leqslant r_M(A)$.

8.161. Demuéstrese que cada aplicación fuerte σ: $M(S) \to N(T)$ es débil.

8.162. Dése un ejemplo de aplicación débil que no sea fuerte.

8.163. Sean M y N los matroides sobre un mismo conjunto S. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) una función idéntica sobre $S \cup 0$ induce una aplicación débil de M en N;

b) cada conjunto independiente en N es también independiente en M;

c) cada conjunto dependiente en M es también dependiente en N;

d) cada ciclo del matroide M contiene un ciclo del matroide N;

e) para cada subconjunto A de S se verifica la siguiente desigualdad: $r_M(A) \geqslant r_N(A)$.

8.164. Sea $\mathfrak{M}$ una familia de todos los matroides sobre el conjunto S. Diremos que $M \geqslant N$, donde M y $N \in \mathfrak{M}$, si una función idéntica sobre $S \cup 0$ induce una aplicación débil de M en N. Compruébese que m con la relación binaria definida en ella es un conjunto parcialmente ordenado. Indíquense los elementos maximal y minimal en este conjunto parcialmente ordenado.

Una aplicación débil de M en N, donde M y $N \in \mathfrak{M}$, se llama *simple*, si $M \rangle\!- N$ en el conjunto parcialmente ordenado mencionado en el problema 8.164.

8.165. Supongamos que M y N son matroides sobre el conjunto S; $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$, las familias de conjuntos independientes de M y de N, respectivamente, y que $\mathcal{J}_1 \supseteq \mathcal{J}_2$. Demuéstrese que una función idéntica sobre $S \cup 0$ induce una aplicación fuerte de M en N, la cual en el caso general no ha de ser forzosamente fuerte.

Una aplicación débil τ: $M(S) \rightarrow N(S)$, inducida por la función idéntica sobre el conjunto $S \cup 0$, se llamará *aplicación débil conservadora del rango*, siempre que $r(M) = r(N)$.

8.166. Demuéstrese que cada aplicación débil de $M(S)$ en $N(S)$ puede ser desarrollada unívocamente en un truncamiento seguido por una aplicación débil conservadora del rango.

8.167. Demuéstrese que si M y N son matroides sobre el conjunto S, $r(M) = r(N)$ y τ es una función idéntica sobre el conjunto $S \cup 0$, entonces τ: $M \rightarrow N$ será una aplicación débil conservadora del rango cuando y sólo cuando lo es también la aplicación τ: $M^* \rightarrow N^*$, donde M^* y N^* son matroides duales con relación a M y N, respectivamente.

8.168. Una aplicación débil τ del matroide $M(S)$ y $N(T)$ induce una función τ^* del retículo $L(M)$ de superficies del matroide M en el retículo $L(N)$ de superficies del matroide N, de la manera siguiente: si X es una superficie en $M(S)$, entonces $\tau^*(X) = \overline{\tau(X)}$. Dése un ejemplo de que a diferencia de las aplicaciones fuertes, para las débiles puede no verificarse la relación $(0 \cdot \tau)^* = 0^* \cdot \tau^*$.

8.169. Sea $M(S)$ un matroide sobre el conjunto S, $X \subseteq S$. Compruébese que la función τ: $S \cup 0 \rightarrow X \cup 0$, definida de la siguiente manera

$$\tau(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \in S \setminus X \text{ ó } a = 0; \\ a, & \text{si } a \in X, \end{cases}$$

induce la aplicación débil τ del matroide $M(S)$ en su submatroide $M \mid X$, que se denomina *retracto*.

8.170. Supongamos que τ es un retracto del matroide $M(S)$ en su submatroide $M \mid X$, donde $X \subseteq S$ y X es un conjunto cerrado en M. Demuéstrese que para cualquier conjunto cerrado Y del matroide M tiene lugar una correlación: $\tau^*(Y) = Y \cap X$.

8.171. Sea $M(S)$ un matroide sobre S y $X \subseteq S$. Muéstrese que la suma directa $M/X \oplus M \mid X$ es una imagen del matroide M para cierta aplicación débil.

8.172. Muéstrese que las aplicaciones débiles conservadoras del rango conservan separadores.

8.173. Supongamos que una función idéntica sobre el conjunto $S \cup 0$ induce la aplicación débil conservadora del rango de $M(S)$ en $N(S)$ y K es el menor del matroide M definido sobre el subconjunto $E \subseteq S$. Demuéstrese que existe un menor L, definido sobre E,

tal que la función idéntica sobre $E \cup 0$ induce una aplicación débil conservadora del rango de K en L.

8.174. Hállese un matroide que sea dual con relación al matroide de Fano (véase el problema 8.20).

§ 3. Coordinatización y representabilidad de los matroides

Un matroide sobre el conjunto S se llama *representable sobre el campo* F, si existen el espacio lineal V sobre el campo F y la aplicación $\varphi\colon S \to V$, para la cual $A \subseteq S$ es independiente en M cuando y sólo cuando $\varphi|_A$ es biunívoca y $\varphi(A)$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en V. La aplicación φ se llama en este caso *coordinatización* del matroide M sobre el campo F.

Sea $GF(q)$ un campo finito de la característica q. Un matroide representable sobre el campo $GF(2)$ o $GF(3)$ se llama *binario* o *ternario*, respectivamente. Los matroides que pueden ser representables sobre cada campo se denominan *unimodulares* (o *regulares*).

8.175. Sea V un espacio lineal sobre el campo F, $U \subseteq V$. El número máximo de vectores linealmente independientes de U se llama *rango lineal* del conjunto U y se designa con el símbolo *dim* U. Demuéstrese que el matroide M sobre el conjunto S con función de rango r es *representable sobre el campo* F cuando y sólo cuando existen el espacio lineal V sobre el campo F y la aplicación conservadora de rango $\varphi\colon S \to V$, es decir, tal aplicación φ que *dim* $\varphi(A) = r(A)$ para cualquier $A \subseteq S$.

Supongamos que M es un matroide sobre el conjunto S y $L(M)$, su retículo de superficies. Se llama *geometría G asociada al matroide M* tal geometría combinatoria sobre el conjunto S_0 de átomos del retículo $L(M)$ que el retículo de sus superficies $L(G)$ es isomorfo a $L(M)$ (véanse los problemas 8.45 y 8.46).

8.176. Demuéstrese que un matroide M sobre el conjunto S puede ser representado sobre el campo F cuando y sólo cuando la geometría G asociada al matroide M es representable sobre el campo F.

La coordinatización φ de un matroide M sobre el campo F no es, hablando en general, una aplicación biunívoca. Por ejemplo, para $a, b \in S$ tenemos $\varphi(a) = 0$ cada vez que a es un bucle del matroide M, y $\varphi(a) = \varphi(b)$, siempre que $\{a, b\}$ es un ciclo del matroide M y a, b no son bucles. Al mismo tiempo, la coordinatización φ de las geometrías combinatorias es una aplicación biunívoca. En virtud del problema 8.176, podemos, al estudiar la representabilidad de los matroides, limitarnos a las geometrías, lo que se realizará en adelante. En el lenguaje geométrico la afirmación del problema 8.176 significa que la coordinatización de la geometría G es un encaje de G en la geometría proyectiva de dimensión $n-1$ sobre el campo F para $n \geqslant 4$ (véase el problema 7.169). De aquí se desprende, en

particular, que la configuración del tipo de Desargues y de Pappo (véase el capítulo V, § 3) son respresentables.

8.177. Sea Φ un matroide de Fano (véase el problema 8.20) sobre el conjunto $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ (véase la fig. 8.4). Demuéstrese que Φ es representable sobre el campo $GF(2)$ y no es representable sobre ningún otro campo cuya característica es distinta de 2.

8.178. Sea Φ_1 un matroide obtenido del matroide de Fano (problema 8.177) por sustitución de la recta $\{e, f, g\}$ por 3 rectas triviales $\{e, f\}, \{e, g\}$ y $\{f, g\}$ (véase la fig. 8.4). Demuéstrese que el

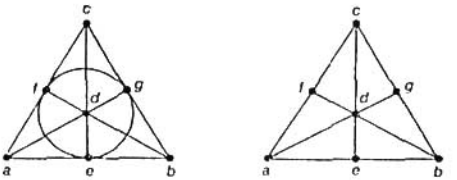


Fig. 8.4.

matroide Φ_1 es representable sobre todos los campos cuya característica es distinta de 2 y no es representable sobre el campo $GF(2)$.

Los matroides representables sobre los conjuntos finitos pueden cómodamente describirse con ayuda de las matrices. Supongamos que M es un matroide en el conjunto finito S representable sobre el campo F, $|S| = n$, y φ: $S \to V$ es su coordinatización sobre F. Entonces, una $(k \times n)$-matriz A con coeficientes del campo F, de cuyas columnas sirven los vectores $\varphi(p)$, donde $p \in S$, lleva el nombre de *matriz de coordinatización del matroide M sobre el campo F*. Entonces, el matroide $M(S)$ será isomorfo al submatroide $M(A)$ del matroide vectorial del espacio lineal V (véase el problema 8.7), engendrado por las columnas de la matriz A y llamado *matroide matricial*. De este modo, los matroides representables sobre los conjuntos finitos y los matroides matriciales sobre el campo F abarcan una misma clase de matroides.

8.179. Supongamos que A es una $(k \times n)$-matriz arbitraria con los coeficientes del campo F, B, una matriz cuadrada regular de orden k y A', una matriz que se obtiene de A con ayuda de las siguientes operaciones:

1. supresión de la fila compuesta de ceros;
2. permutación de las filas o de las columnas;
3. multiplicación de una fila o columnas por λ, donde $\lambda \in F$, y $\lambda \neq 0 \in F$. Demuéstrese que los vectores columna de las matrices A, A' y BA definen los matroides matriciales isomorfos.

8.180. Sea M un matroide en el conjunto S representable sobre el campo F y sea $B = \{e_1, \ldots, e_k\}$ su base arbitraria. Demuéstrese

que existe una aplicación conservadora de rango 0: $S \to F^k$ tal que $\theta(e_i) = \begin{pmatrix} 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0 \\ \quad\quad\quad\quad i \end{pmatrix}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

8.181. Sea M un matroide en el conjunto S representable sobre el campo F, $|S| = n$ y sea $B = \{e_1, \ldots, e_k\}$ su base arbitraria. Demuéstrese que existe tal $(k \times n)$-matriz A con coeficientes del campo F, cuyas k primeras columnas forman una matriz unitaria, que toda aplicación que al elemento $e_i \in B$ le pone en correspondencia la i-ésima columna de la matriz A, conserva el rango, es decir, es una coordinatización del matroide M sobre el campo F.

Una matriz A del problema 8.181 se llama *matriz estándar de representación* del matroide M *sobre el campo* F *respecto de la base* B.

8.182. Demuéstrese que un matroide homogéneo $U_{2,4}$ puede ser representado sobre cualquier campo, salvo $GF(2)$.

8.183. Hállese el matroide mínimal homogéneo que no sea representable sobre el campo $GF(3)$.

8.184. Demuéstrese que si M es un matroide sobre el conjunto S y $r(M) \leqslant 2$, entonces M es representable sobre cierto campo.

8.185. Demuéstrese que un matroide gráfico arbitrario es representable en cualquier campo, es decir, es unimodular (o regular).

8.186. Demuéstrese que si el matroide M es representable sobre el campo F, el matroide F^*, dual con relación a M, es también representable sobre F.

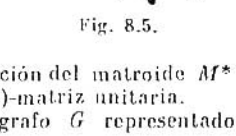


Fig. 8.5.

8.187. Sea M un matroide de rango k sobre el conjunto finito S, $|S| = n$. Demuéstrese que si (E_k, A) es una matriz estándar de representación del matroide M sobre el campo F, entonces $(-A^T, E_{n-k})$, es una matriz estándar de representación del matroide M^* sobre el campo F, donde E_k es una $(k \times k)$-matriz unitaria.

8.188. Sea M un matroide cíclico del grafo G representado en la fig. 8.5, y sea

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

¿Será A una matriz estándar de representación del matroide M sobre el campo $GF(2)$ respecto de cierta base B de M? Si es, hállese la matriz estándar de representación del matroide M^* sobre el campo $GF(2)$ respecto de la base $B^* = S \setminus B$.

8.189. Sea M un matroide sobre un conjunto finito S. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si M es representable sobre el campo F, será representable sobre F cualquier menor del matroide M;

b) si $M = M_1 \oplus M_2$, entonces M es representable sobre el campo F cuando y sólo cuando M_1 y M_2 son representables sobre el campo F.

8.190. Dése un ejemplo de un matroide que no es representable sobre ningún campo.

8.191. Muéstrese que si M es un matroide representalle sobre el campo F, el k-truncamiento del matroide M no es forzosamente representable sobre F.

8.192. Demuéstrese que cualquier menor propio del matroide de Fano Φ es representable sobre cualquier campo.

8.193. Sea $M(S)$ una geometría de rango 3 en 10 elementos cuya diagrama afín constituye la configuración de Desargues (véase la

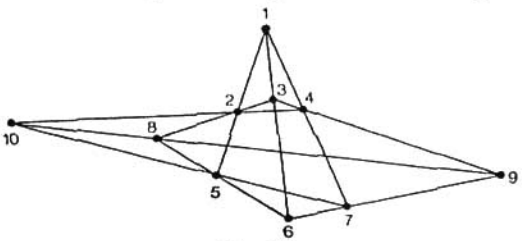


Fig. 8.6.

fig. 8.6). Hállese la matriz de representación del matroide M sobre el campo $G(F2)$. Demuéstrese que el matroide $M(S)$ es isomorfo al matroide cíclico del grafo completo K_5 sobre 5 vértices.

8.194. Demuéstrese que los matroides de rango 3 que siguen más abajo no son representables sobre ningún campo F:

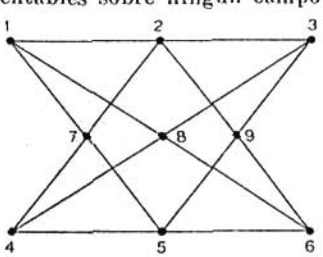


Fig. 8.7.

a) *matroide «no de Pappo»*: una geometría en 9 elementos cuyo diagrama afín está representado en la fig. 8.7 (si a la configuración en la fig. 8.7 le añadimos una recta {7, 8, 9}, obtendremos la configuración de Pappo [1]);

b) *matroide «no desargueano»*: una geometría en 10 elementos cuyo diagrama afín está representado en la fig. 8.8 y se obtiene a partir de la configuración de Desargues sustituyendo la recta 3-puntual {10, 8, 9} por tres rectas 2-puntuales {10, 8}; {10, 9} y {8 ,9}.

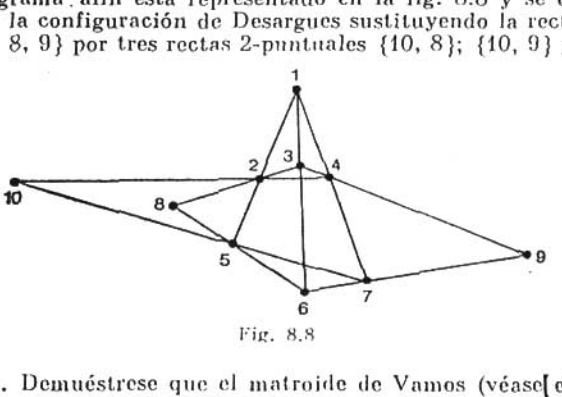


Fig. 8.8

8.195. Demuéstrese que el matroide de Vamos (véase el problema 8.21) no es representable sobre ningún campo F.

8.196. Sea $n = pk + 1$, donde p es un número primo y k, un número natural arbitrario. Véamos un matroide M_p, cuya matriz de representación sobre el campo $GF(p)$ tiene la forma siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 & 1 & 1 \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ 0 & 1 & & 1 & 0 & & 1 \\ \underbrace{\qquad} & & & \underbrace{\qquad} & & & \\ pk & & & pk & & & \end{pmatrix}$$

Demuéstrese que el matroide M_p es representable sólo sobre los campos de característica p.

El matroide M_p del problema 8.196 lleva el nombre *matroide de Lazarson*.

8.197. Constrúyase un matroide representable sobre el campo F cuando y sólo cuando la característica de este campo es igual a 1103 ó 2089.

8.198. Sea (E_k, A) una matriz estándar de representación del matroide M de rango k respecto de la base B sobre el campo F.

Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) la i-ésima columna de la matriz (E_k, A) corresponde al bucle del matroide M cuando y sólo cuando consta sólo de ceros;

b) la i-ésima columna de la matriz (E_k, A) corresponde al istmo del matroide M cuando y sólo cuando $i = \{1, 2, \ldots, k\}$ y la i-ésima fila de la matriz (E_k, A) tiene valores no nulos sólo en la i-ésima columna;

c) una matriz que se obtiene por supresión en (E_k, A) de la columna que corresponde al elemento p, es una matriz de representación del matroide M-p sobre el campo F;

d) si p no es un bucle del matroide M, entonces la matriz de representación del matroide M/p sobre el campo F se obtiene a partir de (E_h, A) del modo siguiente: la matriz (E_h, A) se reduce, con ayuda de transformaciones especiales (véase el problema 8.179), a una matriz que en la columna correspondiente al elemento p tiene sólo una coordenada distinta de cero, y luego en la matriz obtenida tachamos la columna y la fila que corresponden a este elemento no nulo;

e) las columnas de la matriz (E_h, A) que tienen 0 en la i-ésima columna forman un hiperplano H del matroide M;

f) cualquier cociclo del matroide M puede ser representado como un conjunto de todos los vectores columna con 1 en la primera fila de la matriz de representación del matroide M sobre el campo F, siendo adecuada su selección.

8.199. ¿Serán binarios todos los matroides representados en la fig. 8.9? ¿Existe un matroide binario M de rango 2 ó 3 que no sea isomorfo a ninguno de los matroides representados en fig. 8.9?

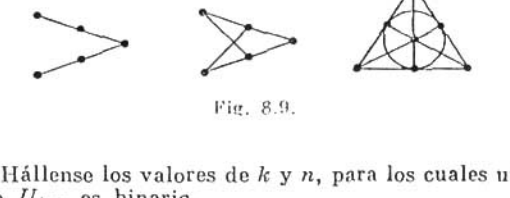


Fig. 8.9.

8.200. Hállense los valores de k y n, para los cuales un matroide homogéneo $U_{k,n}$ es binario.

8.201. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) M es un matroide binario;

b) para cualquier ciclo C y todo cociclo C^* del matroide M, sus intersecciones tienen un número par de elementos, es decir, $|C \cap C^*|$ es par;

c) si C_1 y C_2 son ciclos diferentes del matroide M, la diferencia simétrica $C_1 \Delta C_2$ contiene cierto ciclo C;

d) para todas las bases B y un ciclo arbitrario C del matroide M, si $C \setminus B = \{e_1, \ldots, e_q\}$ y $C(e_i)$ es un ciclo fundamental formado por el elemento e_i, respecto de la base B (véase el problema 8.27), entonces

$$C = C(e_1) \Delta \ldots \Delta C(e_q);$$

e) la diferencia simétrica de cualquier familia de diferentes ciclos del matroide M es una unión de ciclos disjuntos de M;

f) para cualesquiera k ciclos $C_1, \ldots, C_k$ del matroide M el conjunto $C_1 \Delta C_2 \Delta \ldots \Delta C_k$ es o bien vacío o bien contiene cierto ciclo C del matroide M;

g) para cualesquiera dos bases B_1 y B_2 del matroide M y para $y \in B_2$ arbitrario existe un número impar de elementos $x \in B_1$ tales que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ y $(B_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ son las bases del matroide M;

h) para cualesquiera dos ciclos diferentes C_1 y C_2 del matroide M y para $a, b \in C_1 \cap C_2$ existe un ciclo C_3 tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \setminus \{a, b\}$;

i) si C_1 y C_2 son ciclos diferentes arbitrarios del matroide M $(C_1 \cap C_2) \neq \varnothing$) que forman un par modular de conjuntos en M, entonces la diferencia simétrica $C_1 \Delta C_2$ será un ciclo de M;

j) para cualquier ciclo C y todo cociclo C^* del matroide M la potencia de sus intersecciones $C \cap C^*$ no es igual a 3.

8.202. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S, C una familia de sus ciclos y $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}$. Diremos que el ciclo C_1 *diferencia* los ciclos C_2 y C_3, si $C_2 \setminus C_1 \neq C_3 \setminus C_1$. Demuéstrese que el matroide M es binario cuando y sólo cuando entre cualesquiera tres ciclos $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}$ tales que $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \neq \varnothing$, existe por lo menos uno que diferencia los otros dos.

8.203. Demuéstrese el teorema de *Tutte*: un matroide M es binario cuando y sólo cuando ninguno de sus menores es isomorfo al matroide homogéneo $U_{2,4}$.

8.204. Demuéstrese que si una aplicación idéntica en el conjunto $S \cup 0$ induce una aplicación débil conservadora del rango del matroide binario M en el matroide N, entonces N es también un matroide binario.

8.205. Supongamos que M es un matroide binario arbitrario y que una función idéntica induce una aplicación débil conservadora de rango de M en el matroide N. Demuéstrese que si K es un menor conexo del matroide N, entonces K es también un menor conexo del matroide M.

8.206. Muéstrese que si H es una familia de matroides binarios cerrados respecto de la elección de menores y sumas directas, entonces H es también cerrada respecto de las imágenes de las aplicaciones débiles conservadoras de rango.

8.207. Supongamos que M es un matroide binario sobre el conjunto S y la función idéntica en el conjunto $S \cup 0$ induce la simple aplicación débil conservadora de rango de M en el matroide N. Demuéstrese que existe un subconjunto X del conjunto S tal que

$$N = M/X \oplus M \mid X.$$

8.208. Sea M un matroide binario conexo sobre el conjunto S. Demuéstrese que existe una correspondencia biunívoca entre las simples aplicaciones débiles conservadoras del rango de M en N y los subconjuntos $X \subseteq S$ tales que los matroides M/X y $M \mid X$ son conexos.

8.209. Sea $n\ (M)$ un número de componentes conexos del matroide M. Demuéstrese que si M es un matroide binario, entonces la aplicación débil conservadora del rango de M en N es simple, cuando y sólo cuando $n\ (N) = n\ (M) + 1$.

8.210. Sea M un matroide binario. Demuéstrese que una aplicación débil conservadora del rango de M en N puede desarrollarse en $n\ (N) - n\ (M)$ aplicaciones débiles simples no triviales y cada aplicación de este género contiene exactamente $n\ (N) - n\ (M)$ aplicaciones débiles simples.

8.211. Demuéstrese que un matroide homogéneo $U_{2,5}$ y un matroide dual con relación al primero no son ternarios.

8.212. ¿Será ternario el matroide $U_{2,4}$? Si es ternario, indíquese la matriz de su representación sobre el campo GF (3).

8.213. Demuéstrese que un matroide M es ternario cuando y sólo cuando no contiene menores isomorfos al matroide homogéneo $U_{2,5}$ y al de Fano Φ, como también a los duales con relación a estos últimos.

Supongamos que M es un matroide binario sobre el conjunto finito $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathfrak{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$, una familia de todos los ciclos y $\mathfrak{C}^* = \{K_1, \ldots, K_m\}$, una familia correspondiente de todos los cociclos del matroide M. Se llama matriz de los ciclos $C\ (M) = (a_{ij})$ del matroide M una $(k \times n)$-matriz tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } e_j \in C_i; \\ 0, \text{ en el caso contrario} \end{cases}$$

y se llama matriz de los cociclos $C^*\ (M) = (b_{ij})$ una $(m \times n)$-matriz tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } e_j \in K_i; \\ 0, \text{ en el caso contrario.} \end{cases}$$

Es evidente que para una numeración adecuada $C^*\ (M) = C\ (M^*)$, donde M^* es el matroide dual con relación al matroide M.

El matroide M se llama *orientable*, si para las unidades en las matrices $C\ (M)$ y $C^*\ (M)$ existe tal variante de asignar los signos $\pm$, que

$$\widetilde{C}\ (M)\ [\widetilde{C}^*\ (M)]^T = 0,$$

donde $\widetilde{C}\ (M)$ y $\widetilde{C}^*\ (M)$ son matrices de los ciclos y cociclos, respectivamente, tras la asignación de los signos.

8.214. Compruébese la validez de las siguientes afirmaciones:

a) todo matroide gráfico es orientable;

b) un matroide M es orientable cuando y sólo cuando M^* es orientable;

c) todo menor de un matroide orientable es orientable;

d) una suma directa de matroides orientables es orientable.

8.215. Dénse ejemplos de un matroide binario no orientable y de un matroide orientable que no sea: a) gráfico; b) cográfico; c) ni cográfico ni gráfico.

Sea φ una coordinatización del matroide M de rango n en el conjunto finito S sobre el campo F. Si los vectores en un espacio lineal V de dimensión n sobre el campo F, están representados en forma de vectores columna de la matriz estándar A de representación del matroide M sobre el campo F respecto de la base B, entonces para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ denotemos por $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ el determinante de una submatriz $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))$ de la matriz A. Los determinantes de este tipo se llaman *paréntesis de la coordinatización* φ y se designan por $[X]$, donde X es la sucesión $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

8.216. Sea M un matroide de rango n sobre el conjunto finito S. Para cada sucesión $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_i \in S$, $i = 1, \ldots, n$, pongamos en correspondencia un elemento $[X] = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (*sicigia*) del campo F. Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que exista la coordinatización φ del matroide M sobre el campo F, tal que sus paréntesis sean exactamente iguales a las sicigias $[X]$, consiste en que se cumplan para las sicigias las siguientes relaciones:

a) $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = 0$ cuando y sólo cuando el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es o bien independiente en M, o bien contiene menos de n diferentes elementos;

b) $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = sgn\ \sigma\ [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$ para todas las permutaciones σ de los elementos $\{1, 2, \ldots, n\}$ y para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$, donde $sgn\ \sigma$ es el signo de la permutación σ;

c) $[x_1, x_2, \ldots, x_n]\,[y_1, y_2, \ldots, y_n] - \sum_{i=1}^{n} [y_i, x_2, \ldots, x_n] \times [y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \ldots, y_n] = 0$ para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n \in S$.

8.217. Sean $R_1 = (E_n, A_1)$ y $R_2 = (E_n, A_2)$ dos matrices estándar de representación del matroide M sobre los campos F_1 y F_2, respectivamente. La aplicación φ que transforma cada columna de la matriz R_1 en la correspondiente columna de la matriz R_2 es un isomorfismo de los matroides matriciales $M(R_1)$ y $M(R_2)$ cuando y sólo cuando el determinante sobre el campo F_1 de una submatriz cuadrada arbitraria N_1 de la matriz A_1 es nulo, si y sólo si el determinante sobre el campo F_2 de la submatriz correspondiente N_2 de la matriz A_2 es igual a cero. En particular, si los matroides $M(R_2)$ y $M(R_1)$ son isomorfos, en las matrices A_1 y A_2 las posiciones de los elementos nulos coinciden.

8.218. Sea A una matriz estándar de representación del matroide M_1 sobre el campo $GF(2)$, y sea B una matriz estándar de representación del matroide M_2 sobre el campo de números racionales.

¿Será cierto que los matroides M_1 y M_2 son isomorfos, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El matroide M_1 se designará en adelante por R_{10}. Demuéstrese que $R_{10}^* = R_{10}$. Compruébese que todos los menores del matroide R_{10} son o bien gráficos o bien matroides cográficos.

Sea A una $(k \times n)$-matriz con coeficientes enteros y $k < n$. La matriz A se llama *totalmente unimodular*, si el determinante de cada su $(m \times m)$-submatriz es igual a cero o a ± 1 para cualquier m, donde $m = 1, 2, \ldots, k$. Diremos que A es una *matriz localmente unimodular*, si el determinante de cada su $(k \times k)$-submatriz es igual a 0 ó a ± 1.

8.219. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) A es una matriz totalmente unimodular;

b) para cada vector x con los componentes 0, ± 1 existe un vector y con componentes 0, ± 1 tal que

$$y = x \,(\text{mód } 2),$$

$$a_i \cdot y = \begin{cases} 0, & \text{si } a_i \cdot x = 0 \,(\text{mód } 2); \\ \pm 1, & \text{si } a_i \cdot x = 1 \,(\text{mód } 2), \end{cases}$$

para todas las filas de la matriz A;

c) cualquier menor de la matriz A es igual o bien a cero, o bien a un número impar.

8.220. Sea A una matriz arbitraria con coeficientes iguales a 0 y a ± 1. Demuéstrese que A es una matriz totalmente unimodular cuando y sólo cuando para cualquier submatriz cuadrada A' de la matriz A indicada con las filas $\mathcal{J}$ y columnas J y tal que para todo $i \in \mathcal{J}$ y $j \in J$ tenemos

$$\sum_{j' \in J} a_{ij'} = \sum_{i' \in \mathcal{J}} a_{i'j} = 0 \,(\text{mód } 2)$$

tiene lugar la igualdad

$$\sum_{i \in I,\ j \in J} a_{ij} \equiv 0 \ (\text{mód } 4).$$

8.221. Demuéstrese que una matriz de incidencias de cualquier grafo orientado es totalmente unimodular.

8.222. Demuéstrese que una matriz de incidencias del grafo no orientado G es totalmente unimodular cuando y sólo cuando G es un grafo bipartido.

8.223. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) el matroide M posee una matriz totalmente unimodular de representación sobre el campo de números racionales;

b) el matroide M tiene una matriz localmente unimodular de representación sobre el campo de números racionales;

c) a los paréntesis para el matroide M se les pueden asignar los valores 0 ó ± 1 del campo de números racionales de un modo tal que se cumplan las relaciones (a) — (c) para las sicigias (problema 8.216);

d) el matroide M es representable sobre cada campo F;

e) el matroide M es binario y ternario;

f) el matroide binario M puede ser representado sobre cierto campo F, cuya característica no es igual a 2.

8.224. Sea M un matroide unimodular de rango n sobre el conjunto finito S, y sea A una matriz localmente unimodular de representación del matroide M. Demuéstrese que el número de bases diferentes del matroide M es igual al determinante de la matriz $A \cdot A^T$ sobre el campo de números racionales. Hállese el número de bases del matroide representado en la fig. 8.10.

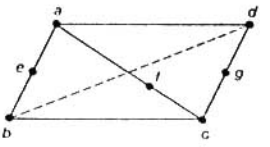


Fig. 8.10.

8.225. Demuéstrese que un matroide M es unimodular cuando y sólo cuando M es un matroide binario que no contiene menores isomorfos al matroide de Fano Φ y al matroide dual Φ^*.

8.226. Demuéstrese que un matroide M sobre el conjunto finito S es unimodular cuando y sólo cuando es orientable.

8.227. Compruébese que la exclusión de un elemento del matroide R_{10} lleva a la formación de un matroide cíclico del grafo bipartido completo $K_{3,3}$. Demuéstrese que el matroide R_{10} es unimodular.

8.228. Supongamos que M es un matroide unimodular sobre el conjunto S, $a \in S$, y el matroide $M - a$, un isomorfo al matroide R_{10}. Demuéstrese que a es un bucle, un istmo, o un elemento paralelo.

Sean M_1 y M_2 los matroides binarios sobre los conjuntos no vacíos S_1 y S_2, respectivamente, con la particularidad de que los

conjuntos S_1 y S_2 pueden intersecarse. Definamos un nuevo matroide binario $M_1 \Delta M_2$ sobre el conjunto $S_1 \Delta S_2 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$, de cuyos ciclos servirán todos los subconjuntos $S_1 \Delta S_2$ del tipo $C_1 \Delta C_2$, donde C_i es un ciclo del matroide M_i, y $i = 1, 2$. El matroide $M_1 \Delta M_2$ se llamará:

1) 1-*suma* de los matroides M_1 y M_2, si $S_1 \cap S_2 = \varnothing$;

b) 2-*suma* de los matroides M_1 y M_2, si $|S_1| \geqslant 3$, $|S_2| \geqslant 3$ y $S_1 \cap S_2 = x$, donde x no es un bucle ni tampoco un istmo de los matroides M_1 y M_2;

c) 3-*suma* de los matroides M_1 y M_2, si $|S_1| \geqslant 7$, $|S_2| \geqslant 7$, $S_1 \cap S_2 = X$, donde $|X| = 3$ y X es un ciclo para cada uno de los matroides M_1 y M_2, en el cual no se contiene ningún cociclo ni de M_1 ni de M_2.

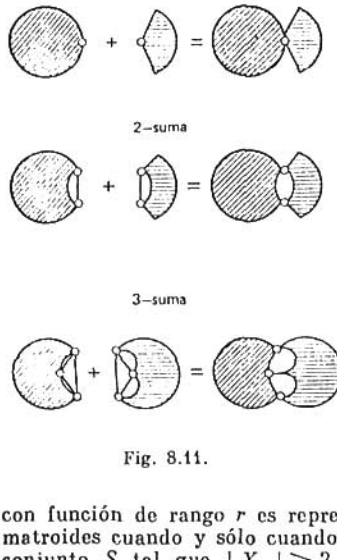


Fig. 8.11.

Observemos que la 1-suma de matroides M_1 y M_2 es simplemente *la suma directa de estos* matroides. La 2-suma representa un pegado de los matroides M_1 y M_2 a lo largo de su elemento común x (con la exclusión ulterior de éste), para el cual el rango del matroide $M_1 \Delta M_2$ es máximo e igual a $r(M_1) + r(M_2) - 1$. Análogamente, la 3-suma es la pegadura de los matroides M_1 y M_2 en una recta común, para la cual el rango del matroide $M_1 \Delta M_2$ es *máximo e igual a* $r(M_1) + r(M_2) - 2$. Las operaciones en consideración están ilustradas para los matroides gráficos en la fig. 8.11.

8.229. Demuéstrese que un matroide M sobre el conjunto S con función de rango r es representable como una 2-suma de dos matroides cuando y sólo cuando existe una partición (X_1, X_2) del conjunto S tal que $|X_1| \geqslant 2$, $|X_2| \geqslant 2$, y $r(X_1) + r(X_2) \leqslant r(S) + 1$.

8.230. Demuéstrese que las 1, 2 y 3-sumas de matroides unimodulares son unimodulares.

8.231. Demuéstrese que todo matroide unimodular puede ser obtenido por medio de las 1, 2 y 3-sumas de ciertos matroides gráficos y cográficos y, además, del matroide R_{10}.

8.232. Demuéstrense los siguientes resultados de Tutte:

a) un matroide M es gráfico cuando y sólo cuando no contiene menores isomorfos al matroide homogéneo $U_{2,4}$, a los matroides

de los cortes de los grafos completos K_5 y $K_{3,3}$ y al matroide de Fano Φ o al de Φ^*, dual respecto de Φ;

b) un matroide M es cográfico cuando y sólo cuando no contiene menores isomorfos al matroide homogéneo $U_{2,4}$, a los matroides cíclicos de los grafos completos K_5 y $K_{3,3}$, y al matroide de Fano Φ o al de Φ^*, dual respecto de Φ.

8.233. Supongamos que el conjunto $P = \{0, 2, 3, 5, 7, \ldots\}$ se compone de 0 y de todos los números primos. Un subconjunto K del conjunto P se llama *conjunto característico* del matroide M, si M es representable sobre el campo F cuando y sólo cuando la característica del campo es un elemento de K. Dense ejemplos de matroides con las siguientes características del conjunto: a) $K = P$; b) $K = \varnothing$; c) $|K| = 1$; d) $K = P \setminus \{2\}$.

8.234. Supongamos que a todo punto en el interior del rectángulo F corresponde cierto matroide. ¿Será correcta la manera de expresar las relaciones entre las diferentes clases de matroides del diagrama

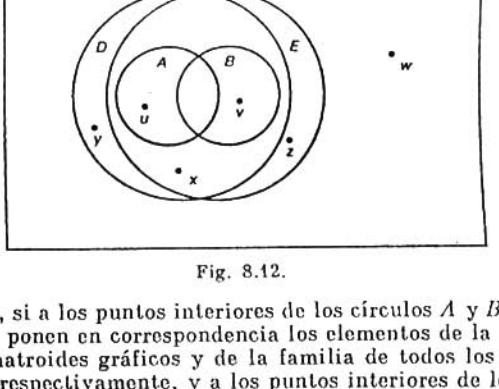


Fig. 8.12.

en fig. 8.12, si a los puntos interiores de los círculos A y B de menor radio se les ponen en correspondencia los elementos de la familia de todos los matroides gráficos y de la familia de todos los matroides cográficos, respectivamente, y a los puntos interiores de los círculos D y E de mayor radio, los elementos del conjunto de todos los matroides binarios y del conjunto de todos los matroides ternarios, respectivamente? Sean $C = D \cap E$ y $G = A \cap B$. ¿Es cierto que C es una familia de todos los matroides unimodulares y G, una familia de los matroides cíclicos de todos los grafos planarios? Indíquese por lo menos un matroide para cada punto x, y, z, u, v y w del diagrama.

8.235. Demuéstrese que la suma directa de matroides M_1 y M_2 es gráfica (cográfica, respectivamente) cuando y sólo cuando M_1 y M_2 son matroides gráficos (cográficos, respectivamente).

8.236. Supongamos que M es un matroide transversal de rango k sobre el conjunto S con la representación $\mathcal{T} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$,

mientras que $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ es un subconjunto arbitrario del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de potencia k tal que una subfamilia $\mathcal{F}' = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$ de la familia $\mathcal{F}$ posee una transversal. Demuéstrese que $\mathcal{F}'$ es también la representación del matroide M.

8.237. Sea M un matroide transversal sobre el conjunto S con la representación $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Demuéstrese que $S \setminus A_i$ es una superficie del matroide M para todo i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

8.238. Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ una representación del matroide transversal M de rango k sobre el conjunto S. Demuéstrese que existen diferentes cociclos $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_k$ tales que $\mathcal{D}_i \subseteq A_i$, donde $i = 1, 2, \ldots, k$, y $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_k\}$ es también una representación del matroide M.

Diremos que la representación $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ de un matroide transversal M de rango k sobre el conjunto S es máxima, si para cualquier representación $\{A'_1, A'_2, \ldots, A'_k\}$ del matroide M, tal que $A_i \subseteq A'_i$ para cada i, se verifican las igualdades $A_i = A'_i$ para todos los i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

8.239. Supongamos que M es un matroide transversal de rango k con la representación máxima $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$, y $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, una familia de conjuntos tal que $A_i \subseteq M_i$ para cada i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Demuéstrese que $\mathcal{F}$ es la representación del matroide M cuando y sólo cuando

$$r\left(\bigcap_{i \in \mathcal{J}} (S \setminus A_i)\right) \leqslant k - |\mathcal{J}| \text{ para todos los } \mathcal{J} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}.$$

8.240. Sea M un matroide de rango k sobre el conjunto S. Demuéstrese que M es un matroide transversal cuando y sólo cuando existe tal familia de hiperplanos $\{H_1, \ldots, H_k\}$ que

a) $r\left(\bigcap_{i \in \mathcal{J}} H_i\right) \leqslant k - |\mathcal{J}|$ para cada $\mathcal{J} \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$;

b) para cada ciclo C existe tal subconjunto $\mathcal{J} \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ que satisface la condición $|\mathcal{J}| = |C - 1|$, que

$$C \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{J}} H_i.$$

8.241. Sea M un matroide transversal de rango k con la representación máxima $\{M_1, \ldots, M_k\}$. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si $\{A_1, \ldots, A_k\}$ es tal representación del matroide M que $A_i \subseteq M_i$ y $r(S \setminus A_i) = m_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para cualquier i, $i = 1, 2, \ldots, k$, $|A_i|$ *es la potencia máxima entre* todos los subconjuntos del conjunto M_i cuyo rango de los complementos es igual a m_i;

b) si C es un cociclo de potencia máxima perteneciente al conjunto M_1, entonces $\{C, M_2, \ldots, M_k\}$ no es obligatoriamente una representación del matroide M;

c) si C_1 es un cociclo de potencia máxima de M_1, entonces $\{C_1, M_2, \ldots, M_k\}$ será la representación del matroide M cuando y

sólo cuando la familia $\{M_2 \setminus C_1, \ldots, M_k \setminus C_1\}$ cuenta con una transversal.

8.242. Demuéstrese que el matroide M es transversal cuando y sólo cuando puede ser representado como una unión de matroides de rango 1.

Supongamos que G es un grafo orientado con un conjunto de vértices V y un conjunto de arcos E, y que A, B son subconjuntos arbitrarios de los vértices del grafo G. Diremos que A *está acoplado con* B en el grafo G, si para cierta biyección φ: $A \to B$ existe una familia de $\{P_x \mid x \in A\}$ caminos, que no se intersecan por los vértices, tales que el camino P_x tiene por origen el vértice x y termina en el vértice $\varphi(x)$ para todo $x \in A$.

8.243. Supongamos que G es un grafo orientado con un conjunto de vértices V, $B \subseteq V$, y $\mathcal{J}(G; B)$ es una familia de todos los subconjuntos A del conjunto V que están acoplados con B en el grafo G. Demuéstrese que $\mathcal{J}(G; B)$ es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide $M(G; B)$ sobre el conjunto V. Compruébese que el matroide M sobre el conjunto S es dual con relación a cierto matroide transversal cuando y sólo cuando existe un grafo orientado G con un conjunto de vértices S y un subconjunto $B \subseteq S$ tal que $M = M(G; B)$.

El matroide $M(G, B)$ del problema 8.243, donde G es un grafo orientado sobre el conjunto de vértices V y $B \subseteq V$, se denomina *hammoide rígido*, y el matroide $M(G; B) \mid X$, donde $X \subseteq V$, simplemente *hammoide*. Sea G un grafo bipartido con los conjuntos de vértices V_1 y V_2 en cada capa. Orientemos todas las aristas del grafo G en dirección de los vértices de V_1 a los vértices de V_2. En este caso el hammoide $M(G; V_1) \mid V_2$ será un matroide transversal sobre el conjunto V_2 que coincide con el matroide de combinaciones de pares del grafo bipartido G sobre el conjunto V_2 (véase el problema 8.79).

8.244. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Un matroide es hammoide cuando y sólo cuando su contracción es un matroide transversal;

b) la clase de hammoides está cerrada respecto de la toma de los menores y del paso a los matroides duales;

c) la unión de hammoides es un hammoide.

Un matroide M sobre el conjunto S se llama *ordenado por bases*, si para cualesquiera dos bases B_1 y B_2 de él existe una aplicación biunívoca φ: $B_1 \to B_2$ tal que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{\varphi(x)\}$ y $(B_2 \setminus \{\varphi(x)\}) \cup \{x\}$ son las bases del matroide M para todos los $x \in B_1$.

8.245. Demuéstrese que todo matroide transversal es ordenado por bases. ¿Será cierta la afirmación inversa?

8.246. Sea M un matroide ordenado por bases sobre el conjunto S. Demuéstrese que serán ordenados por bases también:

a) el matroide $M \mid T$ para todo $T \subseteq S$;

b) el matroide M^*, dual con relación a M;

c) cada menor del matroide M.

8.247. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) el truncamiento de un matroide transversal no ha de ser obligatoriamente transversal;

b) un truncamiento de un matroide ordenado por bases es ordenado por bases;

c) todo hammoide es un matroide ordenado por bases.

8.248. Demuéstrese que todo matroide transversal y cada hammoide son representables sobre el campo de números reales.

8.249. Demuéstrese que las imágenes homomorfas de los matroides transversales son transversales.

8.250. En el diagrama (véase la fig. 8.13) están representadas las relaciones entre las clases de matroides, donde A es una familia

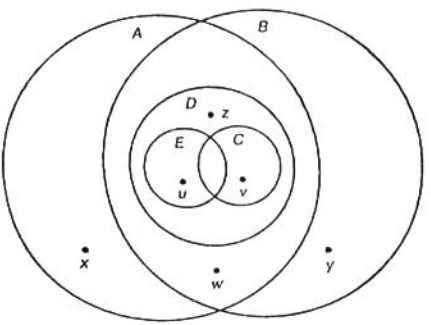


Fig. 8.13.

de todos los matroides ordenados por bases; B son todos los matroides representables sobre el campo de números reales; C es una familia de todos los matroides transversales; $\mathcal{D}$ es una familia de todos los hammoides; E es una familia de todos los hammoides rígidos; x es un matroide de «no Pappo»; y es un matroide cíclico del grafo completo K_4; u es el matroide del problema 8.55; v es un matroide cíclico del grafo bipartido completo $K_{3,2}$. Cerciórese de que el diagrama está correctamente llenado. Hállense en el diagrama los representantes para los puntos w y z.

§ 4. Problemas mixtos en los matroides

El *oráculo «independiente»* es un dispositivo a cuya entrada se suministra un subconjunto arbitrario X del conjunto S, mientras que en la salida se desea obtener una respuesta a la pregunta: «¿será o no X un conjunto independiente del matroide M sobre el conjunto S?». De un modo análogo se define el oráculo «base» (oráculos «ciclo» o «conjunto cerrado»), el cual nos da la respuesta a la cuestión:

«¿Será o no el subconjunto X del conjunto S una base (ciclo o conjunto cerrado, respectivamente) del matroide M?». Dicho de otro modo, los oráculos «independiente», «base», «ciclo» y «conjunto cerrado» pueden interpretarse como aplicaciones del conjunto $\mathcal{P}(S)$ de todos los subconjuntos del conjunto S en un conjunto de dos elementos {sí; no}. En los matroides se definen también otros oráculos, por ejemplo, «rango», «ceñidura» y «clausura», los dos primeros de los cuales se interpretan como aplicaciones de $\mathcal{P}(S)$ en el conjunto de números naturales y el tercero, como aplicación de $\mathcal{P}(S)$ en $\mathcal{P}(S)$.

Los oráculos mencionados están reunidos en la tabla siguiente:

Denominación del oráculo	Entrada	Salida
«independiente»	$X \subseteq S$	sí, siempre que X sea un conjunto independiente del matroide M; no, en el caso contrario
«base»	$X \subseteq S$	sí, siempre que X sea una base del matroide M; no, en el caso contrario
«ciclo»	$X \subseteq S$	sí, siempre que X sea un ciclo del matroide M; no, en el caso contrario
«conjunto cerrado»	$X \subseteq S$	sí, siempre que X sea una superficie del matroide M; no, en el caso contrario
«rango»	$X \subseteq S$	$r(X)$ es un rango del conjunto X en M
«ceñidura»	$X \subseteq S$	potencia mínima de los ciclos del matroide M contenidos en X; ∞, si X es un conjunto independiente del matroide M
«clausura»	$X \subseteq S$	$\overline{X}$ es una clausura del conjunto X en el matroide M

Sea O un oráculo y sea A un algoritmo que puede dirigirse hacia el oráculo O como hacia un subprograma. Si el número de direcciones del algoritmo A hacia el oráculo O está limitado a cierto polinomio de la variable $|S|$, el algoritmo A se denomina *polinomial*. Diremos que un oráculo O_1 es *polinomialmente reducible* al oráculo O_2, si existe un algoritmo polinomial que, empleando el oráculo O_2, tiene en la salida el oráculo O_1. Los oráculos O_1 y O_2 son *polinomialmente equivalentes*, si el oráculo O_1 es polinomialmente reducible al oráculo O_2, y viceversa.

8.251. Demuéstrese que los oráculos «rango», «independiente» «clausura» son polinomialmente equivalentes.

8.252. Cerciórese de que los oráculos «base», «ciclo» y «conjunto cerrado» son polinomialmente reducibles a los oráculos «rango», «independiente», «clausura» y «ceñidura».

8.253. ¿Serán polinomialmente reducibles al oráculo «ceñidura» los oráculos «rango», «independiente» y «clausura»?

8.254. Sea dada una de las bases del matroide M. Demuéstrese que el oráculo «base» es polinomialmente equivalente al oráculo «independiente».

8.255. Demuéstrese que las propiedades que siguen más abajo del matroide M no pueden comprobarse en el transcurso del número polinomial de direcciones hacia el oráculo «independiente»:

a) ¿Será homogéneo el matroide M?

b) ¿Será autodual el matroide M?

c) ¿Será transversal el matroide M?

d) ¿Será representable el matroide M?

e) ¿Será orientable el matroide M?

f) ¿Será binario el matroide M?

8.256. Supongamos que M es un matroide sobre el conjunto S, y (X, Y, Z), tal partición del conjunto S que $|Y| = 1$. Demuéstrese que para cualquier partición de esta índole del conjunto S existe o bien un ciclo C del matroide M tal que $y \in C$, donde $\{y\} = Y$, y $z \notin C$ para todo $z \in Z$, o bien un cociclo C^* del matroide M tal que $y \in C^*$ y $x \notin C^*$ para todo $x \in X$.

Una terna $(S, \mathscr{C}, \mathscr{D})$ compuesta por el conjunto finito S y dos familias $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ de subconjuntos no vacíos del conjunto S recibe el nombre de grafoide, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) si $C \in \mathscr{C}$ y $D \in \mathscr{D}$, entonces $|C \cap D| = 1$;

b) para cualquier partición (X, Y, Z) del conjunto S que satisface la condición $|Y| = 1$, o bien $C \in \mathscr{C}$ es tal que $y \in C$ y $z \notin C$ para todo $z \in Z$, o bien $D \in \mathscr{D}$ es tal que $y \in D$ y $x \notin D$ para todo $x \in X$;

c) ningún subconjunto propio del término C de $\mathscr{C}$ es término de $\mathscr{C}$; ningún subconjunto propio del término D de $\mathscr{D}$ es término de $\mathscr{D}$.

8.257. Supongamos que M es un matroide sobre el conjunto S; $\mathscr{C}$ es una familia de todos los ciclos de M y $\mathscr{C}^*$, una familia de todos los cociclos suyos. Demuéstrese que $(S, \mathscr{C}, \mathscr{C}^*)$ es un grafoide.

8.258. Sea $(S, \mathscr{C}, \mathscr{D})$ un grafoide. Demuéstrese que si B es un subconjunto máximo del conjunto S que no contiene elementos de $\mathscr{C}$, entonces el conjunto $S \setminus B$ será un subconjunto máximo del conjunto S que no contiene elementos de $\mathscr{D}$.

8.259. Sea $(S, \mathscr{C}, \mathscr{D})$ un grafoide. Demuéstrese que en este caso $\mathscr{C}$ es una familia de ciclos de cierto matroide M sobre el conjunto S, y $\mathscr{D}$ es la familia de sus cociclos.

Supongamos que M es un matroide sobre el conjunto S con la función de rango r. El *polinomio característico del matroide* M se define por la siguiente correlación:

$$P(M; \lambda) = \sum_{A \subset S} (-1)^A \lambda^{r(S)-r(A)}.$$

Sea G un grafo sin bucles y aristas múltiples. Se denomina *k-coloración regular del grafo* G tal pintado de los vértices del grafo de k colores que ningún par de vértices adyacentes queden pintados de

un mismo color. El *polinomio cromático del grafo* $P(G; \lambda)$ se determina como una función definida sobre el conjunto de números positivos enteros, la cual para cada λ entero y positivo es igual al número de diferentes métodos de coloración regular del grafo en λ colores. Si $M(G)$ es un matroide cíclico del grafo, entonces el polinomio cromático del grafo es

$$P(G; \lambda) = \lambda^{k(G)} P(M(G); \lambda),$$

donde $k(G)$ es el número de componentes conexos del grafo G; $P(M(G); \lambda)$ es un polinomio característico del matroide cíclico $M(G)$. El *número cromático* $\chi(M)$ del matroide M se define mediante la relación

$$\chi(M) = \inf_{n \in Z} \{n: P(M; n) > 0\},$$

donde Z es el conjunto de números enteros positivos.

8.260. Demuéstrese que si $e \in S$ no es ni bucle ni cobucle (istmo) del matroide M sobre el conjunto S, entonces

$$P(M; \lambda) = P(M'_e; \lambda) - P(M''_e; \lambda),$$

donde $M'_e = M \mid (S \setminus e)$, $M''_e = M \cdot (S \setminus e)$.

8.261. Demuéstrese que si el matroide M contiene un bucle, entonces $P(M; \lambda) = 0$.

8.262. Demuéstrese que si e es un bucle (istmo) del matroide $M(S)$, entonces $P(M; \lambda) = (\lambda - 1) P(M'_e; \lambda)$, aquí $M'_e = M \mid (S \setminus e)$.

8.263. Hállense los polinomios característicos de los siguientes *matroides:*

a) del matroide de Fano Φ;

b) de la geometría proyectiva $PG(r, q)$ de dimensión r sobre el campo $GF(q)$;

c) del matroide cíclico $M(K_n)$ del grafo completo K_n;

d) del matroide homogéneo $U_{2,4}$.

8.264. Hállese el número cromático del matroide de Fano Φ.

8.265. Sea M un matroide no gráfico sobre el conjunto S y sea $N = M \mid A$, donde $A \subseteq S$. Demuéstrese que $\chi(N) \geqslant \chi(M)$.

8.266. Supongamos que M es un matroide no gráfico y α, un número entero tal que $\alpha > \chi(M)$. Demuéstrese que en el caso general no es obligatorio que $P(M; \alpha) > 0$.

8.267. Sea M un matroide binario. Demuéstrese que $\chi(M) \leqslant 2$ cuando y sólo cuando todos los ciclos de M tienen potencia par.

8.268. Demuéstrese que si un matroide M es orientable, entonces $P(M; n) \geqslant 0$ *para todo* $n \geqslant 1$.

8.269. Demuéstrese que si un matroide M es binario, entonces $P(M; 2^k) \geqslant 0$ *para todo* $k \geqslant 1$.

Se denomina *invariante* tal función f sobre un conjunto de matroides, con valores tomados por ella en un anillo conmutativo, que si un matroide M es isomorfo a otro matroide N, entonces $f(M) = f(N)$. Se llamará *invariante de Tutte-Grothendiek* el invariante

que, para cualquier e que no es ni bucle ni cobucle, satisface las *condiciones:*

$$f(M) = f(M_e') + f(M_e'');$$
$$f(M_1 + M_2) = f(M_1) \cdot f(M_2).$$

Sea M un matroide sobre el conjunto S y sean r y r^* funciones de rango de M y de M^* (dual con relación a M), respectivamente. El *polinomio de Tutte* $T(M; x, y)$ del matroide M se define mediante la correlación

$$T(M; x, y) = \sum_{A \subseteq S} (x-1)^{r(S)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)}.$$

8.270. Compruébese que el número $b(M)$ ($i(M)$, $sp(M)$, respectivamente) de bases (conjuntos independientes y conjuntos engendradores, *respectivamente) del matroide M es un invariante de Tutte*-Grothendieck.

8.271. Demuéstrese que $T(M; x, y) = T(M^*; y, x)$.

8.272. Demuéstrese que para cualquier matroide M sobre el conjunto S el polinomio característico tiene por expresión

$$P(M; \lambda) = (-1)^{r(S)} T(M; 1-\lambda, 0).$$

8.273. Demuéstrese que si un matroide M sobre el conjunto S tiene componentes conexos $(S_i: i \in I)$, entonces

$$T(M; x, y) = \prod_{i \in I} T(M \mid S_i; x, y).$$

8.274. Sea M un matroide sobre el conjunto S. Compruébese la validez de las siguientes relaciones:

a) $T(M; 2, 2) = 2^{|S|}$;

b) $T(M; 1, 1) = b(M)$, donde $b(M)$ es el número de bases del matroide M;

c) $T(M; 2, 1) = i(M)$, donde $i(M)$ es el número de conjuntos independientes del matroide M;

d) $T(M; 1, 2) = sp(M)$, donde $sp(M)$ es el número de conjuntos engendradores del matroide M;

e) $T(M; 0, 0) = 0$;

f) $T(M; 1, 0) = (-1)^{r(S)} \mu(S)$, donde μ es la función de Moebius *de la estructura geométrica del matroide M y* $\mu(S) = \mu(\varnothing, S)$.

8.275. Demuéstrese que sólo los invariantes de Tutte-Grothendieck son valores del polinomio de Tutte.

8.276. Demuéstrese que los coeficientes del polinomio de Tutte de cualquier matroide son no negativos.

8.277. Muéstrese que en el caso general la suma de dos polinomios de Tutte no es un polinomio de Tutte.

Supongamos que G (V, S) es un grafo con el conjunto de vértices V y el conjunto de aristas S; w es la orientación de las aristas del

grafo y H, un grupo abeliano. Diremos que la inyección φ: $V \to$ $\to H \setminus \{0\}$ es un *H-flujo*, si para cada vértice $v \in V$ se verifica la relación

$$\sum_{\partial^+(v)} \varphi(e) - \sum_{\partial^-(v)} \varphi(e) = 0,$$

donde $\partial^+(v)$, $\partial^-(v)$ son conjuntos de aristas dirigidas a v, y de v para la orientación w. Suele decirse que el grafo G tiene *k-flujo*, si G tiene H-flujo para todos los grupos H (o sólo para un grupo) de orden k.

P_{10}

Fig. 8.14.

8.278. Sean w y w' dos orientaciones de aristas del grafo G. Muéstrese que existe una correspondencia biunívoca entre los flujos de las orientaciones w y w'. (De aquí proviene que el número $N(H, G)$ de H-flujos en el grafo G no depende de la orientación del grafo y es una función solamente de H y G.)

8.279. Demuéstrese que si el arista e no es bucle ni puente del grafo G, entonces

$$N(H; G) = -N(H, G'_e) + N(N, G''_e),$$

donde G'_e y G''_e son los grafos obtenidos de G por supresión y contracción de la arista e, respectivamente.

8.280. Supongamos que $M(G)$ es un matroide cíclico del grafo G y $O(H)$, el orden del grupo H. Demuéstrese que

$$N(H, G) = (-1)^{|S|-r(S)} T(M(G); 0, O(H) - 1) = \\ = P(M^*(G); O(H)).$$

8.281. Demuéstrese que cualquier grafo sin puentes tiene el 8-flujo.

8.282. Demuéstrese que el *grafo de Peterson* (P_{10}; fig. 8.14) no tiene 4-flujo.

8.283. Demuéstrese que un grafo sin puentes tiene 5-flujo.

8.284. (?) Demuéstrese que el grafo G sin puentes tiene 4-flujo cuando y sólo cuando no tiene subgrafos contraídos hacia el grafo de Peterson.

RESPUESTAS, SOLUCIONES, INDICACIONES

CAPÍTULO I

ESQUEMAS COMBINATORIOS

§ 1. Relaciones combinatorias

1.1. El número de k-muestras del n-conjunto que contienen el primer elemento es, evidentemente, igual a C_{n-1}^{k-1}, y el de las que no lo contienen es igual a C_{n-1}^{k}, de donde proviene a).

Para demostrar la identidad b), asignemos a su segundo miembro el siguiente sentido combinatorio: C_{n-1}^{k} es el número de k-muestras del n-conjunto que no contienen el primer elemento; C_{n-2}^{k-1} es el número de k-muestras que contienen el primer elemento y no contienen el segundo, etc.; C_{n-r-1}^{k-r} es el número de k-muestras que contienen los primeros r elementos y no contienen el $(r+1)$-ésimo elemento, etc.

1.2. El número de m-muestras del $(n+1)$-conjunto es igual a C_{n+m}^{m}. Dividamos estas muestras en clases, refiriendo a la $(m-k)$-ésima clase aquellas, en las que el elemento del primer tipo figura $m-k$ veces. Los demás k lugares pueden estar ocupados por los elementos de otros tipos. Por eso el número de elementos en la $(m-k)$-ésima clase es igual al número de k-muestras del (n)-conjunto, es decir, a C_{n+k-1}^{k}. Al sumar respecto de todas las clases de particiones, obtendremos el conjunto requerido.

1.3. Fijemos un m-subconjunto del n-conjunto. El número de r-muestras del n-conjunto, a condición de que exactamente $r-k$ elementos pertenecen al m-subconjunto y los demás k elementos, al complemento de este último, es igual a $C_{n-m}^{k} C_{m}^{r-k}$ (se ha empleado la regla del producto). Al sumar respecto de k, obtendremos el número de todas las r-muestras del n-conjunto, o sea C_{n}^{r}. Observemos que para $k > \min\{r,\ n-m\}$ los términos de la suma son nulos.

1.4. a) El número de todos los subconjuntos del n-conjunto es igual, obviamente, a 2^n. Por otra parte, cada subconjunto del n-conjunto de potencia k es una k-muestra. Al sumar respecto de todos los k, obtendremos la identidad requerida.

b) Por cuanto $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, entonces, diferenciando respecto de x, tenemos $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^{k-1}$. Suponiendo $x=1$, tenemos b).

c) Por cuanto $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot k C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k + \sum_{k=0}^{n} k C_n^k$, entonces, por analogía con b), tenemos c).

1.5. El número de n-muestras ordenadas del (m)-conjunto es $m^n = A^n(m)$. Partiremos las n-muestras en clases, considerando pertenecientes a la k-ésima clase aquellas, en las cuales los elementos del primer tipo se encuentran en k lugares. El número de n-muestras en la k-ésima clase es igual a $C_n^k (m-1)^{n-k}$.

Al tomar la suma de todas las n-muestras respecto de todas las clases de particiones, obtendremos la fórmula requerida.

1.6. El número de todas las n-muestras ordenadas del (k)-conjunto es igual a k^n. Partiremos estas muestras en clases, atribuyendo a una clase aquellas, en las que figuran n_1 elementos del primer tipo, n_2 elementos del segundo tipo, etc., n_k elementos del k-ésimo tipo. El número de tales n-muestras es igual a $p(n_1, \ldots, n_k) = n!/(n_1! \ldots n_k!)$. Por consiguiente, el número total de n-muestras del (k)-conjunto es igual a $\sum p(n_1, \ldots, n_k)$, donde la sumación se realiza respecto de todas las particiones ordenadas de n en k sumandos, lo que se trataba de demostrar.

1.7. a) Convengamos en considerar el n-conjunto como (q)-conjunto, en el cual hay n_1 elementos del primer tipo, n_2 elementos del segundo tipo, etc., n_q elementos de q-ésimo tipo $\left(n = \sum_{i=1}^{q} n_i\right)$; distinguiremos entre sí los elementos de un mismo tipo.

Partiremos todas las m-muestras del n-conjunto en clases, considerando pertenecientes a una clase aquellas m-muestras, en las cuales figuran exactamente m_1 elementos del primer tipo, etc. El número de m-muestras en esta clase es igual a $C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_q}^{m_q}$. Al sumar respecto de todas las clases, obtendremos el resultado requerido.

b) Por analogía con a) resolvemos este problema sustituyendo el n-conjunto por el (n)-conjunto.

1.8. Por cuanto $C_{n+1}^{r+1} = \frac{n+1}{r+1} C_n^r$ y $C_n^r = \frac{n}{r} C_{n-1}^{r-1}$, entonces el primer miembro de la igualdad puede escribirse así:

$$\frac{\frac{n}{r}\left(\frac{n+1}{r+1}-1\right)(C_{n-1}^{r-1})^2}{\left(\frac{n^2}{r^2}-\frac{(n+1)\,n}{(r+1)\,r}\right)(C_{n-1}^{r-1})^2} = \frac{\frac{n(n-r)}{r(r+1)}}{\frac{n(n-r)}{r^2(r+1)}} = r.$$

1.9. $$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^{x}} = \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \sum_{x=1}^{n} \frac{x(2n-x-1)!}{(n-x)!} = \frac{2n}{(2n-1)\,C_{2n-2}^{n-1}} \times$$

$$\times \sum_{x=1}^{n} C_{2n-1-x}^{n-1} - \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \sum_{x=1}^{n} C_{2n}^{n-x} = \frac{2nC_{2n-1}^{n-1}}{(2n-1)\,C_{2n-2}^{n-2}} - \frac{C_{2n}^{n-1}}{C_{2n-1}^{n-1}} = \frac{2}{n+1}.$$

1.10. $$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^{x}} = \frac{(n-1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^{n} \frac{x(n+q-x)!}{(n-x)!} = \frac{(n+q+1)(n-1)!\,q!}{(n+q)!} \times$$

$$\times \sum_{x=1}^{n} C_{n+q-x}^{n-x} - \frac{(n-1)!\,(q+1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^{n} C_{n+q-x+1}^{n-x} = \frac{(n+p+1)(n-1)!\,q!}{(n+q)!} \times$$

$$\times C_{n+q}^{n-1} - \frac{(n-1)!\,(q+1)!}{(n+q)!} C_{n+q+1}^{n-1} = \frac{n+q+1}{q+1} - \frac{n+q+1}{q+2} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}.$$

1.11. $$\sum_{x=0}^{n} \frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}} = \frac{n!\,C_n^r}{(2n)!} \sum_{x=0}^{n} \frac{(x+r)!\,(2n-x-r)!}{x!\,(n-x)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{x=0}^{n} C_{x+r}^{r} \times$$

$$\times C_{2n-x-r}^{n-r} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, C_{2n+1}^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

1.12. De acuerdo con la fórmula del binomio de Newton tenemos

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^{-i},\quad \left(1-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i 2^{-i},$$

entonces

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} 2^{-2i}=\frac{(3/2)^n+(1/2)^n}{2}.$$

De un modo análogo obtenemos b).

1.13. El número de m-muestras del (n)-conjunto es igual a C_{n+m-1}^m. Partiremos los tipos de elementos del (n)-conjunto en dos clases respecto de p y $n-p$ tipos, respectivamente. Luego partiremos todas las m-muestras del (n)-conjunto en clases, atribuyendo a la clase χ aquellas que contienen x elementos del primer conjunto de tipos y $m-x$ elementos del segundo tipo de elementos. Está claro que en la clase se contienen $C_{p+x-1}^x C_{n+m-p-x-1}^{m-x}$ elementos. Al sumar respecto de todas las clases, obtendremos la identidad requerida.

1.14. Demostremos por inducción: para $n=0$ $\sum_{i_0=1}^{m} 1=m=C_m^1$. Sea

$$\sum_{i_{n-1}}^{i_n}\ \cdots\ \sum_{i_0=1}^{i_1} 1=C_{n+i_n-1}^n.$$ Entonces

$$C_{n+m}^{n+1}=\sum_{i_n=1}^{m} C_{n+i_n-1}^n=\sum_{i_n=1}^{m} C_{n+i_n-1}^{i_n-1}=\sum_{i_n=1}^{m}\ \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n}\ \cdots\ \sum_{i_0=1}^{i_1} 1,$$

donde la primera igualdad fue demostrada en el problema 1.2, lo que se trataba de demostrar.

1.15. *Partiremos todas las permutaciones de m bolas blancas y n negras* en clases. Consideraremos pertenecientes a la clase $(k_1, \ldots, k_m)$ las permutaciones en las cuales hay k_1 bolas blancas aisladas, k_2 pares de bolas, k_3 ternas, etc., k_m bolas que están juntas.

Es evidente que $k_1+2k_2+\ldots+mk_m=m$. Calculemos el número de permutaciones de la clase $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Si n bolas negras están colocadas por orden, tendremos, pues, $n+1$ lugares para colocar bolas blancas. Por eso, el número de permutaciones es igual a p $(k_1, \ldots, k_m, n-k_1-\ldots-k_m+1)$. El número total de permutaciones es igual a C_{n+m}^m, lo que se trataba de demostrar.

1.16. *Para $n>0$ véase el problema 1.1. Cuando $n<0$, tenemos*

$$C_{n-1}^r+C_{n-1}^{r-1}=(-1)^r C_{r-n}^r+(-1)^{r-1} C_{r-n-1}^{r-1}=$$
$$=(-1)^r (C_{r-n}^r-C_{r-n-1}^{r-1})=(-1)^r C_{r-n-1}^r=C_n^r,$$

lo que se trataba de demostrar.

§ 2. Muestras y ordenaciones

1.17. *El número total de permutaciones es igual a $n!$. Sin embargo*, la relación de vecindad queda intacta para las permutaciones cíclicas y para las reflexiones simétricas. Por eso hay en total $n!\,(2n)=(n-1)!/2$ modos.

1.18. Los sitios para los hombres y las mujeres pueden elegirse por dos métodos. A continuación, en los lugares elegidos los hombres pueden colocarse mediante $n!$ métodos. En los lugares restantes las mujeres pueden colocarse mediante $n!$ métodos. En total hay $2\,(n!)^2$ métodos.

1.19. a) $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$; efectivamente, hay en total C_{52}^{10} métodos de sacar 10 cartas; en C_{48}^{10} casos no habrá ningunas en la muestra; b) $C_4^1 C_{48}^9$; c) $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - 4C_{48}^9$; d) $C_4^2 C_{48}^8$.

1.20. Elegimos 6 ajedrecista mediante C_n^6 métodos. Enumerémoslos con cifras del 1 al 6 y formemos 3 en pares: el primero—segundo; el tercero—cuarto; el quinto—sexto. Esto puede hacerse empleando 6! métodos. Por cuanto el orden de los ajedrecistas dentro de cada par y el orden de los pares no son esenciales, entonces 6 ajedrecistas pueden ser divididos en pares mediante 6!/($2^3$3!) métodos. En total existen $C_n^6 6!/(2^3 3!) = n!/(48\ (n-6)!)$ métodos para componer tres pares de n ajedrecistas.

1.22. Cada divisor del número q tiene por expresión $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$, donde $\beta_i = 0, 1, \ldots, \alpha_i$. Según la regla del producto, el número de divisores es igual a $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1)$. La suma de los divisores será

$$(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \ldots (1 + p_n + \ldots + p_n^{\alpha_n}) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}.$$

En efecto, si abrimos paréntesis, entonces al reducir los términos semejantes, obtendremos una suma en la cual cada divisor q figura exactamente una vez. De aquí, el número q de divisores puede obtenerse de otro modo, a saber, en el primer miembro de la última expresión basta poner todos los p_i iguales a la unidad.

1.23. Reunamos los m elementos dados en uno. Teniendo presente que dichos m elementos pueden permutarse, obtendremos $m!$ $(n - m + 1)!$ permutaciones en las cuales estos m elementos están al lado. Por consiguiente, el número de permutaciones buscadas es $n! - m!\ (n - m + 1)!$

1.24. La cantidad de números de n cifras que no contienen dos cifras iguales seguidas es igual a 9^n cuando $n > 1$, y a 10, cuando $n = 1$. Este resultado se deduce de la regla del producto, si tomamos en consideración que, una vez elegidas las primeras k cifras, la cifra $(k+1)$-ésima puede ser elegida mediante nueve métodos. Por eso la respuesta será

$$10 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^n = (9^{n+1} - 1)/8.$$

1.25. En el método buscado de elección de seis cartas puede ocurrir que haya

a) tres cartas de un mismo palo y tres que tienen cada una otro palo diferente; habrá $C_4^1 C_{13}^3 (C_{13}^1)^3$ de tales muestras.

b) dos pares de cartas de un mismo palo y dos cartas que tienen cada una otro palo diferente. Habrá $C_4^2 (C_{13}^2)^2 (C_{13}^1)^2$ de tales muestras. La suma de estos números da la respuesta buscada.

1.26. Para caracterizar el número que satisface la hipótesis del problema, es suficiente decir cuántas veces se encuentran en este número las cifras: uno, dos, . . ., nueve. Por eso hay en total

$$C_{(9)}^n = C_{n+9-1}^n = C_{n+8}^8$$

de tales números.

1.27. Cada bola puede ocupar uno de m lugares. Entonces, según la regla del producto, obtendremos m^n métodos de repartición.

1.28. A cada modo de colocación le corresponde una n-muestra del (m)-conjunto. Hay en total $C_{(m)}^n = C_{m+n-1}^n$ métodos.

1.29. a) En cada urna se debe poner una bola. Las demás bolas pueden colocarse mediante $C_{(m)}^{n-m} = C_{n-1}^{n-m} = C_{n-1}^{m-1}$ métodos.

b) $C_{n-k+m-2}^{n-k}$.

c) Coloquemos en la primera urna a_1 bolas; en la segunda, a_2 bolas, etc., en la s-ésima urna, a_s bolas. Entonces, las demás $n-\sum_{i=1}^{s} a_i$ bolas pueden distribuirse entre las $m-s$ urnas restantes mediante

$$C_{(m-s)}^{n-\sum_{i=1}^{s} a_i} = C^{n-\sum_{i=1}^{s} a_i}_{n-\sum_{i=1}^{s} a_i+m-s-1} \text{ métodos.}$$

d) $C_{(m)}^{n-\sum_{i=1}^{m} a_i} = C^{n-\sum_{i=1}^{m} a_i}_{m+n-\sum_{i=1}^{m} a_i-1}$.

1.30. Las bolas blancas podemos distribuirlas entre las urnas mediante $C_{(m)}^{n_1}$ métodos; las bolas negras, mediante $C_{(m)}^{n_2}$ métodos y las azules, mediante $C_{(m)}^{n_3}$ métodos. Pero, por cuanto las distribuciones de las bolas de distinto color no dependen una de otra, entonces, en virtud de la regla del producto, el número total de métodos de distribución será

$$C_{(m)}^{n_1} C_{(m)}^{n_2} C_{(m)}^{n_3} = C_{m+n_1-1}^{n_1} C_{m+n_2-1}^{n_2} C_{m+n_3-1}^{n_3}.$$

1.31. Designemos el número de métodos de distribución de n bolas iguales entre i urnas iguales con $A(n, i)$. Este problema es equivalente a la distribución de n bolas iguales entre i urnas diferentes de tal modo que se verifique $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_i$, donde n_m es el número de bolas en la m-ésima urna. Fijemos el número de bolas k en la 1ra urna, donde $0 \leqslant k \leqslant [n/i]$. Tomando en consideración que en cada una de las urnas restantes se encuentran no menos de k bolas, concluimos que el número de métodos para llenarlas es igual a $A(n-ik, i-1)$. De este modo obtenemos la siguiente relación recurrente:

$$A(n, i) = \sum_{k=0}^{[n/i]} A(n-ik, i-1).$$

De aquí siguen las respuestas: a) $\left[\frac{n+2}{2}\right]$; b) $\left[\frac{n}{3}\right] + 1 + \sum_{k=0}^{[n/3]} \left[\frac{n-3k}{2}\right]$.

1.32. Coloquemos todas las bolas formando una fila y enumerémoslas. Escribamos por encima de cada bola el número de la urna en la que aquélla se va a colocar. Los números de las urnas forman una permutación del k-conjunto que contiene n_1 números 1, n_2 números 2, n_k números k. Cada permutación de este tipo determina su método de colocación, mientras que el número de tales permutaciones es igual a $p(n_1, \ldots, n_k) = n!/(n_1! \ldots n_k!)$.

1.33. a) Es un caso particular del problema 1.32. La respuesta es

$$\frac{n!}{(p_1!)^{m_1} (p_2!)^{m_2} \ldots (p_k!)^{m_k}}$$

b) $$\frac{n!}{(p_1!)^{m_1} (p_2!)^{m_2} \ldots (p_k!)^{m_k} m_1! \ldots m_k!}$$

1.34. a) Este problema es equivalente a la distribución de k bolas iguales entre n urnas diferentes, a condición de que en la primera urna se encuentre no

menos de 1 bola. Aquí resulta esencial que $k \leqslant 9$. Por eso, la respuesta es como sigue (véase el problema 1.28): $C_{(n)}^{h-1} = C_{n+h-2}^{h-1}$;

b) $C_{(n)}^{h} = C_{n+h-1}^{h}$.

1.35. Por una simple selección llegamos a que el número de cinco cifras puede estar compuesto de los siguientes juegos de cifras

7,2,6,5,5;	7,6,5,2,2;	7,2,2,5,5;
6,2,2,5,5;	7,5,2,2,2;	7,6,2,2,2;
5,6,2,2,2;	7,2,2,2,2;	5,2,2,2,2;
9,2,2,2,2;	5,5,2,2,2;	

Por eso la cantidad total de tales números será

$2p\,(1,1,1,2) + 3p\,(1,1,3) + 2p\,(1,2,2) + 3p\,(1,4) + p\,(2,3) = 265$.

1.36. a) Denotemos una totalidad no vacía de unidades seguidas con la letra E y de ceros, con la letra H. Entonces, de la hipótesis del problema proviene que la sucesión de ceros y unidades se dispone según uno de los dos esquemas: EHEH...EH o HEHE...HE, con la particularidad de que en cada esquema figuran r pares. Mas, existen $C_{m-1}^{m-r} = C_{m-1}^{r-1}$ métodos para distribuir m unidades entre las totalidades no vacías. Para los ceros tenemos, por analogía, $C_{n-1}^{n-r} = C_{n-1}^{r-1}$ métodos. Por eso el número total de sucesiones es igual a $2C_{m-1}^{r-1}C_{n-1}^{r-1}$.

b) $C_{m-1}^{r}C_{n-1}^{r-1} + C_{m-1}^{r-1}C_{n-1}^{r}$.

1.37. a) Notemos qué el número S no satisface a ciencia cierta la hipótesis del problema, si aquél puede ser representado por dos métodos esencialmente diferentes en forma de una suma de tres sumandos distintos, cada uno de los cuales no es superior a 9, puesto que en tal caso se tiene por lo menos 12 números con una suma igual a S. Dicha representación se obtiene fácilmente para todos los números S desde 5 hasta 22. Por ejemplo, $5 = 4 + 1 + 0 = 3 + 2 + 0$. Para $S \leqslant 4$ hagamos uso del resultado del problema 1.34.

b) Resulta que sólo para $S = 3$ existen exactamente 10 números, en cada uno de los cuales la suma de las cifras es igual a S. A todo número, cuya notación decimal se representa como $a_1a_2a_3$, se le pone biunívocamente en correspondencia el número $9 - a_1 9 - a_2 9 - a_3$. Si la suma de cifras del primer número es igual a S, la del segundo será $27 - S$. Por eso el caso en que $23 \leqslant S \leqslant 27$ es simétrico al caso $0 \leqslant S \leqslant 4$, y sólo $S = 24$ satisface la hipótesis del problema. La respuesta es: $S_1 = 3$; $S_2 = 24$.

1.38. a) El que compra un billete elige 6 números de un total de 49. Todas las muestras posibles se consideran equiprobables. Fijemos 6 números. Entonces la probabilidad buscada será igual a la razón entre el número de muestras con k números de los 6 fijados y el número de todas las muestras. Hay en total C_{49}^{6} muestras. Haciendo uso de la regla del producto, llegamos a que k números de 6 contienen $C_6^k C_{43}^{6-k}$ muestras: primero de 6 números ciertos se elijen k, y luego $6 - k$ números se complementan empleando 43 números «infelices». De este modo, la probabilidad de adivinar k números es igual a $C_6^k C_{43}^{6-k}/C_{49}^{6}$.

b) $\sum_{i=k}^{6} (C_6^i C_{43}^{6-i})/C_{49}^{6}$.

1.39. Al igual que en el problema anterior, por probabilidad entenderemos la razón entre el número de muestras favorables y el número total de muestras. En total existen C_{90}^{5} métodos de sacar 5 fichas. Supongamos que el participante de la lotería haya comprado un billete con un número. Para ganar el premio es necesario que una de las 5 fichas coincida con el número en el billete. Los demás se eligen de 89 números restantes. Por eso, existen C_{89}^{4} resultados favorables y la probabilidad de ganar el premio es igual a $C_{89}^{4}/C_{90}^{5} = 1/18$.

Análogamente, jugando con dos números, llegamos a que la probabilidad de ganar el premio es igual a $C_{88}^2/C_{90}^5 = 2/801$. Jugando con tres números, tenemos $C_{87}^2/C_{90}^5 = 1/11748$. Jugando con cuatro números tenemos $C_{86}^1/C_{90}^5 = 1/511038$. Jugando con cinco números, la probabilidad será $1/C_{90}^5 = 1/43949268$.

1.40. Designemos con $g(n)$ el número de sucesiones de longitud n que satisfacen las condiciones del problema. El número de sucesiones de longitud n, que comienzan con una de las cifras 1, 2, . . ., k, es igual a $g(n-1)$, y el número de aquellas que comienzan con cero y satisfacen las condiciones del problema es igual a $(k+1)^{n-1} - g(n-1)$. Por eso resulta válida la siguiente relación recurrente: $g(n) = (k-1)\,g(n-1) + (k+1)^{n-1}$. Teniendo en cuenta que $g(1) = k$, podemos demostrar por inducción la fórmula siguiente:

$$g(n) = ((k+1)^n + (k-1)^n)/2.$$

1.41. *Primer método.* Por cada examen aprobado exitosamente el examinando puede tener 3, 4, 5 puntos. Designemos con $F(k, N)$ el número de métodos por medio de los cuales se pueden acumular N puntos después de aprobar k exámenes. En este caso se verifica la relación

$$F(k, N) = F(k-1, N-3) + F(k-1, N-4) + F(k-1, N-5).$$

De aquí obtenemos

$$F(4, 17) = F(3, 14) + F(3, 13) + F(3, 12) =$$
$$= F(2, 11) + 2F(2, 10) + 3F(2, 9) + 2F(2, 8) + F(2, 7) =$$
$$= 2 + 3F(2, 9) + 2F(2, 8) + F(2, 7),$$

puesto que no es posible acumular 11 puntos tras dos exámenes, mientras que acumular 10 puntos se puede mediante un solo método, sacando 5 puntos en cada examen. Continuando los cálculos, obtendremos
$F(4, 17) = 2 + 3F(1, 6) + 5F(1, 5) + 6F(1, 4) + 3F(1, 3) + F(1, 2)$,
pero $F(1, 6) = F(1, 2) = 0$ (no se pueden obtener 6 puntos en un examen, y una calificación con un dos priva del derecho a ingresar en el instituto. $F(1, 5) = F(1, 4) = F(1, 3) = 1$, por lo cual $F(4, 17) = 16$.

De un modo análogo se realiza el cálculo para $F(4, 18) = 10$, $F(4, 19) = 4$ y $F(4, 20) = 1$. Obtenemos en total $16 + 10 + 4 + 1 = 31$ métodos para rendir exitosamente los exámenes.

Segundo método. Designemos con $P(a, b, c, d, e)$ el número de métodos con cuya ayuda pueden obtenerse a quinternas, b cuaternas, c ternas, etc. 17 puntos pueden adquirirse por dos métodos esencialmente diferentes: pueden obtenerse dos quinternas, una cuaterna y una terna, o bien una quinterna y tres cuaternas. Estas calificaciones pueden distribuirse de cualquier modo entre las asignaturas aprobadas. Por cuanto

$$P(2, 1, 1) + P(1, 3) = 4!/(2!1!1!) + 4!/(3!1!) = 16,$$

entonces 17 puntos pueden ser sacados mediante 16 métodos.

De igual modo se calcula el número de métodos para obtener 18, 19 y 20 puntos.

1.42. Designemos con $F(n_1, n_2, \ldots, n_m; N)$ el número de métodos por medio de los cuales se pueden pagar N kopeks con monedas de valor diferente. De aquí proviene:

$$F(n_1, n_2, \ldots, n_m; N) =$$
$$= F(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}; N - n_m) + F(n_1, \ldots, n_{m-1}; N). \quad (*)$$

Esto permite reducir el problema de elección de m monedas al problema de elección de $(m-1)$ monedas. Al repetir la operación de un modo análogo, reduz-

camos este problema al de elección de $(m-2)$ monedas, etc. Es evidente que para $n_m > N$ la relación (*) se sustituye por $F(n_1, n_2, \ldots, n_m; N) = F(n_1, \ldots, n_{m-1}; N)$.

Apliquemos este procedimiento a la resolución del problema dado:

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) =$$

$$= F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 23) + F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73) =$$

$$= F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23),$$

puesto que $1 + 2 + 3 + 5 + 10 + 15 + 20 < 73$, y, por eso, el segundo sumando es igual a cero. Luego continuamos:

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23) =$$

$$= F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3) + F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23);$$

pero

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3) = F(1, 2, 3; 3) =$$

$$= F(1, 2; 0) + F(1, 2; 3) = 1 + F(1; 3) + F(1; 1) = 2.$$

Calculemos el segundo sumando:

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23) =$$

$$= F(1, 2, 3, 5, 10; 8) + F(1, 2, 3, 5, 10; 23) =$$

$$= F(1, 2, 3, 5, 10; 8), \text{ puesto que } 1 + 2 + 3 + 5 + 10 < 23.$$

Pero $F(1, 2, 3, 5; 8) = F(1, 2, 3; 3) = 2$.

En definitiva obtenemos

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) = 4.$$

Así pues, el pago requerido puede realizarse por cuatro métodos, a saber: 1) 50, 20, 3 kopeks; 2) 50, 20, 2, 1 kopeks; 3) 50, 15, 5, 3 kopeks; 4) 50, 15, 5, 2, 1 kopeks.

1.43. Sea $f(N)$ el número de métodos, por medio de los cuales se pueden pegar sellos de 4, 6, 10 kopeks de valor de tal modo que el valor total de estos sellos sea igual a N. Entonces, para $f(N)$ se verifica la igualdad $f(N) = f(N-4) + f(N-6) + f(N-10)$. En efecto, supongamos que existe cierto modo de pegar sellos con un valor total de N kopeks y que el último sello que se pega vale 4 kopeks. En este caso todas los demás sellos valen $N-4$ kopeks. Viceversa, al agregar a cualquier combinación de sellos de un valor de $N-4$ kopeks un sello de cuatro kopeks, obtenemos una combinación de sellos de N kopeks. En tal caso, a partir de distintas combinaciones que tienen un valor de $N-4$ kopeks se obtienen diferentes combinaciones de N kopeks. Así pues, el número de combinaciones buscadas, donde el último sello que se pega vale 4 kopeks, es igual a $f(N-4)$.

De un modo análogo se demuestra que el número de combinaciones que terminan con un sello de 6 kopeks es igual a $f(n-6)$ y con un sello de 10 kopeks terminan $f(N-10)$ combinaciones. Por cuanto cualquier combinación termina con un sello de los tipos citados, resulta válida la relación que se demuestra. Esta relación permite reducir el problema de pegar sellos que valen en suma N kopeks a un problema de pegar sellos de sumas inferiores. Mas, cuando los valores de N son pequeños, el problema es fácil de resolver inmediatamente. Un simple cálculo enseña que $f(0) = 1$ (la suma de 0 kopeks puede pagarse de un modo único: no pegando los sellos en general); $f(1) = f(2) = f(3) = 0$; $f(5) = 0$; $f(7) = f(9) = 0$ (estas sumas no pueden obtenerse de ningún modo con ayuda de los sellos de 4, 6, 10 kopeks); $f(4) = 1$, $f(6) = 1$, $f(8) = 1$.

Haciendo uso de los valores de $f(N)$ para $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, es fácil hallar $f(10) = f(6) + f(4) + f(0) = 3$. A continuación encontramos

$f(11) = f(7) + f(5) + f(1) = 0$, $f(12) = f(8) + f(6) + f(2) + 2$, etc., $f(18) = 8$.

Así pues, los sellos pueden pegarse empleando ocho métodos: 1) (10, 4, 4); 2) (4, 10, 4); 3) (4, 4, 10); 4) (6, 4, 4, 4); 5) (4, 6, 4, 4); 6) (4, 4, 6, 4); 7) (4, 4, 4, 6); 8) (6, 6, 6).

§ 3. Particiones

1.45. *Indicaciones.* Establézcase la equivalencia de los problemas sobre el número de métodos de colocación de $k - 1$ rayas en $n - 1$ intervalos entre n puntos de abscisas de números enteros.

1.46. Se conoce que cada número puede ser escrito de una sola manera en el sistema binario de cálculo, es decir, en forma de una suma de varias potencias *diferentes del número dos. Sea, ahora,* $n = \nu_1 + \nu_1 + \ldots + \nu_2 + \nu_2 + \ldots$ cualquier partición de n en sumandos impares iguales o desiguales. Supongamos que el sumando ν_i figura en la partición m_i veces de tal modo que $n = \sum_{i=1}^{k} m_i \nu_i$. Al representar el número m_i en la forma $m_i = 2^{\alpha_{i_1}} + 2^{\alpha_{i_2}} + \ldots$, obtenemos

$$n = 2^{\alpha_{11}}\nu_1 + 2^{\alpha_{12}}\nu_1 + \ldots + 2^{\alpha_{21}}\nu_2 + 2^{\alpha_{22}}\nu_2 + \ldots$$

es decir, la partición de n en sumandos pares o impares, los cuales serán, obviamente, distintos. Viceversa, si está dada una partición $n = k_1 + k_2 + \ldots$ en sumandos distintos, entonces representemos cada uno de ellos en la forma $k_i = 2^{\alpha_i}\nu_i$ ($\alpha_i \geqslant 0$, ν_i es impar) y liguemos todos los sumandos con un mismo ν_i, poniendo la suma de dichos sumandos $2^{\alpha_{i_1}}\nu_i + 2^{\alpha_{i_2}}\nu_i + \ldots$ igual a $m_i\nu_i$ (donde $m_i = 2^{\alpha_{i_1}} + 2^{\alpha_{i_2}} \ldots$). Obtendremos $n = m_1\nu_1 + m_2\nu_2 + \ldots$, es decir, la partición de n en sumandos impares, lo que se trataba de demostrar.

1.47. Véase la demostración, por ejemplo, en [14].

1.48. *Analicemos toda clase de representaciones de n en la forma* $\sum_m a + d\delta$, con la particularidad de que $\sum_m a$ es una suma no ordenada de m sumandos *desiguales y d, δ, unos números enteros positivos. La suma* $\sum_m a$ *puede estar ausente.*

Hagamos extender a todas estas representaciones la suma $S = \sum (-1)^m d$; el cálculo de esta suma mediante dos métodos nos da precisamente la solución del problema.

Reuniendo al principio en la suma S los términos, para los cuales $d\delta = p$ tiene un mismo valor, hallamos la totalidad de estos términos igual a $S(p) \times \sum (-1)^m$, además $\sum (-1)^m$ se toma respecto de todas las particiones del número $n - p$ en sumandos desiguales. Al aplicar el problema antecedente de Euler—Legendre, encontramos para S la expresión $\sum_{k:w_k<n} x(-1)^k S(n - w_k)$.

Con el fin de encontrar otra expresión para S, dividamos todas las representaciones de $n = \sum_m a + d\delta$ en tres categorías: 1) representaciones en las cuales d está ausente entre los sumandos de la suma $\sum_m a$ y, además, $\delta > 1$; 2) representaciones en las cuales d se encuentra entre los sumandos de la suma

$\sum_{m} a$; 3) representaciones en las cuales d está ausente entre los sumandos de $\sum_{m} a$, mientras que $\delta = 1$. Tomemos una representación de la primera categoría $n = \sum_{m} a + d\delta$, y, al restar un d del término $d\delta$, agreguémoslo, como sumando, a la suma $\sum_{m} a$. La representación obtenida (la cual puede ser expresada así: $n = \sum_{m+1} a + d\,(\delta - 1)$) pertenece, evidentemente, a la segunda categoría. Viceversa, a partir de cada representación de la segunda categoría puede obtenerse una representación de la primera categoría. Por consiguiente, las representaciones de las categorías primera y segunda se encuentran en una correspondencia biunívoca; al notar que los términos de la suma S para las representaciones correspondientes, es decir $(-1)^m d$ y $(-1)^{m+1} d$, se suprimen recíprocamente, podemos decir que la parte de la suma S extendida a las representaciones de las dos primeras categorías es igual a cero.

Examinemos una representación de la tercera categoría $n = \sum_{m} a + d$. Por cuanto d no se encuentra entre los sumandos a, esta representación puede considerarse como una partición no ordenada de n en $m + 1$ sumandos desiguales. Viceversa, a partir de cada partición de $n = a_1 + \ldots + a_{m+1}$ obtendremos $m + 1$ representaciones de la tercera categoría, tomando d igual a $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$. Estas representaciones darán en la suma S los términos $(-1)^m a_1 + (-1)^m a_2 + \ldots + (-1)^m a_{m+1} = (-1)^m n$. De aquí está claro que toda la suma S es igual a $n \sum (-1)^m$, donde $\sum (-1)^m$ se calcula respecto de todas las particiones no ordenadas de n en sumandos distintos, cuyo número es $m + 1$. De acuerdo con la fórmula de Euler—Legendre (del problema 1.47), $S = \begin{cases} (-1)^{S-1} n, \\ n = w_S \end{cases}$ lo que se trataba de demostrar.

1.49. Examinemos una suma $S = \sum (-1)^m$ respecto de las particiones $n = \sum_{m} a + \sum a^*$, donde $\sum_{m} a$ denota la suma no ordenada m de sumandos desiguales, y $\sum a^*$, una suma no ordenada de sumandos iguales o desiguales. Demostremos que $S = 0$.

Reunamos en un grupo aquellas particiones en las cuales la totalidad de sumandos a y a^* es la misma; supongamos que en ella se contienen k sumandos desiguales. Es evidente que todas las particiones del grupo a considerar se obtienen cuando a partir de los k sumandos elegimos ciertos sumandos m ($m = 0, 1, \ldots, k$) y los incluimos en la suma $\sum_{m} a$; los demás sumandos los incluimos en la suma $\sum a^*$. La suma $\sum (-1)^m$ formada para ellos será: $1 - C_k^1 + C_k^2 - \ldots \pm C_k^k = 0$. Por consiguiente, también $S = 0$. Reunamos ahora en la suma S los términos, para los cuales $\sum_{m} a = u$ y $\sum a^* = v$ ($u + v = n$). De acuerdo con la fórmula de Euler-Legendre, esta parte de la suma es igual a cero, si u es un número no pentagonal, e igual a $(-1)^h$ (v), si $u = w_h$. Por consiguiente, obtenemos la igualdad $\sum_{h\,:\,w_h \leqslant n} (-1)^h \bar{\mu}\,(n - w_h) = 0$, lo que se trataba de demostrar.

1.50. $F(n - hk) = \sum_{S\,:\,w_S < n/h - k} (-1)^S f(n - h(k + w_S))$. Al multiplicar adi-

cionalmente por $\bar{\mu}(k)$ y al sumar respecto de k, obtendremos

$$\sum \bar{\mu}(k) F(n-hk) = \sum_{k,\ S} (-1)^S \bar{\mu}(k) f(n-h(k+w_S)).$$

Reuniendo en la última suma doble aquellos términos, para los cuales $k+w_S=l$ tiene un mismo valor, obtendremos

$$\sum_{0\leqslant l\leqslant n/h} f(n-hl) \sum_{h\,:\,w_S\leqslant l} (-1)^S \bar{\mu}(l-w_S).$$

De conformidad con el problema antecedente, la suma interior es igual a cero cuando $l>0$. Por consiguiente, toda la suma es igual a $f(n)$.

1.51. a) la demostración es igual que en el problema 1.49. Se debe demostrar la igualdad

$$\sum_{h=\sum\limits_m a+\sum b} (-1)^m = \sum_{h=2\sum\limits_m a} (-1)^m$$

y aplicar el teorema de Euler—Legendre;

b) se deduce de a) y de la fórmula de inversión del problema 1.50.

1.52. a) se demuestra por analogía con el problema 1.49. De la fórmula de Euler—Legendre se deduce

$$\sum_{n=2\sum\limits_m a+\sum b} (-1)^m = \begin{cases} (-1)^{n+S}, & n=w_S, \\ 0, & n\neq w_S; \end{cases}$$

b) se deduce de a) y de la fórmula de inversión del problema 1.50.

1.53. Este número es igual al coeficiente de x^m en el polinomio $(x^l+x^{l+1}+\ldots+x^n)^p = x^{lp}(1-x^{n-l+1})^p(1-x)^{-p}$. En virtud de la fórmula del binomio de Newton llegamos a que este coeficiente es igual a

$$C_{m-(l-1)p-1}^{m-lp} - C_p^l C_{m-(l-1)(p-1)-n-1}^{m+l-n-1-lp} + C_p^2 C_{m-(l-1)(p-2)-2n-1}^{m+2(l-n-1)-lp} + \ldots,$$

$$x^{lp}\left[\sum_{h_1=0}^{p} (-1)^{h_1} C_p^{h_1} x^{(n-l+1)h_1}\right]\left[\sum_{h_2=0}^{\infty} C_{p+h_2-1}^{h_2} x^{h_2}\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left\{\sum_{lp+(n-l+1)h_1+h_2=m} (-1)^{h_1} C_p^{h_1} C_{p+h_2-1}^{h_2}\right\}.$$

1.54. El círculo que se obtiene cuando el m-ésimo plano corta una esfera se interseca con cada uno de los planos restantes en dos puntos y, por tanto, se divide en $2(m-1)$ partes. Si suprimimos el m-ésimo círculo, el número de partes será $F(2m-1)$. Por consiguiente, $F(m) = 2(m-1) + F(m-1) = 2 + m(m-1)$, puesto que $F(1) = 2$.

1.55. A cada una de C_{n-ks}^k elecciones de k números a partir de $n-ks$ se le hace corresponder la elección de k vértices a partir de n del modo siguiente: a la derecha del siguiente número elegido i pondremos los números $i+1, \ldots, i+s$, y los números que van detrás los aumentamos en s. De una manera semejante encontramos sC_{n-ks-1}^{k-1} elecciones no abarcadas antes, cuando quedó elegido uno de los vértices $n-s, n-s+1, \ldots, n$. Tenemos en total $C_{n-ks}^k + sC_{n-ks-1}^{k-1}$ polígonos de k lados.

1.56. Sea $V(n)$ la función buscada. Demostremos una relación recurrente $V(n) = \sum_{s=0}^{n-1} V(s)\, V(n-s-1)$, $V(0) = 1$. En efecto, cualquiera que sea la partición, existe un triángulo que contiene la arista $(n+1, n+2)$ (convengamos en considerar que los vértices del triángulo vienen enumerados con las cifras del 1 al $n+2$). El tercer vértice del triángulo puede ser cualquiera de los restantes $1, 2, \ldots, n$. Supongamos que es el vértice S. Si suprimimos el triángulo $(n+1, n+2, s)$, obtendremos dos polígonos con un número de vértices igual a $s+1$ y $n-s+2$, los cuales pueden ser partidos en triángulos empleando $V(s-1)$ y $V(n-s)$ métodos, respectivamente. Al enumerar respecto de $S = 1, \ldots, n$, obtendremos la fórmula requerida. Se puede demostrar que la solución de esta fórmula recurrente será $V(n) = C_{2n}^{n}/(n+1)$.

1.57. Sea $V(n)$ la función buscada. Demostremos una relación recurrente $V(k+1) = V(k) + k + 1$, $V(1) = 2$. De aquí obtenemos de una vez

$$V(n) = 2 + (2 + 3 + \ldots + n) = (n^2 + n + 2)/2.$$

Sean trazadas k rectas. Tracemos adicionalmente la $(k+1)$-ésima recta. Ésta se interseca con las demás en k puntos y se divide en $k+1$ partes, cada una de las cuales pertenece a una parte nueva del plano. Por consiguiente, $V(k+1) - V(k) = k+1$, lo que se trataba de demostrar.

1.58. Sea l el número de pares de rectas paralelas. Si $l = 0 = k_2 = k_4 = \ldots = k_n$, entonces $k_2 = n(n-1)/2$. Examinemos el vértice A de multiplicidad r. Si desplazamos un tanto todas las rectas que pasan por A, obtendremos $r(r-1)/2 - 1$ nuevos puntos de intersección. Por consiguiente,

$$\frac{n(n-1)}{2} = l + \sum_{r=2}^{n} \frac{r(r-1)}{2} k_r.$$

De aquí

$$l = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{r=2}^{n} \frac{r(r-1)}{2} k_r.$$

1.59. Sea $V(n)$ la función buscada. Si todas las rectas se intersecaran de dos en dos y cualesquiera tres de ellas no se intersecaran en un punto, tendríamos, según el problema 1.57:

$$V(n) = 2 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n-1)/2 + 1 = (n^2 + n + 2)/2.$$

Un punto de multiplicidad r provoca la disminución del número de partes en una magnitud

$$(r^2 + r + 2)/2 - 2r = (r^2 - 3r + 2)/2.$$

Si no hay rectas paralelas, entonces

$$V(n) = \frac{n^2+n+2}{2} - \sum_{r=2}^{n} k_r \left(\frac{r^2+r+2}{2} - 2r \right).$$

Si hay l pares de rectas paralelas, entonces

$$V(n) = \frac{n^2+n+2}{2} - l - \sum_{r=2}^{n} k_r \left(\frac{r^2+r+2}{2} - 2r \right).$$

Haciendo uso del resultado obtenido para el problema 1.58, obtendremos

$$V(n) = \frac{n^2+n+2}{2} - \frac{n^2-n}{2} + \sum_{r=2}^{n} k_r \frac{r^2-r}{2} -$$

$$- \sum_{r=2}^{n} k_r \frac{r^2-3r+2}{2} = n+1+\sum_{r=2}^{n} (r-1)\, k_r.$$

Esta fórmula puede ser obtenida también por inducción.

1.60. Supongamos que ya se han trazado $k-1$ planos. Tracemos el k-ésimo plano. Éste se interseca con los planos trazados anteriormente a lo largo de $k-1$ rectas, las cuales lo dividen en $(k^2-k+2)/2$ partes. Cada una de estas partes corresponde a la nueva parte del espacio. Por eso, n planos dividen el espacio en

$$1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (k^2-k+2) = \frac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)$$

partes.

1.61. Supongamos que ya se han trazado $k-1$ planos. Tracemos el k-ésimo plano. Éste se interseca con los planos trazados anteriormente a lo largo de $k-1$ líneas. Dichas líneas se cortan en un punto A y dividen el k-ésimo plano en $2(k-1)$ partes. Cada una de las citadas partes corresponde a una nueva parte del espacio. Por eso, el número total de partes será $2+\sum_{s=2}^{n} 2(s-1) = k^2-k+2$.

1.62. El problema es análogo al problema correspondiente sobre las rectas en un plano, $l = C_n^2 - \sum_{s=2}^{n} l_s C_s^2$.

1.63. El número total de partes es igual, de acuerdo con el problema 1.60, a $(n+1)(n^2-n+6)/6$. Cada terna de planos que no se cortan en un mismo punto provoca la disminución en 1. El número de tales ternas es igual a $k = C_n^3 - \sum_{s=3}^{n} k_s C_s^3$. Cada punto, perteneciente a S planos, da una disminución del número de partes en

$$(s+1)(s^2-s+6)/6 - (s^2-s+2) = (s^3-6s^2+11s-6)/6.$$

Por consiguiente, el número total de partes (si no hay planos paralelos) es igual a

$$\frac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6) - \left(C_n^3 - \sum_{s=3}^{n} k_s C_s^3\right) - \sum_{s=3}^{n} k_s \frac{s^3-6s^2+11s-6}{6} =$$

$$= \frac{n^2+n+2}{2} + \sum_{s=3}^{n} k_s \frac{s^2-3s+2}{2}.$$

§ 4. Problemas mixtos

1.64. Suele decirse que la permutación de un n-conjunto tiene la *especificación* $(k_1 k_2 \ldots k_n)$, si contiene k_i elementos de la i-ésima clase $(i = 1, \ldots, n)$.

a) Esto es el número de permutaciones del $2n$-conjunto que tiene la especificación (2^n).

b) Esto es el número de permutaciones del $3n$-conjunto que tiene la especificación (3^n).

c) $(n^2)!\,(n!)^n$ es el número de permutaciones del n^2-conjunto que tiene la especificación (n^n). Demostremos que este número se divide por $n!$. Partamos nuestro conjunto de permutaciones en clases de equivalencia empleando el siguiente procedimiento.

Dos permutaciones del n^2-conjunto de especificación (n^n) se llamarán *equivalentes*, si existe tal sustitución $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ que los lugares ocupados en la 1ra permutación por los elementos de la primera clase, en la segunda permutación estos lugares están ocupados por los elementos de la i-ésima clase; los lugares de la primera permutación ocupados por los elementos de la segunda clase, están ocupados en la segunda permutación por los elementos de la i_2-ésima clase, etc.

Es fácil comprobar que el conjunto de permutaciones lo hemos partido de este modo en clases de equivalencia y la potencia de cada una de estas clases es igual a $n!$, lo que nos lleva a la solución del problema.

d) $(kl)!/(k!)^{(k-1)!}$ es el número de permutaciones del kl-conjunto que tiene la especificación $(k^{(k-1)!})$.

e) $(2n!)/(n!\,(n+1)!) = 4C_{2n-1}^{n} - C_{2n+1}^{n}$, lo que demuestra que el resultado es de número entero.

1.65. Demostremos al principio el siguiente lema: para que un número de la forma $x^2 + y^2$ se divida por 49, es necesario y suficiente que x e y se dividan por 7.

Demostración. La suficiencia es obvia. En efecto, si x e y se dividen por 7, entonces x^2 e y^2, y, por tanto, $x^2 + y^2$ se dividen por 49.

Necesidad. Supongamos que $x^2 + y^2$ se divide por 49. Demostremos que tanto x como y se dividen por 7. Cada uno de los números x e y pueden escribirse en la forma

$$x = 7x_1 + \alpha, \qquad y = 7y_1 + \beta, \tag{*}$$

donde x_1 e y_1 son números enteros no negativos, mientras que α y β tienen uno de los valores $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Teniendo presentes las igualdades (*), la expresión $x^2 + y^2$ puede escribirse del modo siguiente:

$$x^2 + y^2 = 49\,(x_1^2 + y_1^2) + 14\,(\alpha x_1 + \beta y_1) + \alpha^2 + \beta^2.$$

Dado que, por hipótesis, $x^2 + y^2$ se divide por 49, y, por tanto, se divide por 7, y, además, por 7 se dividen los dos primeros sumandos en el segundo miembro de la igualdad, llegamos a que $\alpha^2 + \beta^2$ se divide por 7. El valor máximo que puede asumir la suma $\alpha^2 + \beta^2$ es igual a 18. Entre los números enteros de 0 a 18 se dividen por 7 solamente 0, 7 y 14. Quiere decir, que la magnitud $\alpha^2 + \beta^2$ es igual o bien a 0, o bien a 7, o bien a 14. Por cuanto los valores que pueden tomar α^2 y β^2 son sólo de 0, 1, 4 y 9, es fácil de convencerse de que $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, puesto que la suma de dos sumandos formados de los números 0, 1, 4 y 9 no puede ser igual a 7 ó a 14. De este modo el lema queda demostrado.

Denotemos con n el número de los números enteros positivos que son inferiores a 1000 y que se dividen por 7. Es evidente que n es igual a la parte entera del número 1000/7, es decir, a 142. En este caso el número de pares diferentes de números enteros x e y $(x \neq y)$ del 1 al 1000, para los cuales $(x^2 + y^2)/49$ es un número entero, es igual a $C_{142}^{2} = 10011$. Además, hay 142 pares más de la forma (x, x). Por consiguiente, el número de pares diferentes (x, y) es igual a 10153.

1.66. Entre los números de una serie natural del 1 al n se tienen $n - [n/p]$ números que no se dividen por p. De éstos se pueden formar $C^k_{n-[n/p]}$ productos que no se dividen por p. El número total de productos será igual a C^k_n. Por consiguiente, $N = C^k_n - C^k_{n-[n/p]}$.

1.67. $n \sum_{k=1}^{[(n-2)/2]} [k(n-k-2)+1]$, n es impar.

$$n \sum_{k=1}^{(n-2)/2-1} [k(n-2-k)+1] + \frac{n}{2}\left(\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 1\right), \quad n \text{ es par.}$$

1.68. Hay en total $C^2_5 = 10$ rectas. De cada punto salen 6 perpendiculares. Examinemos dos puntos cualesquiera B y C. Por cuanto las perpendiculares, bajadas de los puntos B y C a la recta que une otros dos puntos D y E, no se intersecan, las perpendiculares bajadas de los puntos B y C tienen $6 \times 6 - 3 = 33$ puntos de intersección. A partir de 5 puntos pueden formarse 10 pares. Por consiguiente, existen no más que 330 puntos de intersección. Pero algunos puntos los hemos contado varias veces. En efecto, cualesquiera tres puntos de los cinco dados forman triángulos. Las alturas de estos triángulos se cortan en un punto y este último se ha contado tres veces. Hay en total $C^3_5 = 10$ de tales triángulos. Por consiguiente, el número máximo de puntos de intersección es igual a $330 - 20 = 310$.

1.69. *Procedimiento* 1. Unamos sucesivamente los puntos tomados en la circunferencia por medio de cuerdas. Calculemos en cuántas partes se divide por diagonales el polígono de n lados obtenido. Las diagonales se trazarán de una manera sucesiva. Notemos que, una vez trazada cada diagonal, el número de partes aumenta en un número que es en la unidad superior al número de puntos de intersección, los cuales aparecen luego de trazar las diagonales. Por eso, el número de partes, en las cuales las diagonales dividen el polígono, es igual a 1 (al principio teníamos una parte: todo el polígono) más el número de diagonales, más el número de puntos de intersección de las diagonales. El número de diagonales del polígono de n lados es $n(n-3)/2$. El número de puntos de intersección de las diagonales del polígono es igual a C^4_n (cada punto de intersección se define por cuatro vértices). Por consiguiente, el número de partes en las que se dividirá el círculo es $N = 1 + n(n-3)/2 + C^4_n + n$.

Procedimiento 2. Supongamos que entre las partes obtenidas hay N_3 triángulos, N_4 cuadriláteros, etc., N_m polígonos de m lados. Se debe hallar la suma $N = N_3 + N_4 + \ldots + N_m$. Observemos que el número de todos los vértices obtenidos de los polígonos es igual a $3N_3 + 4N_4 + \ldots + mN_m$. Este mismo número puede hallarse de un modo distinto: cada uno de los puntos de intersección de las diagonales del polígono de n lados (hay en total C^4_n de ellos) es un vértice de cuatro polígonos, y cada vértice del polígono de n lados es el vértice de $n-2$ polígonos, por lo cual $3N_3 + 4N_4 + \ldots + mN_m = 4C^4_n + n(n-2)$. La suma de ángulos de todos los polígonos obtenidos es igual a $[N_3(3-2) + N_4(4-2) + \ldots + N_m(m-2)]\pi$. Por otra parte, esta misma suma es igual a $2\pi C^4_n + (n-2)\pi$, por lo cual $N_3(3-2) + N_4(4-2) + \ldots + N_m(m-2) = 2C^4_n + (n-2)$. De aquí, $3N_3 + 4N_4 + \ldots + mN_m - 2N = 2C^4_n + n - 2$, o bien

$$2N = 2C^4_n + (n-2)(n-1), \quad N = C^4_n + n(n-3)/2 + 1.$$

Así pues, el círculo queda dividido en $N + n$ partes.

1.70. Dividamos 20 equipos en dos subgrupos, de 10 equipos cada uno, y en cada uno de los subgrupos realicemos un torneo según el sistema de rueda. Se jugarán en total $N = C^2_{10} + C^2_{10} = 90$ partidos. Es evidente que el torneo realizado de esta manera satisface la hipótesis del problema. Demostremos que esto es el número mínimo de partidos. Supongamos que existe un torneo que satisface la hipótesis del problema y que $N \leqslant 90$. En tal caso existe un equipo

A que jugó con los demás equipos no menos de 9 partidos. Denotemos con K los equipos que jugaron con A, y con Y los que no jugaron. Es evidente que todos los Y equipos jugaron entre sí (C_K^2 partidos). Supongamos que entre K equipos P pares no jugaron entre sí, y $C_K^2 - P$, sí jugaron. Entonces cualquier equipo de Y ha de jugar por lo menos con un equipo en cada uno de los citados P pares. Teniendo en cuenta que cualquier equipo pertenece a lo sumo a $K - 1$ pares de P, concluimos que deben realizarse no menos de $(19 - K)\,P/(K - 1)$ partidos entre K e Y. De este modo, se han jugado no menos de $N = C_K^2 - P + (19 - K)\,P/(K - 1) + C_{19-K}^2 + K$ partidos. Considerando que $K \leqslant 9$, tenemos

$$N \geqslant K\,(K-1)/2 + (19-K)\,(18-K)/2 + K = \\ = K^2 - 18K + 9 \cdot 19 = (K-9)^2 + 90 \geqslant 90.$$

1.71. La probabilidad de que las torres no se capten una a la otra es mayor. Ella es igual a $(64 \cdot 49)/(64 \cdot 63) = 49/63$.

1.72. Supongamos lo contrario. Hay en total 10 rectas horizontales y verticales de este tipo. No es difícil notar que cada recta corta sin falta un número par de fichas de dominó. En efecto, veamos, por ejemplo, una línea horizontal. En la mitad superior, obtenida como resultado de la división del tablero por la recta citada, se contiene un número par de casillas (el ancho del tablero es de 6 casillas). Las fichas de dominó dispuestas íntegramente en esta parte (mitad superior) también ocupan el número par de casillas (cada ficha ocupa dos casillas). Además de éstas hay algunas casillas más ocupadas por las mitades de las fichas que cortan la recta. De este modo queda demostrado que el número de dichas casillas (es decir, el número de fichas cortadas por la recta) es la diferencia entre dos números pares, o sea un número par.

Así pues, cada una de las 10 rectas corta cierto número de fichas, es decir, al menos dos. Cada ficha se corta por una sola recta, por lo cual en el tablero deben haber no menos de 20 fichas. Por otra parte, está claro que se necesitan 18 fichas para cubrir el tablero.

La contradicción obtenida muestra que, cualquiera que sea la disposición de las fichas que cubren el tablero, existe al menos una recta de las 10 que no corta ninguna ficha de dominó.

1.73. Por encima de cada vertical de un tablero de ajedrez escribamos los números 1, 2, 3, . . ., 8, y a la izquierda, cerca de cada horizontal, los números 0, 8, 16, 24, . . ., 56; en este caso puede considerarse que en cada casilla del tablero está escrita la suma de dos números correspondientes a sus verticales y horizontales (fig. 1.1′). Por cuanto 8 torres dispuestas en el tablero de ajedrez no se captan una a la otra, cada vertical y cada horizontal contendrán obligatoriamente una torre. Quiere decir que en la suma de los números de aquellos escaques, donde se disponen las torres, figurarán una vez todos los números 1, 2, . . ., 8, correspondientes a las diferentes verticales, y una vez todos los números 0, 8, 16, . . ., 56, correspondientes a las diferentes horizontales. Por eso, la suma de los números tendrá siempre un mismo valor: $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 0 + 8 + 16 + \ldots + 56 = 260$.

1.74. El número de rectángulos de dimensión $i \times j$ es igual a $(n - i + 1) \times (n - j + 1)$. Todo rectángulo se cuenta en la suma tantas veces como es su área. De aquí la suma será

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(n-i+1)\,(n-j+1)\,ij = \left(\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\,i\right)^2 = \left(\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}\right)^2.$$

1.75. La cápsula convexa de cinco puntos en un plano, mencionados en el problema, puede tener la forma de un pentágono, un cuadrilátero o un triángulo; en los primeros dos casos la afirmación es evidente. En cuanto al último caso, hay que constatar que en el interior del triángulo resulta haber dos puntos

(fig. 1.2'). Tracemos por éstos una recta y dividamos el triángulo en dos partes. En virtud del principio de Dirichlet, en una de las partes caerán dos vértices. Los últimos forman, junto con dos puntos interiores, el cuadrilátero que se busca.

	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8
8	8+1							8+8
16	16+1	16+2						16+8
24								24+8
32								
40								
48								
56	56+1	56+2	56+3	...	...			56+8

Fig. 1.1'.

1.76. Por cuanto durante el paseo se encuentran n cruces y en cada una de ellas se tienen sólo dos posibilidades, entonces tendremos en total 2^n caminos. En el k-ésimo cruce de la n-ésima fila podemos llegar empleando C_n^k rutas. De este modo, la probabilidad buscada es igual a $p = C_n^k/2^n$.

1.77. *Indicaciones.* El número de rutas que llevan a la n-ésima fila de cruces se compara con el número de rutas que llevan a la $(n+1)$-ésima fila.

1.78. La raíz de la ecuación $ax = b$ es superior a uno a condición de que $b > a$. Examinemos los parámetros a y b, tomándolos por coordenadas cartesianes rectangulares de un punto del plano (fig. 1.3'). Por cuanto a y b son naturales, entonces $a > 0$, $b > 0$. Por eso el número de todos los resultados posibles es igual a mn.

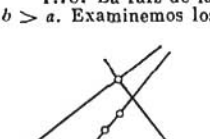


Fig. 1.2'.1

Si $m \leqslant n$, el número de resultados no favorables para el suceso en consideración será igual a $1 + 2 + \ldots + (m-1) + m = (m+1)\,m/2$. Por eso, al suceso que se considera favorecen $mn - m \times (m+1)/2$ casos posibles, es decir, $m\,(2n - m - 1)/2$. Por eso la probabilidad se halla de la fórmula $p = (2n - m - 1)/(2n)$.

Si $m > n$, el número de resultados que favorecen al suceso en consideración será igual a $1 + 2 + \ldots + (n-1) = (n-1)\,n/2$, por consiguiente, $p = (n-1)/(2m)$.

1.79. A cada determinado trayecto del camino le corresponde una «palabra» que consta de m letras a y n letras b, y viceversa. Por ejemplo, la «palabra» *aabbbabb* significa que el camino consta de dos unidades por la horizontal, tres unidades por la vertical, una unidad por la horizontal y dos unidades por la vertical, a consecuencia de lo cual se alcanza el punto (m, n) (en este caso $m = 3$, $n = 5$). Mas, evidentemente, a partir de las letras a y b, de las cuales la primera interviene m veces y la segunda, n veces, pueden formarse $C_{m+n}^n = (m+n)!/$

/(m!n!) «palabras» que serán precisamente el número buscado de caminos diferentes.

1.80. Supongamos que el lado AB es vertical y contiene m segmentos y que el lado AD es horizontal y contiene kn segmentos. Los caminos que tienen por comienzo el segmento AB_1 (AD_1), los llamaremos brevemente caminos del tipo AB (del tipo AD, respectivamente).

Tomemos un camino del tipo AD. Marquemos en éste uno de los segmentos verticales MN y trasladamos todo el trozo $D_1 \ldots M$ en un retículo hacia arriba y a la derecha; obtendremos el trozo B_1M. A todo camino $AD_1 \ldots MN \ldots C$ con el segmento vertical marcado MN pongámosle en correspondencia el camino $AB_1 \ldots M_1N \ldots C$ con el segmento horizontal marcado M_1N. Tal correspondencia es biunívoca. Supongamos que existen en total b caminos del tipo AB y d caminos del tipo AD. Por cuanto en cada camino se tienen m segmentos verticales y kn horizontales, entonces existen bkn caminos del tipo AB con

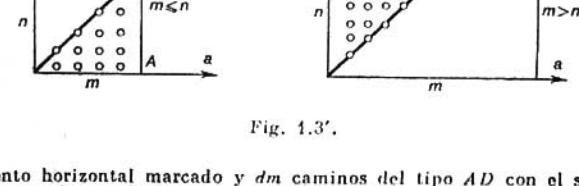


Fig. 1.3′.

el segmento horizontal marcado y dm caminos del tipo AD con el segmento vertical marcado. Según lo demostrado más arriba estos números son iguales, es decir, $bkm = dm \Rightarrow bk = d$.

1.81. Dividamos toda clase de rutas en dos grupos: las que pasan por el punto C y las que pasan por el punto D. No existen otros métodos para llegar al punto B. De A a C se puede llegar empleando cinco métodos, y de C a B, sólo utilizando un método. Por consiguiente, el primer grupo consta de 5×1 rutas. De A al punto D se puede llegar a través de E o a través de F. De A a E podemos llegar empleando tres métodos, y de A a F, empleando dos métodos. Así, pues, de A a D podemos llegar empleando $3 + 2 = 5$ métodos. Pero, de D a B se puede llegar por dos métodos y, por tanto, de A a B, llevan, a través de D, $5 \times 2 = 10$ rutas. De este modo, el número total de toda clase de rutas que llevan desde el punto A hasta el B, evitando el punto M, es igual a 15.

1.82. Si el punto A está elegido, entonces los dos vértices restantes del triángulo, B y C, pueden ser elegidos empleando 28 ($8 \times 7/2$) métodos. Sin

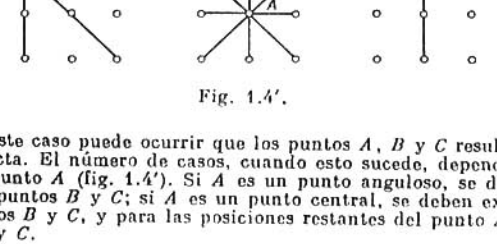


Fig. 1.4′.

embargo, en este caso puede ocurrir que los puntos A, B y C resulten estar en una misma recta. El número de casos, cuando esto sucede, depende de la disposición del punto A (fig. 1.4′). Si A es un punto anguloso, se deben excluir tres pares de puntos B y C; si A es un punto central, se deben excluir cuatro pares de puntos B y C, y para las posiciones restantes del punto A, dos pares de puntos B y C.

De este modo, el número total de triángulos depende de la posición del punto A y es igual a 24, 25 ó 26.

1.83. 1) Cada par de miembros de la comisión pudo encontrarse no más que *en una sesión. En cada sesión hubo* $10 \times 9/2$ *pares de hombres. Se trata en* total de 40 reuniones, es decir, en total eran por lo menos 1800 pares de miembros de la comisión. Pero, de 60 hombres se pueden formar sólo $60 \times 59/2 < 1800$ pares.

2) Supongamos que el número total de miembros de la comisión N no es superior a 60; entonces, por cuanto $10 \times 40/N > 6$, se encontrará un hombre que asistió por lo menos a siete sesiones. Todos aquellos hombres con los cuales él se encontraba son distintos y su cantidad total se calcula como $7 \times 9 > 60$, lo que contradice nuestra suposición.

1.84. El requisito de que ningún par de comisiones tengan más de un *miembro común es equivalente a que ningún par de colaboradores interviene* más que en una comisión. El número de todos los pares es igual a $25 \times 24/2 = 300$, el número de pares en una comisión es igual a $5 \times 4/2 = 10$. El número *máximo* posible de miembros de la comisión es igual a $300/10 = 30$.

1.85. El valor máximo posible de C_1 es 24. Si los primeros puestos se otorgaron a un deportista (por todos los nueve jueces), entonces $C_1 = 9$. Si los primeros puestos se otorgaron a dos deportistas en total, entonces uno de ellos obtuvo no menos de cinco primeros puestos, y los demás cuatro puestos obtenidos por él no son superiores al cuarto; por eso, $C_1 \leqslant 5 \times 1 + 4 \times 4 = 21$. Si los primeros puestos fueron obtenidos por tres deportistas, entonces, dado que los puestos restantes obtenidos por ellos no son superiores al cuarto (y hay en total 10 cuartos puestos), la suma de todos estos puestos de los tres deportistas citados no sobrepasa de $1 \times 9 + 3 \times 9 + 4 \times 9 = 72$. Por consiguiente, al *menos uno de los deportistas tiene una suma de puestos no superior a* 24, es decir, $C_1 \leqslant 24$. Si tales deportistas, son cuatro, la suma de sus puestos no será superior a $1 \times 9 + 2 \times 9 + 3 \times 9 + 4 \times 9 = 90$, por lo cual, la suma de puntos de algunos de ellos no es superior a 22.

El caso en que los primeros puestos son obtenidos por cinco y más hombres no es posible, puesto que para ellos faltan los puestos del 1 al 4 (hay en total $9 \times 4 = 36$ de tales puestos).

He aquí un caso en que $C_1 = 24$: cada uno de los tres mejores deportistas obtiene los puestos 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4; los dos siguientes: 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5 y 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, 5, etc.

1.86. *En un mismo poste puede haber dos números, cuando y sólo cuando* la suma de ellos es igual a 999. Por eso, si analizamos un poste, en el cual hay sólo dos cifras diferentes, entonces, en el caso de que una de las cifras sea C, la otra será obligatoriamente $9 - C$. Hay en total $2^3 = 8$ postes, en los cuales están marcados números expresados con las cifras C y $9 - C$ (en cada uno de los primeros tres lugares puede haber una cifra: C ó $9 - C$); existen en total 5 pares posibles de cifras (C, $9 - C$). Por eso, el número de todos los postes, en los cuales hay sólo dos cifras diferentes, es igual a 40.

1.87. Es obvio que el empate lo darán 9 números de cifras iguales (no hay el número 0000). Supondremos por eso que el número de «empate» tiene por lo menos dos cifras diferentes *a* y *b; sean c y d las cifras restantes del número.* Entonces, por definición del número de «empate», las diferencias $(b + d) - (a + c)$ y $(b + c) - (a + d)$ tienen, como última cifra, el 0, por lo cual 0 *también será la última cifra de su suma* $2(b - a)$. *Por cuanto* $b \neq a$, *a y b* se diferencian en 5. De este modo, cualesquiera dos cifras distintas del número difieren en 5. Por eso, si prefijamos una cifra, por ejemplo, $a = 1$, las demás cifras se definirán de una manera unívoca. En el caso dado éstas serán 1 y 6. Es fácil convencerse de que realmente los números de «empate» serán aquellos que constan de dos pares de cifras iguales. Con las cifras 1 y 6 habrá 6 tales números: 1166, 1616, 1661, 6161, 6611, 6116. Seis números pueden formarse de las cifras 2 y 7; 3 y 8; 4 y 9; 0 y 5. De este modo, la cantidad total de los números de «empate» será igual a 39 ($6 \times 5 + 9 = 39$).

1.88. Está claro que el tiempo de coloración será mínimo, si se logra dis-

tribuir el trabajo de un modo tal que cada cinco segundos se pinten el número máximo de caras, es decir, tres. Esto se consigue, evidentemente, mediante varios métodos. Por ejemplo, los primeros 183 cubos se pintan por cada hombre totalmente, a continuación, mientras dos pintan por completo un cubo cada uno, el tercer hombre pinta dos caras de los tres cubos restantes, y, por fin, todos los tres pintan cuatro caras cada uno de tres cubos. En este caso tres hombres cumplen todo el trabajo en el transcurso de $188 \times 5 \times 6/3 = 1880$ segundos.

1.89. Por cuanto ambos equipos contaban con un número igual de participantes, el número de todos los participantes es par. La suma máxima de tantos puede ser obtenida por 16 participantes y es igual a $16 \times 9 = 144$ ($144 < 156$), mientras que la suma mínima de tantos puede obtenerse por 20 participantes y ser igual a $20 \times 8 = 160$ ($156 < 160$). Se debe comprobar, además, que 18 participantes pueden obtener en suma 156 tantos, es decir, existen los números naturales x e y que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$x + y = 18, \quad 9x + 8y = 156.$$

La solución existe y es, además, única: $x = 12$, $y = 6$.

1.90. Es fácil ver que para formar un cuadrado se necesitan no menos de siete palos. Por eso no se puede formar un cuadrado con un lado inferior a 7 cm. Por otra parte, la suma de las longitudes de todos los palos es igual a 45 cm, y, por eso, a partir de ellos resulta imposible formar un cuadrado cuyo lado sea superior a 11 cm. A partir de los palos del juego dado se pueden formar segmentos con una longitud de 7, 8, 9, 10, 11 cm mediante los siguientes métodos:

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$$
$$8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3,$$
$$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$$
$$9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4,$$
$$9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5.$$

Por consiguiente, a partir del juego dado de palos pueden formarse, empleando un solo método (C_5^1), cuadrados con lados de 7, 8, 10, 11 cm y empleando cinco métodos ($C_5^1 = C_5^4$), un cuadrado de 9 cm de lado.

1.91. **El número de toda clase de métodos para aprobar los exámenes es igual a $C_{(3)}^3 = 10$. Por eso, si no se encontraran cinco estudiantes que aprobaron los exámenes con iguales resultados, el número de estudiantes no sobrepasaría de $4 \times 10 = 40$, lo que no tiene lugar.**

1.92. Hace falta hallar la posibilidad de que al distribuir 41 hombres entre 6 grupos se realice una de estas posibilidades. Con este fin basta encontrar el número total de tales distribuciones. Supongamos que los grupos están numerados. Entonces, cada método de distribución consiste en que del conjunto 1, 2, 3, 4, 5, 6 de números de grupos tomamos el número 41: el número de unidades tomadas en este caso corresponde al número de estudiantes en el primer grupo, etc. Dicho de otro modo, el número de métodos de distribución es exactamente igual al número de combinaciones con repitición de 6 elementos tomados de a 41, el cual es igual a $C_{6+41-1}^{41} = C_{46}^5$. Por eso la probabilidad buscada es igual a $6/C_{46}^5 = 1/228\,459$.

1.93. Calculemos la cantidad de números desde 0 hasta 999999 en cuya notación no hay unidades, es decir, cuántos números de seis cifras pueden componerse empleando las cifras 0, 2, 3, 4, . . ., 9 (si el número tiene menos de seis cifras, convengamos en agregarle por la izquierda el número de ceros que le falta). En el primer lugar en tal número puede figurar cualquiera de las nueve cifras, a cada una de ellas podemos agregar por la derecha cualquiera de las mismas nueve cifras: 0, 2, 3, 4, . . ., 9; así pues, se obtendrán 81 números de dos cifras a partir de las cifras 0, 2, 3, 4, . . ., 9. Continuando de esta manera, obtendremos 9^6 números de seis cifras, de los cuales se debe excluir 000000. Se ha mostrado, pues, que entre el primer millón existen exactamente $9^6 - 1$ números, en cuya notación no hay unidades, es decir, $9^6 - 1 = 531\,371$.

De este modo, entre el primer millón hay más números en cuya notación faltan las unidades.

1.94. La oración final, de la cual no se puede tachar ni una palabra, es «cuatro caminantes estuvieron esperando a que cesara la tormenta» y por lo tanto de la oración inicial es necesario tachar 6 palabras. Estas palabras se pueden tachar en cualquier orden, a excepción de una limitación: no se puede tachar la palabra «se desató» antes que la palabra «súbitamente». Así pues, el problema se reduce a lo siguiente: ¿de cuántas formas diferentes se pueden poner en fila 5 objetos, para que el primero siempre esté antes que el segundo? Este problema se resuelve fácilmente: la cantidad de procedimientos que existen para disponer los cinco objetos en fila es igual a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$, y de ellos justamente la mitad, es decir 60, satisfacen la condición indicada. Se puede llegar a la oración final, de la cual no se puede tachar ni una palabra, mediante 60 procedimientos.

1.95. El número de toda clase de posiciones en el tablero de ajedrez es finito. Supongamos que es igual a n. Por consiguiente, una de las posiciones se repite un número infinito de veces. Más aún, existen sucesiones de jugadas de longitud tan grande como se quiera, las cuales se repetirán no menos de dos veces. En efecto, el número de sucesiones de las posiciones de longitud m no sobrepasa de n^m. Por consiguiente, *una de las sucesiones se repite un número* infinito de veces.

1.96. Los números x e y no pueden ser ambos primos, puesto que en este caso no se cumple la condición 1. De acuerdo con la hipótesis de Goldbach, todo *número par es una suma de dos números primos. Por consiguiente, $x + y$ no es* un número par, pues, en el caso contrario no se cumple la condición 2. Ahora, *si $x + y > 53$, resulta posible la variante $x = 53$ e $y = (x + y) - 53$;* en este caso no se cumple la condición 1, puesto que si en el producto xy figura un *factor simple superior a 50,* la respuesta para A es unívoca.

Si $x + y$ se representa por dos modos diferentes en la forma $2^k + p$, donde p es un número primo, en este caso se cumplen las condiciones 1—3 y no se cumple la condición 4.

Quedan para el número $x + y$ las siguientes variantes: 5, 17, 29, 41, 53, 47. Por la comprobación inmediata nos convencemos de que la única solución la dan los números $x = 13$ e $y = 4$.

1.97. Sea m un número natural arbitrariamente prefijado. Dividamos la fracción infinita dada en segmentos de tal modo que cada uno contenga m cifras. Habrá una infinidad de tales segmentos. Por otra parte, el número de sistemas de m cifras es igual al número de m-muestras ordenadas del (10)-conjunto, $A_{(10)}^{m} = 10^m$, es decir, un número finito. Por consiguiente, al menos uno de estos sistemas ha de repetirse un número infinito de veces.

1.98. Los números de la sucesión 1, 2, . . ., n que se dividen por p^k deben tener la forma $lp^k \leqslant n$, de suerte que $l \leqslant n/p^k$, y, por consiguiente, la cantidad de tales números es igual a n/p^k. De aquí se obtiene la *fórmula requerida.*

De este problema se deduce que los coeficientes binomiales $p\ (n_1, \ldots, n_k) = n!/(n_1!) \ldots n_k!)$ son, *por supuesto, números enteros, si calculamos cuántas* veces el número primo p figura en el numerador y en el denominador y si hacemos uso de *la siguiente desigualdad*

$$[x + y] \geqslant [x] + [y].$$

En el caso general resulta válido el siguiente teorema: *sean dos sistemas* de formas lineales:

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k, \quad g_i(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k, \quad i = 1, \ldots, p; \quad j = 1, \ldots, m,$$

con coeficientes enteros no negativos a_{ik}, b_{ik}. Para que la expresión

$$\frac{f_1(x_1, \ldots, x_n)!\, f_2(x_1, \ldots, x_n)! \ldots f_m(x_1, \ldots, x_n)!}{\prod_{i=1}^{p} g_i(x_1, \ldots, x_n)!}$$

sea un número entero para cualquier sistema de valores enteros no negativos $x_1, \ldots, x_n$, es necesario y suficiente que en todo el dominio $0 \leqslant y_1 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant y_n \leqslant 1$ de valores de las variables $y_1, \ldots, y_n$ se satisfaga la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{m} [f_i(y_1, \ldots, y_n)] \geqslant \sum_{i=1}^{p} [g_i(y_1, \ldots, y_n)].$$

1.99. Del problema 1.98 proviene que la potencia máxima del número 5 que divide el número $3!!! = 720!$ es

$$\left[\frac{720}{5}\right] + \left[\frac{720}{25}\right] + \left[\frac{720}{125}\right] + \left[\frac{720}{625}\right] = 144 + 28 + 5 + 1 = 178,$$

y la potencia máxima del número 2 que divida 720! será aún mayor, puesto que ya $720/2 = 360$. De aquí se deduce que el número $3!!!$ tiene en el extremo 178 ceros.

1.100. Demostremos la fórmula recurrente $N = N(n) = \{N(n-1) + 2\}_n$ donde la expresión encerrada entre las llaves significa el residuo positivo mínimo según el módulo n. En efecto, si se sabe $N(n-1)$, entonces para hallar $N(n)$ se debe agregar un número y cambiar la numeración de tal modo que el segundo número tachado en la nueva numeración resulte ser el número 2 en la numeración antigua. Entonces está claro que el número $N(n-1)$ en la nueva numeración representará el número $\{N(n-1) + 2\}_n$ y será el último número no tachado.

Sea $n_0 = 1$, $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_s < \ldots$ es una sucesión de números naturales, para los cuales se verifica la igualdad $N(n_s) = 1$. Entonces, de la fórmula recurrente se desprenden las siguientes relaciones: $N(n) = Nn_{s-1} + 2(n - n_{s-1})$, siempre que $n_{s-1} < n < n_s$, y $N(n_{s-1}) + 2(n_s - n_{s-1}) = n_s + N(n_s)$. De aquí obtenemos inmediatamente $n_s = 2n_{s-1} = 2^s$ y $N(n) = 2n - 2^{[\log_2 n]+1} + 1$, lo que se trataba de demostrar.

MÉTODO DE FUNCIONES GENERATRICES

§ 1. Funciones generatrices: propiedades y operaciones

2.1. $f^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n=\sum_{n=0}^{N} z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

2.2. $f^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n=\sum_{n=0}^{N}(n+1)\,z^n=\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{N+1} z^n\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{1-z^{N+2}}{1-z}\right)=$

$=\frac{1-(N+2)\,z^{N+1}+(N+1)\,z^{N+2}}{(1-z)^2}$.

2.3. $f^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n=\sum_{n=0}^{N+1}(n+1)(n+2)\,z^n=\frac{d^2}{dz^2}\left(\sum_{n=0}^{N+1} z^n\right)=$

$=\frac{d}{dz}\left[\frac{1-(N+2)\,z^{N+1}+(N+1)\,z^{N+2}}{(1-z)^2}\right]=$

$=\frac{2-(N+2)(N+1)\,z^N+2N(N+2)\,z^{N+1}-(N+1)^2 z^{N+2}}{(1-z)^3}$.

2.4. $f^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z}$.

2.5. $f^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha n)^n=\frac{1}{1-\alpha z}$.

2.6. $f^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha n z^n=\alpha z\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}=\alpha z\,\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)=$

$=\frac{\alpha z}{(1-z)^2}$.

2.7. $f^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n=\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n=\sum_{n=0}^{\infty} n[(n-1)+1]\,z^n=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\,z^n+$

$+\sum_{n=0}^{\infty} n z^n=z^2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\,z^{n-2}+z\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}=z^2\frac{d^2}{dz^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)+z\,\frac{d}{dz}\times$

$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = z^2\,\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z}\right) + z\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = z^2\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right) +$$

$$+\,\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{2z^2+z-z^2}{(1-z)^3} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

2.8. $f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n = z\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1}(nz^{n-1}) = z\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1}\,\frac{d}{dz}\,z^n = z\,\frac{d}{dz}\times$

$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1}z^n\right) = z\,\frac{d}{dz}\,g^*(z),$$

donde $g^*(z)$ es una función generatriz de la sucesión $g(n) = n^{k-1}$.

2.9. $f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\,(\alpha z)^n \overset{t=\alpha z}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} nt^n =$

$$= t\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1} = t\,\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) = t\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}.$$

2.10. $f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C^n_{n+p-1}\alpha^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C^n_{n+p-1}\,(\alpha z)^n \overset{t=\alpha z}{=\!=}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p-1)!}{n!\,(p-1)!}\,t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,p(p+1)\ldots(p+n-1)\,t^n.$$

Esto es el desarrollo en serie de Taylor en el entorno del cero:

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,t + \frac{f''(0)}{2!}\,t^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,t^n.$$

En nuestro ejemplo $f^{(n)}(0) = p(p+1)\ldots(p+n-1)$, $f^{(n+1)}(0) = (p+n)\,f^{(n)}(0)$. El coeficiente de la derivada es un producto de números seguidos, si se diferencia la potencia de cierta expresión. Es necesario aclarar, si es positiva o negativa dicha potencia. Si la potencia es positiva, cada factor sucesivo será inferior al antecedente:

$$d^k x^n/dx^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\,x^{n-k}.$$

Si la potencia es negativa, tendremos un aumento de los factores en su valor absoluto: $d^k x^{-n}/dx^k = (-n)(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-k+1)\,x^{-(n+k)} = (-1)^k\,n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)\,x^{-(n+k)}$. Este segundo caso coincide con el nuestro con una exactitud de hasta el factor $(-1)^k$. El citado factor puede convertirse en 1 a cuenta de la diferenciación del denominador. Esto significa que la función tiene por expresión $f(t) = 1/(a-t)^{\alpha}$. En tal caso $f'(0) = p \Rightarrow \alpha = p$, $f(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^p} = 1 \Rightarrow a = 1$. De este modo,

$$f(t) = \frac{1}{(1-t)^p} = \frac{1}{(1-\alpha z)^p} = f^*(z).$$

2.11. $f^*(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,z^n=\sum_{n=1}^{\infty} C_{n+p-1}^{n-1}\alpha^n z^n \overset{t=\alpha z}{=\!=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+p-2)!}{(n-1)!\,(p-1)!}\,t^n=$

$=t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)+p-1]!}{(n-1)!\,(p-1)!}\,t^{n-1}\overset{n-1=k}{=\!=} t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+p-1)!}{k!\,(p-1)!}\,t^k=t\,\frac{1}{(1-t)^p}=$

$=\frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^p}.$

2.12. $f^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}\,z^n\overset{t=\alpha z}{=\!=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}.$

Esto coincide con el desarrollo de la función ln (1 + x), mas está ausente la alternación de los signos. Para que el desarrollo tenga el mismo signo, resulta suficiente tomar $x=-t$. Entonces $F(x)=F(-t)=\ln(1-t)=-(t/1+t^2/2+t^3/3+\ldots+t^n/n+\ldots)$. De aquí se ve que

$$f^*(z)=-F)-t)=-\ln(1-t)=-\ln(1-\alpha z).$$

2.13. $f^*(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\,z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha z)^n}{n!}=e^{\alpha z}-1.$

2.14. $f^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}\,z^{2k+1}.$

Introduzcamos las funciones auxiliares $\alpha(n)=\alpha^n/n!$ y $\beta(n)=(-\alpha)^n/n!$ Entonces $f(n)=[\alpha(n)-\beta(n)]/2$. Al sustituir esto en la suma, obtendremos

$$f^*(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[\alpha(n)-\beta(n)]\,z^n=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\alpha(n)\,z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\beta(n)\,z^n\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n z^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n z^n}{n!}\right]\overset{t=\alpha z}{\underset{r=-\alpha z}{=\!=}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\right]=\frac{1}{2}(e^t-e^r)=\frac{e^{\alpha z}-e^{-\alpha z}}{2}=\operatorname{sh}(\alpha z)!.$$

2.15. $f(n)=[\alpha(n)+\beta(n)]/2$, donde $\alpha(n)=\alpha^n/n!$, $\beta(n)=(-\alpha)^n/n!$. Entonces

$$f^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[\alpha(n)+\beta(n)]\,z^n=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\alpha(n)\,z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\beta(n)\,z^n\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n z^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n z^n}{n!}\right]\overset{t=\alpha z}{\underset{r=-\alpha z}{=\!=}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\right]=\frac{e^t+e^r}{2}=\operatorname{ch}(\alpha z).$$

2.16. $f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(\alpha n)\, z^n$.

Introduzcamos la función $\psi(\alpha) = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$ y analicemos

$$F(z, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \psi^n(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} [z(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cos\alpha n + i \sum_{n=0}^{\infty} z^n \operatorname{sen}\alpha n;$$

por otra parte,

$$F(z, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} [z\psi(\alpha)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 - z(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)}.$$

Se puede notar que

$$f^*(z) = \frac{1}{2i}[F(z, \alpha) - F(z, -\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1 - z\cos\alpha) - iz\operatorname{sen}\alpha} - \frac{1}{(1 - z\cos\alpha) + iz\operatorname{sen}\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\,\frac{1 - z\cos\alpha + iz\operatorname{sen}\alpha - 1 + z\cos\alpha + iz\operatorname{sen}\alpha}{1 - 2z\cos\alpha + z^2\cos^2\alpha + z^2\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{z\operatorname{sen}\alpha}{1 - 2z\cos\alpha + z^2}.$$

2.17. Introduzcamos la función $\psi(\alpha) = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$. Demos a conocer también otra función auxiliar

$$F(z, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(\alpha)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} [\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha]^n z^n \overset{t = z(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)}{=\!=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} t^n =$$

$$= \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1 - z(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)}.$$

Por otra parte,

$$F(z, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} [z(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cos n\alpha + i \sum_{n=0}^{\infty} z^n \operatorname{sen} n\alpha.$$

En tal caso podemos observar que

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\alpha n z^n = \frac{1}{2}[F(z, \alpha) - F(z, -\alpha)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - z(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)} + \frac{1}{1 - z(\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1 - z\cos\alpha) - iz\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{(1 - z\cos\alpha) + iz\operatorname{sen}\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2(1 - z\cos\alpha)}{1 - 2z\cos\alpha + z^2\cos^2\alpha + z^2\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1 - z\cos\alpha}{1 - 2z\cos\alpha + z^2}.$$

2.18. $F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_*(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1) z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1) z^{n-1} =$

$= z \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k = z f^*(z),$

$$F^*(z) = z f^*(z).$$

2.19. $F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) z^{n+1} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} f(k) z^k =$

$= \frac{1}{z} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k - f(0) \right] = \frac{f^*(z) - f(0)}{z}.$

2.20. $F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k) z^n = \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k) z^{n+k} = \frac{1}{z^k} \sum_{i=k}^{\infty} f(i) z^i =$

$= \frac{1}{z^k} \left[\sum_{i=0}^{\infty} f(i) z^i - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) z^r \right] = z^{-k} f^*(z) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) z^{r-k}.$

2.21. $F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \alpha^n z^n \overset{t=\alpha z}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) t^n = f^*_*(t) = f^*(\alpha z).$

2.22. $F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n f(n) z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} n f(n) z^{n-1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} [f(n) z^n] =$

$= z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n \right) = z \frac{d}{dz} f^*(z).$

2.23. $F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} f(i) z^n = f(0)(1 + z + \ldots) + f(1)(z + z^2 + \ldots) +$

$+ f(2)(z^2 + z^3 + \ldots) = \frac{f(0)}{1-z} + f(1) \frac{z}{1-z} + f(2) \frac{z^2}{1-z} + \ldots = \frac{1}{1-z} \times$

$\times \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \frac{f^*(z)}{1-z}.$

2.24. $F^*(z) = \sum_{n=k}^{\infty} (n-k) z^n = z^k \sum_{n=k}^{\infty} f(n-k) z^{n-k} \overset{i=n-k}{=\!=} z^k \sum_{i=0}^{\infty} f(i) z^i =$

$= z^k f^*(z).$

2.25. $F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (f(n+1) - f(n)) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n =$

$= \frac{f^*(z) - f(0)}{z} - f^*(z) = \frac{(1-z) f^*(z) - f(0)}{z}.$

2.26. $F^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} f(r)\,g(n-r)\,z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} f(r)\,z^r g(n-r)\,z^{n-r}=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}[f(0)\,g(n)\,z^n+f(1)\,zg(n-1)\,z^{n-1}+\ldots+f(n)\,z^n g(0)]=f(0)\sum_{n=0}^{\infty} g(n)\,z^n+$

$+f(1)\,z\sum_{n=1}^{\infty} g(n-1)\,z^{n-1}+\ldots+f(k)\,z^k\sum_{n=k}^{\infty} g(n-k)\,z^{n-k}+\ldots=f(0)\,g^*(z)+$

$+f(1)\,zg^*(z)+\ldots=g^*(z)\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n=g^*(z)\,f^*(z).$

2.27. $F^e(z)=\sum_{n=0}^{\infty} F(n)\,\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)\,\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n-1)}{n!}\,n\int_0^z t^{n-1}\,dt=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n-1)}{(n-1)!}\int_0^z t^{n-1}\,dt=\int_0^z\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n-1)}{(n-1)!}\,t^{n-1}\right)dt=\int_0^z\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f(r)}{r!}\,t^r\right)dt=$

$=\int_0^z f^e(t)\,dt.$

2.28. $F^e(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)\,\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n+1)}{(n+1)!}\,[(n+1)\,z^n]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n+1)}{(n+1)!}\times$

$\frac{dz^{n+1}}{dz}=\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n+1)}{(n+1)!}\,z^{n+1}+f(0)-f(0)\right]=\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k)}{k!}\,z^k-\frac{d}{dz}\,f(0)=$

$=\frac{d}{dz}\,f^e(z).$

2.29. $F^e(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nf(n)}{n!}\,z^n=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)}{n!}\,nz^{n-1}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)}{n!}\,\frac{dz^n}{dz}=$

$=z\,\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)}{n!}\,z^n\right)=z\,\frac{d}{dz}\,f^e(z).$

2.30. $F^e(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n f(n)}{n!}\,z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)}{n!}\,(\alpha z)^n=f^e(\alpha z).$

2.31. $F^e(z)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f(n-k)}{n!}\,z^n=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f(n-k)\,z^n}{(n-k)!\,(n-k+1)\,\ldots\,(n-1)\,n}=$

$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f(n-k)}{(n-k)}\int_0^z\int_0^z\ldots\int_0^z t^{n-k}\,dt=\int_0^z\ldots\int_0^z\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f(n-k)}{(n-k)!}\,t^{n-k}\right)dt=$

$=\int_0^z\ldots\int_0^z f^e(t)\,dt.$

2.32. $F^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1)-f(n)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1)}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} =$

$= \frac{d}{dz} f^e(z) - f^e(z).$

2.33. $F^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n} C_n^r \frac{f(n-r)\, g(r)}{n!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \left(\frac{f(n-r)}{(n-r)!} z^{n-r} \right) \times$

$\times \left(\frac{g(r)}{r!} z^r \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(k)}{k!} z^k = f^e(z)\, g^e(z).$

2.34. $F^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1, \ldots, k_m \geqslant 0} \left(\frac{f_1(k_1)}{k_1!} z^{k_1} \right) \ldots$

$\ldots \left(\frac{f_m(k_m)}{k_m!} z^{k_m} \right) = \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{f_1(k_1)}{k_1!} z^{k_1} \right) \ldots \left(\sum_{k_m=0}^{\infty} \frac{f_m(k_m)}{k_m!} z^{k_m} \right) =$

$= f_1^e(z) \ldots f_m^e(z).$

2.35. En el primer caso tenemos: para $|x| < 1$

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-n(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!} (-x)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k.$$

De este modo, $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$ es una función generatriz de las combinaciones con repetición ilimitada de los elementos y sin restricciones del número de apariciones de un elemento de cualquier tipo. Luego,

$$\frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{k+n} = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{r-n} x^r = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{n-1} x^r,$$

es decir, $\frac{x^n}{(1-x)^n} = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{n-1} x^r$ es la función generatriz de las combinaciones con repetición ilimitada de los elementos, siempre que exista una condición adicional de que en la combinación figura al menos un elemento de cada tipo.

2.36. Tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha^{hj}} A(\alpha^j z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha^{hj}} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{lj} a_l z^l = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l \sum_{j=1}^{n} \alpha^{(l-h)j}. \qquad (2.2')$$

Hagamos uso del resultado conocido consistente en que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha^{(l-h)j} = \begin{cases} n, & l \equiv k \pmod{n}, \\ 0, & l \not\equiv k \pmod{n}. \end{cases}$$

En este caso el segundo miembro de (2.2') se reducirá a la función generatriz $nA_k^{(n)}(z)$, lo que demuestra (2.2).

2.38. Por cuanto $C_{n+1}(z) = (1+z)^{n+1} = (1+z)\,C_n(z)$, la relación a) se deduce, por ejemplo, del resultado del problema 2.26 sobre la convolución de dos sucesiones. Las identidades b) y c) se deducen de (2.3), si ponemos $z = 1$ y $z = -1$, respectivamente. Con el fin de demostrar la identidad de Vandermonde, supongamos que $m = 1, \ldots, n-1$. Podemos escribir $(1+z)^n = (1+z)^{n-m}(1+z)^m$, y, entonces, d) se deduce de nuevo del problema 2.26 sobre la convolución.

Observemos que la relación recurrente a) representa un caso particular de d) para $m = 1$; d) es cierta de un modo trivial también para $m = 0$ y $m = n$, lo que puede verse con toda facilidad.

2.39. Pongamos $C(z) = (1 - x_1 z)(1 - x_2 z) \ldots (1 - x_h z)$. Por un lado,

$$C(z) = 1 + \sum_{m=1}^{h} \sigma_m(x_1, \ldots, x_h)(-z)^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sigma_m(x_1, \ldots, x_h) z^m.$$

Por otro lado,

$$-\ln C(z) = -\sum_{i=1}^{h} \ln(1 - x_i z) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(x_i z)^j}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_j(x_1, \ldots, x_h)}{j} z^j,$$

es decir,

$$C(z) = \exp\left\{ -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_j(x_1, \ldots, x_h)}{j} z^j \right\}.$$

Al comparar entre sí ambas expresiones obtenidas para $C(z)$, obtendremos (2.4).

2.40. El primer miembro de (2.5) es

$$(a_0(1) + a_1(1)\,x + \ldots + a_{h_1}(1)\,x^{h_1} + \ldots)(a_0(2) + a_1(2)\,x^2 + \ldots$$

$$\ldots + a_{h_2}(2)\,x^{2h_2} + \ldots) \ldots (a_0(n) + a_1(n)\,x^n + \ldots + a_{h_n}(n)\,x^{nh_n} + \ldots) \ldots$$

Hallemos los coeficientes de las potencias diferentes de x en este producto. Está claro que el término independiente es igual a $\prod_{j=1}^{\infty} a_0(j)$.

Con el fin de obtener el coeficiente de x^n, donde $n > 0$, tomemos el k_1-ésimo término en el 1er factor, el k_2-ésimo término en el 2º, etc., y por fin, el k_n-ésimo término en el n-ésimo factor; en este caso los números $k_1, k_2, \ldots, k_n$ han de satisfacer la relación $n = k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n$, es decir, definir la

partición del número n. De aquí encontramos que el coeficiente de x^n, $n > 0$, en el segundo miembro de (2.5) es igual a

$$\prod_{m=n+1}^{\infty} a_0(m) \sum_{\pi(n)} a_{k_1}(1)\, a_{k_2}(2) \ldots a_{k_n}(n),$$

y la relación (2.5) queda demostrada.

2.41. Poniendo en el problema 2.40 para cada $j = 1, 2, \ldots$ todos los $a_k(j)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ iguales a 1, en virtud de (2.5) obtendremos:

$$\prod_{j=1}^{\infty} A_j(x^j) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + x^j + x^{2j} + \ldots + x^{kj} + \ldots) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = p(x).$$

Por otra parte,

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + x^j + \ldots + x^{kj} + \ldots) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - x^j)^{-1},$$

lo que demuestra la relación (2.6).

2.42. Pongamos en el problema 2.40 para cada $j = 1, 2, \ldots, a_k(j) = y^k$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Entonces, en virtud de (2.5), tendremos

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + yx^j + y^2x^{2j} + \ldots + y^k x^{kj} + \ldots) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} y^{k(\pi)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n} y^k \sum_{\pi(n)} 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{nk} y^k.$$

Por otra parte, este producto es igual a $\prod_{j=1}^{\infty} (1 - yx^j)^{-1}$, lo que demuestra la relación (2.7).

2.43. Supongamos que en el problema 2.40 $a_k(j) = y_j^k$, $j = 1, 2, \ldots$; $k = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces, por una parte, en virtud de (2.5)

$$\prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{\infty} y_j^k x^{kj} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots y_n^{k_n};$$

por otra parte,

$$\prod_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} y_j^k x^{kj} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - y_j x^j)^{-1}.$$

Al igualar los segundos miembros de las relaciones escritas, obtenemos (2.8).

2.44. Tenemos

$$\exp\left\{\frac{xy}{1-x}\right\} = \exp\left\{xy \sum_{j=0}^{\infty} x^j\right\} = \exp\left\{y \sum_{j=1}^{\infty} x^j\right\} =$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty} \exp\{yx^j\} = \prod_{j=1}^{\infty} \left\{\sum_{k=0}^{\infty} y^k \frac{x^{jk}}{k!}\right\}.$$

Al suponer en el problema 2.40 $a_h(j) = y^h/(k!)$, $j = 1, 2, \ldots$; $k = 0, 1, 2, \ldots$, obtenemos, empleando la fórmula (2.5):

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} y^k \frac{x^{kj}}{k!}\right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} \frac{y^{k_1+\ldots+k_n}}{k_1!\, k_2!\, \ldots\, k_n!},$$

lo que precisamente demuestra (2.9).

2.45. Tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} L(\pi) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} a_i k_i\right).$$

Examinemos el i-ésimo término de la suma respecto de i del segundo miembro. Haciendo uso de la relación (2.5), en la cual $a_h(j) = a_j(k)$, si $j = i$: $a_k(j) = 1$, si $i \neq j$, de suerte que

$$A_i(x^i) = a_i \sum_{k=0}^{\infty} k x^{ik}, \qquad A_j(x^j) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{jk} = \frac{1}{1-x_j}, \quad j \neq i,$$

obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} a_i k_i = \prod_{j=1}^{\infty} A_j(x^j) = \left(a_i \sum_{k=0}^{\infty} k x^{ik}\right) \prod_{j\neq i} \frac{1}{1-x^j}.$$

Pero $\sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$, de modo que $\sum_{k=0}^{\infty} k x^{ik} = \frac{x^i}{(1-x^i)^2}$. Ahora, teniendo presente (2.6), encontramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} a_i k_i = \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j}\right)(1-x^i)\frac{a_i x^i}{(1-x^i)^2} = \frac{a_i x^i}{1-x^i}\, p(x).$$

De aquí se deduce el resultado requerido.

2.46. Hagamos uso de los resultados del problema 2.44. Veamos el primer miembro de la igualdad (2.9). Tomando en consideración el resultado del problema 2.35, tenemos

$$\exp\{xy(1-x)^{-1}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{xy}{1-x}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k y^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j-1}{j} x^j =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n} \frac{y^k}{k!} \binom{n-1}{k-1}.$$

Comparando los coeficientes de x^n en la última expresión y en el segundo miembro de (2.9), obtenemos el resultado necesario.

2.47. Desarrollemos la suma $\sum = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{x^j}{1-x^j}$ en una serie de potencias de x y obtengamos $\sum = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sum_{k=1}^{\infty} x^{kj}$. Cambiemos ahora el orden de la

sumación. Con este fin observemos que el producto kj recorre todos los valores naturales de 1 a ∞ y es igual a n, si j recorre toda clase de divisores n. Por eso,

$$\sum = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{j \mid n} a_j.$$

Así pues, podemos reescribir (2.10) en la forma

$$\sum_{n=1} x^n \sum_{\pi(n)} L(\pi) = p(x) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{j \mid n} a_j,$$

de donde, según la definición de $p(x)$ (véase problema 2.41), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} L(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{u+v=n} p_u \sum_{d \mid v} a_d.$$

Al comparar los coeficientes de x^n en el primer miembro y en el segundo miembro de la última relación, obtenemos (2.12).

2.48. Pongamos en (2.12) $a_l = l$ ($l = 1, 2, \ldots$). Entonces $L(\pi) = k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n$ y (2.12) toma la forma

$$\sum_{\pi(n)} n = \sum_{u+v=n} p_u \sum_{d \mid v} d,$$

lo que demuestra el resultado requerido.

2.49. Se desprende inmediatamente del resultado del problema 2.47, si ponemos $a_1 = a_2 = \ldots = 1$. Entonces $L(\pi) = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

2.50. Multipliquemos ambos miembros de la fórmula (2.13) por x^{n-1} y sumemos respecto de n desde 1 hasta ∞. Tendremos como resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{h=0}^{n-1} p_h \sigma_{n-h}.$$

El primer miembro de esta igualdad es $p'(x)$, mientras que el segundo es igual a $p(x)\,\sigma(x)$. De aquí se deduce a). Luego, de a) hallamos $p'(x)/p(x) = \sigma(x)$, de donde

$$\ln p(x) = \int_0^x \frac{p'(u)}{p(u)}\,du = \int_0^x \sigma(u)\,du = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n u^{n-1} \right) du = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^n \frac{x^n}{n},$$

de suerte que $p(x) = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \frac{x^n}{n} \right\}$ y la relación b) queda demostrada.

La representación de c) para $p(x)$ se desprende de la forma de la función generatriz para los polinomios $C_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. En fin, la identidad d) se obtiene, si igualamos los coeficientes de potencias iguales de x^n en la representación c) para $p(x)$.

2.51. Supongamos que la relación (2.14) se cumple. En tal caso, al diferenciar respecto de x los miembros primero y segundo en (2.14), obtendremos $F'(x) = \exp\{E(x)\}\,E'(x) = E'(x)\,F(x)$.

Al igualar los coeficientes de x^n, $n \geqslant 0$, en los miembros primero y segundo, nos convencemos de que la igualdad (2.15) es válida. Viceversa, si tienen lugar

las igualdades (2.15), entonces, al multiplicar sus miembros primero y segundo por $\frac{1}{n!}x^n$ y al sumar respecto de n desde 0 hasta ∞, obtendremos

$$F'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!\,(n-j)!}a_{j+1}b_{n-j}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(a_{j+1}\frac{x^j}{j!}\right)\left(b_{n-j}\frac{x^{n-j}}{(n-j)!}\right)=E'(x)\,F(x);$$

de aquí obtenemos la ecuación diferencial para $F(x)$: $dF(x)/F(x)=E'(x)\,dx$. Al resolverla, obtenemos $F(x)=E(x)+C$, de modo que $F(x)=e^{E(x)+C}$.

Para hallar la constante C, pongamos $x=0$ y, considerando que $F(0)=b_0=1$ y $E(0)=a_0=0$, encontramos $e^C=1$, es decir, $C=0$. De aquí se deduce (2.14).

§ 2. Números especiales y funciones especiales

2.52. El subconjunto $M_1\subset M$ puede ser elegido empleando $\binom{n}{r_1}$ procedimientos, luego, $M_2\subset M\setminus M_1$ puede ser definido empleando $\binom{n-r_1}{r_2}$ métodos, etc., por fin, para definir $M_k\subset M\setminus(M_1\cup\ldots\cup M_{k-1})$ nos restan $\binom{n-r_1-r_2-\ldots-r_{k-1}}{r_k}=\binom{r_k}{r_k}=1$ posibilidades. Por eso

$$\sigma(r_1,r_2,\ldots,r_k)=\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\ldots\binom{n-r_1-\ldots-r_{k-1}}{r_k}=$$

$$=\frac{n!}{r_1!\,(n-r_1)!}\,\frac{(n-r_1)!}{r_2!\,(n-r_1-r_2)!}\ldots\frac{(n-r_1-r_2-\ldots-r_{k-1})!}{r_k!\,(n-r_1-\ldots-r_k)!}=$$

$$=\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!\,0!}=\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!},$$

lo que se trataba de demostrar.

2.53. La solución se desprende automáticamente de la afirmación del problema 2.52.

2.54. Cada partición del n-conjunto engendra cierta familia de permutaciones (sustituciones) de n símbolos. En efecto, si $\{x_1,\ldots,x_k\}$ es una de las partes de la partición, entonces a base de los símbolos $x_1,\ldots,x_k$ pueden formarse $(k-1)!$ ciclos, ordenando de diferentes maneras dichos símbolos. Por eso, de cada partición del n-conjunto, que tiene k_i partes de dimensión i ($i=1,2,\ldots,n$) pueden formarse $(0!)^{k_1}(1!)^{k_2}(2!)^{k_3}\ldots[(n-1)!]^{k_n}$ permutaciones distintas que tienen k_i ciclos de longitud i. Al multiplicar $B_n(k_1,\ldots,k_n)$ por este producto, obtendremos a). La fórmula b) se deduce ahora de a) y del problema 2.53.

2.55. Supongamos que el conjunto M se compone de los elementos $a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}$. Veamos cualquier partición S y admitamos que un subconjunto que contiene a_{n+1} incluye también k otros elementos, $0\leqslant k\leqslant n$. Si k es fijo, el número de tales particiones es igual a $\binom{n}{k}B_{n-k}$. En efecto, los citados k elementos pueden elegirse del conjunto $\{a_1,\ldots,a_n\}$ empleando $\binom{n}{k}$ métodos.

mientras que el conjunto de $n - k$ elementos restantes admite B_{n-k} particiones en clases disjuntas. Cuando $k = n$, no queda ningún elemento, mas el acuerdo (coordinación) $B_0 = 1$ incluye este caso también. Al sumar los números $\binom{n}{k} B_{n-k}$ respecto de k, obtenemos el resultado requerido.

2.56. Toda clase de particiones del n-conjunto M pueden ser ordenadas, prefijando diferentes particiones del número n, las cuales determinan la composición de los conjuntos que integran la partición M. Toda partición del número n se determina por el juego $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ de números enteros no negativos que satisfacen la relación $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$, donde k_s es la cantidad de partes, iguales a S, en la partición del número n ($s = 1, \ldots, n$). Para cada una de tales particiones n, el número de particiones del conjunto M que contienen k_s s-subconjuntos es igual a $B_n(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ (véase el problema 2.53).

2.57. a) Tenemos

$$\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n!}\right\} = \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left\{y_n \frac{z^n}{n!}\right\} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_j^k}{k!\,(j!)^k} z^{jk}\right) = \prod_{j=1} A_j(z^j),$$

donde

$$A_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(j)\, z^k, \qquad a_k(j) = \frac{y_j^k}{k!\,(j!)^k}.$$

Con ayuda de (2.5) obtenemos

$$\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{\pi(n)} \prod_{j=1}^{n} \frac{y_j^{k_j}}{k_j!\,(j!)^{k_j}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{\pi(n)} B_n(k_1, \ldots, k_n)\, y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n},$$

lo que demuestra la relación (2.18).

Un caso particular de la relación (2.18) es el resultado del problema 2.57, b). En efecto, suponiendo $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \ldots = 1$ en la fórmula (2.18) y tomando en consideración (2.17), demostramos la fórmula (2.19).

b) Demos a conocer la demostración directa de la fórmula (2.19) que emplea los resultados del problema 2.56. De ésta obtenemos

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\sum_{s_1 + 2s_2 + \ldots + ns_n = n} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} (k!)^{s_k} s_k!}\right].$$

Mostremos que el segundo miembro de esta expresión es igual a

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s_k=0}^{\infty} \frac{1}{s_k!} \left(\frac{x^k}{k!}\right)^{s_k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} e^{x^k/k!} = e^{e^x - 1},$$

de donde se deducirá la fórmula (2.19). Mas, el hecho de que el segundo miembro de la primera expresión es igual al primer miembro de la segunda se demuestra empleando los resultados del problema 2.40.

2.58. Tenemos

$$C_n(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} B_n(k_1, \ldots, k_n)(0!\,y_1)^{k_1} \ldots$$

$$\ldots ((n-1)!\,y_n)^{k_n} = \varphi_n(0!\,y_1, 1!\,y_2, \ldots, (n-1)!\,y_n).$$

Por consiguiente, de acuerdo con (2.18),

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y_1, \ldots, y_n)\frac{z^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(0!\,y_1, 1!\,y_2, \ldots, (n-1)!\,y_n)\frac{z^n}{n!} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)!\,y_n]\frac{z^n}{n!}\right\} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n}\right\},$$

y la relación (2.21) queda demostrada.

2.59. De acuerdo con (2.18) tenemos

$$\exp\left\{x\sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!}\right\} = \exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty} (xy_i)\frac{z^i}{i!}\right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(xy_1, \ldots, xy_n)\frac{z^n}{n!},$$

donde, según la definición del polinomio de Bell,

$$Y_n(xy_1, \ldots, xy_n) = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} B_n(k_1, \ldots, k_n)(xy_1)^{k_1} \ldots (xy_n)^{k_n} =$$

$$= \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} x^{k_1+\ldots+k_n} B_n(k_1, \ldots, k_n)\, y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x^k \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=k \\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}} B_n(k_1, \ldots, k_n)\, y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n)\, x^k.$$

De aquí se deduce (2.23). Suponiendo en la última relación $x = 1$, obtenemos (2.24). Luego, de (2.23) llegamos a que por un lado

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n)\, x^k \frac{z^n}{n!} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sum_{n=k}^{\infty} Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n)\frac{z^n}{n!};$$

por otro lado,

$$\exp\left\{x\sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!}\right]^k \frac{x^k}{k!},$$

de donde se deduce (2.25).

2.60. a) Esta relación recurrente es un corolario de los resultados de los problemas 2.56 y 2.57.

b) Directamente de la definición de los polinomios $Y_n(y_1, \ldots, y_n)$ (véase (2.17)) obtenemos

$$Y_n(Cy_1, \ldots, C^n y_n) = \sum_{\pi(n)} B_k(k_1, \ldots, k_n)(Cy_1)^{h_1} \ldots (C^n y_n)^{h_n} =$$

$$= \sum_{\pi(n)} C^{h_1+2h_2+\ldots+nh_n} B(k_1, \ldots, k_n) y_1^{h_1} \ldots y_n^{h_n} =$$

$$= C^n \sum_{\pi(n)} B_k(k_1, \ldots, k_n) y^{h_1} \ldots y_n^{h_n} = C^n Y_n(y_1, \ldots, y_n),$$

y b) queda demostrada.

c) Al diferenciar los miembros primero y segundo de la relación (2.18) respecto de y_j, encontramos

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} Y_n(y_1, \ldots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \exp\{f(z)\} \frac{\partial}{\partial y_l} f(z),$$

donde

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \frac{z^n}{n!}, \qquad \frac{\partial}{\partial y_j} f(z) = \frac{z^j}{j!}.$$

Teniendo en cuenta (2.18), concluimos de aquí que

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} Y_n(y_1, \ldots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y_1, \ldots, y_n) \frac{z^n}{n!}\right) \frac{z^j}{j!}.$$

Igualando los coeficientes de z^n en los miembros primero y segundo de la última expresión, vemos que

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial y_j} Y_n(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{j!\,(n-j)!} Y_{n-j}(y_1, \ldots, y_{n-j}),$$

y c_1) queda demostrada. Como consecuencia, queda demostrada también c_2) para $r = 1$. Cuando $r > 1$, c_2) se demuestra por aplicación reiterada de la operación de diferenciación. En efecto, al diferenciar r veces los miembros primero y segundo de (2.18) respecto de y_j, obtenemos por analogía con lo anterior

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{\partial^r}{\partial y_j^r} Y_n(y_1, \ldots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y_1, \ldots, y_n)\right) \frac{z^{jr}}{(j!)^r},$$

de donde se desprenden las relaciones c_2) y c_3).

d) Con ayuda de (2.18) encontramos

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) \frac{z^n}{n!} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (y_n + x_n) \frac{z^n}{n!}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n!}\right\} \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{z^n}{n!}\right\} =$$

$$= \left(1 + \sum_{h=1}^{\infty} Y_h(y_1, \ldots, y_h) \frac{z^h}{h!}\right) \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} Y_l(x_1, \ldots, x_l) \frac{z^l}{l!}\right).$$

Igualando los coeficientes de $z^n/n!$, obtenemos de aquí

$$\frac{1}{n!} Y_n (y_1 + x_1, \ldots, x_n + y_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Y_k (y_1, \ldots, y_k)\, Y_{n-k} (x_1, \ldots, x_{n-k})}{k!\,(n-k)!},$$

de donde se deduce precisamente *d*).

e) En virtud de c_1), tenemos, evidentemente:

$$\left(y_1 + \sum_{s=1}^{n} y_{s+1} \frac{\partial}{\partial y_s}\right) Y_n = y_1 Y_n + \sum_{s=1}^{\infty} y_{s+1} \frac{\partial}{\partial y_s} Y_n = y_1 Y_n +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} y_{s+1} Y_{n-s} (y_1, \ldots, y_{n-s}) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} y_{s+1} Y_{n-s} (y_1 \ldots y_{n-s}),$$

lo que, de acuerdo con a), es igual a Y_{n+s}, y e) está demostrada.

2.61. Las relaciones para los coeficientes de la función generatriz $B_H(x)$ se deducen inmediatamente de los resultados del problema 2.57, si ponemos en él $y_j = 1$ para $j \in H$ e $y_j = 0$ para $j \notin H$. El sentido combinatorio de los números $B_n(H)$ se pone de manifiesto por analogía con el problema 2.56 para los números de Bell B_n.

2.62. a) La afirmación está clara: las relaciones $S(n, 1) = 1$, $S(n, n) = 1$ se comprueban de un modo directo, y la relación $\sum_{k=0}^{n} S(n, k) = B_n$ se deduce de la definición del número de Bell (problema 2.55) y de los números de Stirling de 2º género.

b) Analicemos los conjuntos $\mu_{n-1} = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ y $\mu_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Cualesquiera particiones de μ_n en k partes pueden obtenerse de las particiones de μ_{n-1} en k y $k-1$ partes agregando a μ_{n-1} el elemento x_n. Si está dada la partición de μ_{n-1} en k partes, el elemento x_n puede formar parte de uno de los conjuntos que constituyen dicha partición, lo que nos dará como resultado k diferentes particiones de μ_n en k partes. Si, en cambio, está dada una partición de μ_{n-1} en $k-1$ partes, entonces, al agregar x_n, se debe formar un subconjunto que se componga de un solo elemento x_n y esto nos dará una partición más de μ_n en k partes, diferentes de las antecedentes. Estos razonamientos demuestran precisamente b). La condición inicial no exige explicaciones.

c) Ordenemos toda clase de particiones del n-conjunto μ en k partes. Con este fin prefijemos k números enteros positivos r_i de tal índole que $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$, y examinemos diferentes $(r_1, \ldots, r_k)$-particiones del conjunto μ. El número de tales particiones se determina por la fórmula del problema 2.52. Por cuanto en cada partición de este tipo el orden del conjunto no tiene importancia alguna, obtenemos

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{r_1 + \ldots + r_k = n} \sigma(r_1, \ldots, r_k) = \frac{1}{k!} \sum_{r_1 + \ldots + r_k = n} \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!},$$

lo que demuestra c).

d) La demostración es análoga a la de la representación del problema 2.56 para el número de Bell.

e) Suponiendo en la relación b) $k = n - 1$, obtenemos

$$S(n, n-1) = (n-1)\, S(n-1, n-1) + S(n-1, n-2) =$$
$$= n - 1 + S(n-1, n-2) =$$
$$= (n-1) + (n-2) + S(n-2, n-3) =$$
$$= (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

A continuación, tenemos

$$S(n,\ n-2)=(n-2)\,S(n-1,\ n-2)+S(n-1,\ n-3)=$$

$$=(n-2)\binom{n-1}{2}+S(n-1,\ n-3)=(n-2)\binom{n-1}{2}+(n-3)\binom{n-2}{2}+$$

$$+S(n-2,\ n-4)=(n-2)\binom{n-1}{2}+(n-3)\binom{n-2}{2}+\ldots$$

$$\ldots+(n-(n-1))\binom{n(n-2)}{2}=\sum_{i=1}^{n-2}(n-i-1)\binom{n-i}{2}.$$

2.63. Multiplicando los miembros primero y segundo de la relación b) del problema 2.62 por y^k y sumando respecto de k, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n}S(n,\ k)\,y^k=\sum_{k=0}^{n}kS(n-1,\ k)\,y^k+\sum_{k=1}^{n}S(n-1,\ k-1)\,y^k=$$

$$=y\left[\sum_{k=1}^{n}kS(n-1,\ k)\,y^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}S(n-1,\ k-1)\,y^{k-1}\right]$$

o bien, lo que es lo mismo, $P_n(y)=y\,[dP_{n-1}(y)/dy+P_{n-1}(y)]$, y (2.30) queda demostrada. La equivalencia de las relaciones (2.30) y (2.31) se deduce de que

$$e^y\neq 0,\quad \frac{d}{dy}\left(e^yP_{n-1}(y)\right)=e^y\frac{d}{dy}P_{n-1}(y)+e^yP_{n-1}(y).$$

2.64. Observemos que de la definición de polinomios de Bell se desprende que, cuando $n\geqslant 1$, en virtud del problema 2.62 d) tenemos:

$$Y_n(y,\ \ldots,\ y)=\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}B_n(k_1,\ \ldots,\ k_n)\,y^{k_1+\ldots+k_n}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}y^k\sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n\\ k_1+k_2+\ldots+k_n=k}}B_n(k_1,\ \ldots,\ k_n)=\sum_{k=1}S(n,\ k)\,y^k=P_n(y).$$

Por eso, al poner en los miembros primero y segundo de (2.18) $y_1=y_2=\ldots$ $\ldots=y_n=y$, obtendremos

$$1+\sum_{n=1}P_n(y)\frac{x^n}{n!}=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}y\frac{x^n}{n!}\right\}=\exp\left[y\left(e^x-1\right)\right],$$

lo que se trataba de demostrar.

2.65. Por un lado, según la definición de función generatriz, tenemos

$$S(x,\ y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}S(m,\ k)\,y^k\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n!}S(n,\ k)\,x^n\right]y^k.$$

Por otro lado, de conformidad con (2.32), encontramos

$$S(x,\ y)=\sum_{k=0}\frac{1}{k!}\left(e^x-1\right)^k\,y^k.$$

Comparando los coeficientes de y^k en ambas expresiones obtenidas, llegamos a (2.34).

2.66. De (2.34) obtenemos

$$\frac{d}{dx}\,Y_k(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{k!}\,(e^x-1)^k\right]=\frac{1}{(k-1)!}\,(e^x-1)^{k-1}\,e^x=$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\,(e^x-1)^{k-1}\,(e^x-1+1)=$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\,(e^x-1)^k+\frac{1}{(k-1)!}\,(e^x-1)^{k-1}=kY_k(x)+Y_{k-1}(x),$$

lo que se trataba de demostrar.

2.67. Como se ha mostrado en el problema 2.66,

$$dY_k(x)/dx=(e^x-1)^{k-1}\,e^x/(k-1)!=e^xY_{k-1}(x).$$

El coeficiente de x^n en el primer miembro de esta relación es igual a $S(n+1,\ k)/n!$ y en el segundo miembro, a

$$\sum_{i+j=n,\ i,\ j\geqslant 0}\frac{n!}{i!\,j!}\,S(j,\ k-1).$$

Igualando las expresiones obtenidas, obtendremos la relación (2.36). Observemos que la resolución de este problema se realiza con facilidad empleando el mismo método que en el problema 2.62.

2.68. Por definición de los polinomios $P_n(x)$ (problema 2.63) tenemos

$$P_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{n+1}S(n+1,\ k)\,x^k=x\sum_{k=0}^{n}S(n+1,\ k+1)\,x^k.$$

Haciendo uso de la identidad (2.36), obtenemos de aquí

$$P_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k\left[\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}S(l,\ k)\right]=$$

$$=x\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left[\sum_{k=0}^{n}S(l,\ k)\,x^k\right]=x\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}P_l(x),$$

y (2.37) queda demostrada.

Ahora, de conformidad con la relación (2.30), tenemos $x\,dP_n(x)/dx=P_{n+1}(x)-xP_n(x)$. Haciendo uso de (2.37), encontramos de aquí

$$x\frac{d}{dx}\,P_n(x)=x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_k(x)-xP_n(x)=x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}P_k(x),$$

lo que demuestra (2.38).

2.69. Con ayuda de la función generatriz para los polinomios de Stirling (problema 2.64) encontramos

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}P_n(y)\,\frac{x^n}{n!}=e^{-y}e^{ye^x}=e^{-y}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}\,e^{kx}=$$

$$=e^{-y}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^nx^n}{n!}=e^{-y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}k^n\,\frac{y^k}{k!}.$$

Al comparar los coeficientes de iguales potencias de x en los miembros primero y último de la cadena de igualdades escrita, obtenemos (2.39). Suponiendo en (2.39) $y = 1$ y teniendo en cuenta que $P_n(1) = B_n$, obtenemos (2.40).

2.70. De acuerdo con (2.31),

$$e^x P_{n+1}(x) = x d[e^x P_n(x)]/dx.$$

Haciendo uso de la identidad (2.39), obtenemos de aquí

$$e^x P_{n+1}(x) = x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{x^k}{k!} = x \sum_{k=1}^{\infty} k^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = x \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^n \frac{x^s}{s!},$$

y (2.41) queda demostrada; (2.42) se desprende de (2.41), teniendo en cuenta que cuando $x = 1$, $P_{n+1}(1) = B_{n+1}$.

2.71. Haciendo uso del problema 2.62, b), podemos escribir

$$S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k, k) z^n = \sum_{k=0}^{\infty} [kS(n+k-1, k) + S(n+k-1, k-1)] z^n =$$

$$= k \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k-1, k) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k-1, k-1) z^n =$$

$$= kz \sum_{n=1}^{\infty} S(n+k, k) z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k-1, k-1) z^n,$$

puesto que $S(k-1, k) = 0$. De aquí obtenemos

$$S_k(z) = kzS_k(z) + S_{k-1}(z),$$

de donde se deduce (2.44). La aplicación reiterada de la relación (2.44) conduce a (2.45).

2.72. De (2.43) y (2.45) encontramos

$$\sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) z^n = \frac{z^k}{(1-z)(1-2z) \ldots (1-zk)} = u_k(z).$$

Al poner aquí $z = 1/t$, obtendremos

$$u_k(1/t) = t/(t(t-1) \ldots (t-k))$$

y el desarrollo en fracciones simples nos da

$$u_k\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{(-1)^k}{k!} t \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(-1)^i \binom{k}{i}}{t-i}.$$

Al poner otra vez $z = 1/t$, tendremos

$$u_k(z) = \frac{(-1)^k}{z!} \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(-1)^i \binom{k}{i}}{1-iz} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n.$$

El coeficiente de z^n en la última expresión es igual a

$$S(n, k) = (-1)^k \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k}{i} i^n = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i^n,$$

y la representación (2.47) para los números de Stirling de 2º género queda demostrada. La fórmula (2.46) se obtiene de (2.47) por sustitución de la variable de sumación.

2.73. La función generatriz $u_k(z)$ del problema 2.72 puede reescribirse en la forma

$$u_k(z) = z^k (1 + z + z^2 + \ldots)(1 + 2z + 2^2z^2 + \ldots) \ldots \\ \ldots (1 + kz + k^2z^2 + \ldots),$$

de donde viene la afirmación del problema, puesto que

$$(1+z+z^2+\ldots)(1+2z+2^2z^2+\ldots) \ldots (1+kz+k^2z^2+\ldots) = \\ = \sum_{n=k}^{\infty} z^{n-k} \sum_{l_1+l_2+\ldots+l_k=n-k} 1^{l_1} 2^{l_2} \ldots k^{l_k},$$

$$\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_k=n-k} 1^{l_1} 2^{l_2} \ldots k^{l_k} = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{n-k}=k} i_1 i_2 \ldots i_{n-k}.$$

2.74. 1) Por definición inicial de los números de Stirling de 2º género tomemos al principio la definición citada en el problema 2.62. En tal caso tendremos

$$e^{tx} = [1+(e^t-1)]^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(x-1) \ldots (x-k+1)}{k!} (e^t-1)^k,$$

o bien, de acuerdo con el problema 2.65 (fórmula (2.34)),

$$e^{tx} = \sum_{k=0}^{\infty} x(x-1) \ldots (x-k+1) Y_k(t) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} x(x-1) \ldots (x-k+1) \sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) \frac{t^n}{n!}.$$

Hallemos e igualemos entre sí los coeficientes de t^n en los miembros primero y segundo de esta relación. Obtendremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} x(x-1) \ldots (x-k+1) S(n, k),$$

de donde se desprende (2.49).

2) Ahora por definición inicial de los números de Stirling de 2º género tomemos la relación (2.49). Pongamos, para mayor comodidad, $S(0, 0) = 1$ y $S(0, k) = 0$, si $k \neq 0$.

Por cuanto $x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \ldots (x-k+1)$, entonces para $n > 1$ hallamos a partir de (2.49)

$$x^n = x x^{n-1} = x \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \ldots (x-k+1) = \\ = (x-k+k) \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \ldots (x-k+1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,\ k)\, x(x-1)\ \ldots\ (x-k)+k\sum_{k=1}^{n-1} S(n-1,\ k)\, x(x-1)\ \ldots$$

$$\ldots\ (x-k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}[S(n-1,\ k-1)+kS(n-1,\ k)]\, x(x-1)\ \ldots\ (x-k+1).$$

Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,\ k)\, x(x-1)\ \ldots\ (x-k+1)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}[S(n-1,\ k-1)+kS(n-1,\ k)]\, x(x-1)\ \ldots\ (x-k+1).$$

De aquí se deduce que para $n > 1$, $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$. Cuando $n = 1$, de (2.49) hallamos inmediatamente que $S(1, 1) = 1$. Para cualquier $n > 0$ todos los números $S(n, k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ se definen unívocamente por sus condiciones iniciales. Pero, con arreglo al problema 2.62, los números de Stirling de 2º género se definen por la relación recurrente del problema 2.62, *b*), la cual coincide con las condiciones iniciales análogas escritas más arriba. Por consiguiente, la relación (2.49) define los números que coinciden por completo con los números de Stirling de 2º género.

2.75. De conformidad con (2.19) obtenemos

$$e^{e^z+e^{-z}-2}=e^{e^z-1}e^{e^{-z}-1}=B(z)\,B(-z)=$$

$$=\left(\sum_{h=0}^{\infty} B_h\frac{z^h}{h!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l B_l\frac{z^l}{l!}\right).$$

De aquí, con arreglo al problema 2.26, encontramos

$$e^{e^z+e^{-z}-2}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n\sum_{\substack{h,\ l\geqslant 0\\ h+l=n}}(-1)^l B_h B_l\frac{1}{h!\,l!},$$

de donde se deduce el resultado que se demuestra.

2.76. Estudiemos las permutaciones de n símbolos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ con k ciclos respecto a la posición del elemento x_n, el cual o bien forma o bien no forma el ciclo unidad. Si x_n forma en la permutación el ciclo unidad, a dicha permutación se le puede poner en correspondencia una permutación de $n-1$ elementos $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ con $k-1$ ciclos. El número de estas permutaciones es igual a $C(n-1, k-1)$. Si x_n no integra el ciclo unidad, el número de permutaciones buscadas será igual al número de métodos, con ayuda de los cuales el elemento x_n puede ser incluido en las permutaciones de $n-1$ símbolos (con k ciclos cada una de ellas) sin que se forme un ciclo nuevo. Este número es igual a $n-1$, puesto que en cada ciclo de longitud r se tienen exactamente r diferentes posibilidades de incluir x_n y, según la suposición, la suma de longitudes de los ciclos es igual a $n-1$. De estos razonamientos se deduce (2.51); (2.52) se deduce de (2.51) y de la conexión de los números $s(n, k)$ y $C(n, k)$.

2.77. Al multiplicar ambos miembros de (2.51) por x^k y al sumar respecto de k desde 0 hasta n, obtendremos

$$C_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C(n-1,\ k-1)\,x^k+(n-1)\sum_{k=0}^{n} C(n-1,\ k)\,x^k=$$

$$=x\sum_{k=1}^{n} C(n-1,\ k-1)\,x^{k-1}+(n-1)\sum_{k=0}^{n} C(n-1,\ k)\,x^k=$$

$$=xC_{n-1}(x)+(n-1)\,C_{n-1}(x)=(x+n-1)C_{n-1}(x).$$

De aquí (2.53) proviene por inducción.

La fórmula (2.53) puede demostrarse también del modo siguiente. Es evidente que $C_n(x) = C_n(x, x, \ldots, x)$, donde $C_n(x, \ldots, x)$ se definen en el problema 2.58. Por consiguiente, de (2.21) hallamos

$$1 + \sum C_n(x) \frac{z^n}{n!} = \exp\left\{x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right\} = \exp\{-x \ln(1-z)\} =$$

$$= (1-z)^{-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x(x+1) \ldots (x+n-1) \frac{z^n}{n!},$$

de donde proviene (2.53).

2.78. En el problema 2.77 se ha mostrado que

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) x^k = x(x+1) \ldots (x+n-1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Teniendo presente que $C(n, k) = (-1)^{n+k} s(n, k)$ (véase problema 2.76), obtenemos (2.54).

2.79. El hecho de que los números $(-1)^{n+k} s(n, k)$ son positivos se desprende de que $(-1)^{n+k} s(n, k) = C(n, k)$, donde $C(n, k) \geqslant 0$ por definición (véase el problema 2.76). La representación (2.55) se desprende directamente de (2.53).

2.80. Multipliquemos ambos miembros de (2.52) por $x^{n-1}/(n-1)!$ y, al sumar respecto de n desde 1 hasta ∞, obtendremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} s(n, k) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} s(n-1, k-1) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) s(n-1, k) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

es decir, $dy_k(x)/dx = y_{k-1}(x) - x\,dy_k(x)/dx$, de donde se deduce (2.56). La relación (2.57) se demuestra con facilidad por inducción. En efecto, por cuanto $y_0(x) \equiv 1$, entonces para $k = 0$ (2.57) es válida. Supongamos, ahora, que (2.57) se cumple para $k-1$, y comprobémosla para k. De (2.56) obtenemos

$$(1+x)\, dy_k(x)/dx = [\ln(1+x)]^{k-1}/(k-1)!$$

o bien, lo que es lo mismo,

$$y_k(x) = \int_0^x \frac{1}{(k-1)!} \frac{[\ln(1+u)]^{k-1}}{1+u} du = \frac{1}{k!} [\ln(1+x)]^k.$$

lo que se trataba de demostrar.

2.81. Tenemos

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x-1) \ldots (x-n+1)}{n!} t^n.$$

De aquí obtenemos, en virtud de (2.54):

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, x^k \right) \frac{t^n}{n!} = s(t, x),$$

lo que se trataba de demostrar.

2.82. De acuerdo con el problema 2.80, tenemos

$$\sum_{n=0} s(n+1, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{d}{dx}\, y_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} [\ln(1+x)]^{k-1} \frac{1}{x+1}$$

o bien

$$\sum_{n=0}^{\infty} s(n+1, k) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} s(n, k-1) \frac{x^k}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^j s(n-j, k-1) \frac{1}{(n-j)!}.$$

Al igualar los coeficientes de x^n en los miembros primero y segundo de esta expresión, obtenemos

$$s(n+1, k) = n! \sum_{j=0}^{n} (-1)^j s(n-j, k-1) \frac{1}{(n-j)!},$$

lo que es equivalente a (2.58).

2.83. De (2.49) y (2.54) hallamos

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)\, x(x-1) \ldots (x-k+1) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k) \sum_{m=1}^{k} s(k, m)\, x^m =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \left[\sum_{k=m}^{n} S(n, k)\, s(k, m) \right] x^m,$$

de donde se deduce (2.59) para $1 \leqslant m \leqslant n$. Pero (2.59) se verifica también para cualesquiera otros valores de m, puesto que ambos miembros de (2.59) en este caso son nulos.

Demostremos (2.60) procediendo en el orden inverso. En efecto,

$$x(x-1) \ldots (x-n+1) = \sum_{\nu=1}^{n} s(n, \nu)\, x^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} s(n, \nu) \sum_{m=0}^{\nu} S(\nu, m)\, x(x-1) \ldots (x-m+1) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} x(x-1) \ldots (x-m+1) \sum_{\nu=m}^{n} s(n, \nu)\, S(\nu, m).$$

Al comparar los coeficientes de $x(x-1) \ldots (x-m+1)$ a la izquierda y a la derecha (ellos deben ser iguales), obtenemos (2.60).

2.84. Teniendo en cuenta (2.61), hallamos

$$\sum_{\nu=1}^{n} S(n \quad \nu) A_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} S(n, \nu) \sum_{k=1}^{\nu} s(\nu, k)\, a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{\nu=k}^{n} S(n, \nu)\, s(\nu, k)$$

y, en virtud de (2.59),

$$\sum_{\nu=1}^{n} S(n, \nu) A_\nu = \sum_{h=1}^{n} a_h \delta_{nh} = a_n;$$

por consiguiente, de (2.61) se deduce (2.62). Viceversa, con ayuda de (2.62) podemos escribir

$$\sum_{\nu=1}^{n} s(n, \nu) a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} s(n, \nu) \sum_{h=1}^{\nu} S(\nu, k) A_h = \sum_{h=1}^{n} A_h \sum_{\nu=k}^{n} s(n, \nu) S(\nu, k)$$

y, en virtud de (2.60),

$$\sum_{\nu=1}^{n} s(n, \nu) a_\nu = \sum_{k=1}^{n} A_k \delta_{nk} = A_n,$$

es decir, de (2.62) se deduce (2.61).

2.85. Para $n = 0$ la fórmula (2.63) es válida, puesto que por definición $s(0, 0) = 1$, $B_0 = 1$. Sea, ahora, $n \geqslant 1$. Entonces, de acuerdo con el problema 2.62, *a*) y (2.60), obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} s(n, k) B_k = \sum_{k=1}^{n} s(n, k) \sum_{i=1}^{k} S(k, i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s(n, k) S(k, i) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ni} = \delta_{nn} = 1.$$

2.86. Para $n = 0$ (2.64) tiene lugar, puesto que $s(0, 0) = 1$ y $P_0(x) = 1$. Luego, de acuerdo con (2.60), obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} s(n, k) P_k(x) = \sum_{k=1}^{n} s(n, k) \sum_{j=0}^{k} S(k, j) x^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} x^j \sum_{k=j}^{n} s(n, k) S(k, j) = \sum_{j=0}^{n} x^j \delta_{nj} = x^n \delta_{nn} = x^n,$$

y (2.64) queda demostrada.

2.87. Cuando $n = 0$ (2.65) se verifica, puesto que $S(0, 0) = 1$ y $j_0(x) = 1$. Cuando $n = 1, 2, \ldots$, de acuerdo con (2.54) y (2.59), tenemos

$$\sum_{k=0}^{n} S(n, k) j_k(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) \sum_{j=0}^{n} s(k, j) x^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} x^j \sum_{k=0}^{n} S(n, k) s(k, j) = \sum_{j=0}^{n} x^j \delta_{nj} = x^n \delta_{nn} = x^n.$$

2.88. Cada alojamiento de diferentes mostacillas en distintas células puede interpretarse en los términos de $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$-particiones del n-conjunto M de objetos disponibles. En efecto, el alojamiento de los objetos en células es de tal índole que en la i-ésima célula están contenidos $r_i \geqslant 0$ objetos; $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$ es una $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$-partición del conjunto M (véase

problema 2.52) y el número de tales particiones es igual a $\sigma(r_1, \ldots, r_m)$. Evidentemente, en vista del problema 2.52, obtenemos

$$\mu(n, m) = \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_m=n \\ r_i \geqslant 0}} \sigma(r_1, \ldots, r_m) = \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_m=n \\ r_i \geqslant 0}} \frac{n!}{r_1! \ldots r_m!}.$$

De aquí, con arreglo al problema 2.62 *c*), llegamos a la fórmula (2.66). La expresión (2.67) para los números $\mu(n, m)$ resulta ser ahora un corolario del problema 2.72. Para demostrar (2.68), hagamos uso de la relación recurrente del problema 2.62 *b*). Tenemos

$$\begin{aligned}\mu(n, m) &= m!S(n, m) = m!\,[mS(n-1, m) + S(n-1, m-1)] = \\ &= mm!S(n-1, m) + m(m-1)!\,S(n-1, m-1) = \\ &= m\mu(n-1, m) + m\mu(n-1, m-1),\end{aligned}$$

lo que demuestra (2.68).

2.89. Es evidente que $\mu_p(n, m)$ es igual al número de métodos de elección entre m cajones tales p cajones que han de ser llenados, multiplicado por el número de métodos para alojar diferentes mostacillas en diferentes cajones, es decir, $\mu_p(n, m) = \binom{m}{p} \mu(n, p)$, y, en virtud de

$$\mu_p(n, m) = \frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-p+1)}{p!}\, p!\, S(n, p)$$

de aquí se deduce (2.69).

2.90. Analicemos diferentes alojamientos de n diferentes objetos en m diferentes células. El número total de ellos es igual a m^n, es decir, al primer miembro de (2.70). Por otra parte, pueden ser clasificados del modo siguiente. Dividamos todos los alojamientos citados en m clases, incluyendo en la p-ésima clase ($p = 1, 2, \ldots, m$) todos aquellos alojamientos, para los cuales p células están ocupadas y $(m - p)$, libres. La potencia de la p-ésima clase se determina con ayuda del problema 2.89. Al sumar respecto de todos los p los números $\mu_p(n, m)$, obtendremos, en virtud de (2.69):

$$m^n = \sum_{p=1}^{m} \mu_p(n, m) = \sum_{p=1}^{m} (m)_p\, S(n, p),$$

lo que se trataba de demostrar. Está claro también que la relación (2.70) se deduce inmediatamente de la expresión determinante (2.49) para los números de Stirling de 2° género.

2.91. El primero de los números requeridos se obtiene dividiendo por $m!$ el número correspondiente de métodos de alojamientos para diferentes cajones (véase problema 2.88, fórmula (2.66)). En efecto, a cada uno de los alojamientos, al haber m células iguales, le corresponden $m!$ alojamientos en el caso cuando estas células son distinguibles.

El segundo de los números buscados se obtiene por sumación inmediata de los números de Stirling $S(n, p)$ respecto de $p = 1, \ldots, m$, puesto que la elección de los cajones vacíos, por cuanto ellos son indistinguibles, se realiza de un modo único.

2.92. n diferentes factores primos $p_1, \ldots, p_n$ pueden partirse en m productos no vacíos empleando $S(n, m)$ métodos, según la interpretación de los números de Stirling de 2° género $S(n, m)$, como números de particiones del n-conjunto en m subconjuntos disjuntos no vacíos. Por hipótesis del problema todos los productos obtenidos serán diferentes, lo que demuestra precisamente el resultado requerido.

2.93. Dividamos los alojamientos determinados por el número $S(n, m, k)$ en $n+1$ clases incluyendo en la ν-ésima clase ($\nu = 0, 1, \ldots$) aquellos, en los cuales el llenado de k células elegida se realiza colocando ν mostacillas, con la particularidad de que las restantes $n - \nu$ mostacillas caen en los cajones no marcados. El número de elementos en la ν-ésima clase es igual a

$$\binom{n}{\nu} (m-k)^{n-\nu} k!\, S(\nu, k), \qquad (*)$$

donde $\binom{n}{\nu}$ es el número de métodos que pueden emplearse para elegir entre n diferentes objetos, ν piezas; $k!S(\nu, k)$ es el número de métodos para alojar ν objetos elegidos en k cajones fijos (véase problema 2.88); $(m-k)^{n-\nu}$ es el número de métodos para alojar los restantes $n - \nu$ objetos distinguibles en $m - k$ cajones distinguibles. Al sumar los monomios (*) respecto de $\nu = 0, 1, \ldots, n$, y dividiendo la suma por $k!$, obtenemos (2.71).

2.94. Haciendo uso de (2.71), escribamos

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (m-k)^{n-\nu} S(\nu, k) \right] =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} S(\nu, k) \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(m-k)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} x^{n-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} S(\nu, k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m-k)^n}{n!} x^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} S(\nu, k)\, e^{(m-k)x} =$$

$$= e^{(m-k)x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} S(\nu, k)\, x^\nu,$$

de donde con ayuda de (2.34), se deduce (2.73).

§ 3. Teoría de Polya

2.95. Escribamos todas las $n!$ sucesiones, cada una de las cuales se compone de los números $1, 2, \ldots, n$ tomados de uno en uno en orden arbitrario. En cada de estas sucesiones encerramos entre paréntesis, comenzando por el principio, b_1 veces cada número, b_2 veces cada dos números, etc., b_n veces cada n números. Las sucesiones obtenidas con los paréntesis puestos pueden considerarse como permutaciones divididas en ciclos. En tal caso cada permutación con el tipo dado $(b_1, \ldots, b_n)$ se encontrará $\prod_{i=1}^{n} (i^{b_i} b_i!)$ veces. Por consiguiente, el número de diferentes permutaciones de este tipo es igual a $n! / \prod_{i=1}^{n} (i^{b_i} b_i!)$.

2.96. La afirmación se deduce inmediatamente del resultado del problema 2.95.

2.97. Si a es un elemento fijo del conjunto G, la aplicación $g \mapsto ag$, definida para cualquier $g \in G$, será una permutación sobre el conjunto G. Al designarla con $S(a)$, notemos que si a recorre todo el conjunto G, entonces la aplicación $a \mapsto S(a)$ es biunívoca, homomorfa ($S(a)\, S(b) = S(ab)$) y tales permutaciones $S(a)$ forman un grupo.

2.98. Si $g \in G$, entonces el orden de g es un número entero positivo mínimo k tal que $g^k = e$, donde e es el elemento unidad del grupo G. La permutación $S(g)$ divide G en ciclos, cuyas longitudes son todas iguales a $k(g)$: si p es un elemento del conjunto G, entonces pertenece al ciclo $p \mapsto gp \mapsto g^2p \mapsto \ldots \ldots \mapsto g^{k(g)}p = p$.

De aquí se deduce que n se divide por $k(g)$ y que la permutación $S(g)$ parte G en $n/k(g)$ ciclos de longitud $k(g)$. De este modo,

$$P_G = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} [x_{k(g)}]^{n/k(g)} = \frac{1}{n} \sum_{d/n} \nu(d) (x_d)^{n/d}.$$

2.99. Si $g = e^{2\pi ij/n}$, el orden del elemento g es igual a $k(g) = n/(n, j)$. A continuación aprovechamos el resultado del problema 2.98.

2.100. 12 revoluciones del tetraedro pueden dividirse en tres categorías:

1) idéntica;

2) 8 revoluciones a 120° alrededor de un eje que pasa por el vértice y el centro de la cara opuesta;

3) 3 revoluciones a 180° alrededor de un eje que pasa por el centro de las aristas opuestas.

Por eso, $P_G = (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)/12$.

2.101. $P_G = (x_1^6 + 8x_3^2 + 3x_1^2x_2^2)/12$.

2.102. $P_G = (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)/12$. Aquí podemos aprovechar el hecho de que el poliedro regular, dual respecto de un tetraedro, es el mismo tetraedro.

2.103. 24 revoluciones del cubo pueden dividirse en cinco partes:

1) idéntica;

2) 3 giros en 180° alrededor de los ejes que unen los centros de las caras opuestas;

3) 6 giros en 90° alrededor de las rectas que unen los centros de las caras opuestas;

4) 6 giros en 180° alrededor de las rectas que unen los centros de las aristas opuestas;

5) 8 giros en 120° alrededor de las rectas que unen los vértices opuestos.

La permutación 1) da 8 ciclos de longitud 1. La permutación 2) da 4 ciclos de longitud 2. La permutación del tipo 3) da 2 ciclos de longitud 4. La permutación del tipo 4) da 4 ciclos de longitud 2. La permutación del tipo 5) da 2 ciclos de longitud 1 y 2 ciclos de longitud 3. Por eso $P_G = (x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2)/24$.

2.104. $P_G = (x_1^{12} + 3x_2^6 + 6x_4^3 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4)/24$.

2.105. $P_G = (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2)/24$.

2.106.

$$\exp\left(zx_1 + \frac{z^2x_2}{2} + \frac{z^3x_3}{3} + \ldots\right) = \sum_{b_1=0}^{\infty} \frac{z^{b_1}x_1^{b_1}}{b_1!} \sum_{b_2=0}^{\infty} \frac{z^{2b_2}x^{b_2}}{b_2!2^{b_2}} \ldots$$

El coeficiente de z^n se obtiene por sumación de las expresiones

$$x_1^{b_1}x_2^{b_2} \ldots (b_1!b_2!2^{b_2}b_3!3^{b_3} \ldots)^{-1}$$

respecto de toda clase de números enteros no negativos $b_1, b_2, \ldots$, que satisfacen la condición $b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \ldots = n$. Ahora la afirmación se desprende inmediatamente del resultado del problema 2.95.

2.109.

$$|\{(g, s): g \in G, \quad s \in S, \quad \pi_g s = S\}| = \sum_{g \in G} \psi(g) = \sum_{s \in S} \eta(s),$$

donde $\eta(s) = |\{g \in G: \pi_g s = s\}|$, $G_s = \{g \in G: \pi_g s = s\}$ es un subgrupo del grupo G de orden $\eta(s)$.

Si $s_1 \sim s$ (es decir, $\exists h \in G$: $\pi_h s_1 = s$), entonces

$$| \{g \in G: \pi_g s_1 = s\} | = \eta(s).$$

Por consiguiente, G puede ser dividido en subconjuntos, cada uno de los cuales se compone de $\eta(s)$ elementos y corresponde exactamente a un elemento de aquella clase de equivalencia en la que figura s. Por eso tenemos

$$\eta(s) = \frac{|G|}{\text{número de equivalentes en la clase de equivalencia que contiene } s}.$$

De aquí se deduce la afirmación del lema.

2.110. S se divide en 2 clases de equivalencia $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$. El problema puede resolverse empleando el lema de Bernsaid:

$$\psi(\pi_1) = 4; \quad \psi(\pi_2) = 2; \quad \psi(\pi_3) = 2; \quad \psi(\pi_4) = 0.$$

De aquí, el número de clases de equivalencia es igual a $(4 + 2 + 2 + 0)/4 = 2$.

2.111. $G = \{\pi_1, \pi_2\}$; π_1 es una permutación idéntica, π_2 es el cambio de lugar de dos letras extremas. Según el lema de Bernsaid, tenemos: el número de clases de equivalencia es igual a $(\psi(\pi_1) + \psi(\pi_2))/2 = (8 + 4)/2 = 6$.

2.112. Un collar puede ser pintado de tres colores empleando $3^5 = 243$ métodos. $G = \{\pi_1, \ldots, \pi_5\}$, donde π_i es el giro del collar en sentido horario en un ángulo de $360° \cdot (i = 1)/5$, $i = 1, \ldots, 5$. Es evidente que $\psi(\pi_1) = 243$; $\psi(\pi_2) = \ldots = \psi(\pi_5) = 3$. Por consiguiente, el número de diferentes collares es igual, según el lema de Bernsaid, a $(243 + 3 + 3 + 3 + 3)/5 = 51$.

2.113. $(n - 1)!$

2.115. π_1 es una transformación idéntica, π_2 es una transformación que vuelca «al revés» aquellos números, para los cuales esto resulta posible (los demás números la transformación los deja intactos). $10^5 - 5^5$ números contienen al menos una de las cifras 2, 3, 4, 5, 7. 3×5^5 números se leen de un modo igual, sean éstos en la forma normal o volcada, por ejemplo 16891. Por eso, $\psi(\pi_2) = (10^5 - 5^5) + 3 \cdot 5^5$; $\psi(\pi_1) = 10^5$. Así pues, harán falta $1/2 \cdot (10^5 + 10^5 - 5^5 + 3 \times 5^5) = 98475$ hojas.

2.116. En nuestro problema hay 10 clases de equivalencia:

1) todas las caras son rojas (potencia 1);
2) cinco caras son rojas, una azul (potencia 6);
3) dos caras opuestas son azules, las otras cuatro, rojas (potencia 3);
4) dos caras adyacentes son azules, las otras cuatro son rojas (potencia 12);
5) tres caras que tienen un vértice común son rojas, las tres restantes, azules (potencia 8);
6) dos caras opuestas y una restante son rojas, las tres demás son azules (potencia 12);
7) — 10) se obtienen de 4) — 1) por sustitución de las palabras «roja» y «azul».

2.117.

$$f_1(g) = f_2, \quad g \in G \Rightarrow \prod_{d \in D} \omega(f_1(d)) = \prod_{d \in D} \omega(f_1(gd)) = \prod_{d \in D} \omega(f_2(d)).$$

2.118. a) $\operatorname{Inv} R^D = \sum_f W(f) = \sum_f \prod_{d \in D} \omega(f(d)) = \left[\sum_{r \in D} \omega(r)\right]^{|D|}$.

b) Se obtiene de un modo análogo, al analizar un producto completo.

2.119. Aquí D es un conjunto de las caras del tetraedro; G es el grupo de revoluciones; R es un conjunto de dos colores: rojo y azul, $P_G(x_1, \ldots, x_4) = (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)/12$. De acuerdo con el teorema de Polya, el número de diferentes clases de equivalencia es igual a $P_G(2, 2, 2, 2) = 5$.

2.120. Aquí D es un conjunto de caras del cubo; G es el grupo de revoluciones; R, el conjunto de dos colores,

$$P_G(x_1, \ldots, x_6) = (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2)/24.$$

De acuerdo con el teorema de Polya, el número de diferentes métodos de coloración es igual a $P_G(2, 2, \ldots, 2) = 10$.

2.121. D es el conjunto de caras del cubo, G es el grupo de revoluciones, R es el conjunto de dos colores: rojo y azul,

$$P_G = (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2)/24.$$

Asignemos el peso a al color rojo y b, al color azul. Según el teorema de Polya, el inventario de clases de equivalencia es igual a

$$[(a + b)^6 + 3(a + b)^2(a^2 + b^2)^2 + 6(a + b)^2(a^4 + b^4) + 6(a^2 + b^2)^3 + 8(a^3 + b^3)^2]/24.$$

El coeficiente de a^4b^2 es igual a $(15 + 9 + 6 + 18 + 0)/24 = 2$. Por consiguiente, existen exactamente dos clases de equivalencia de las funciones, para las cuales 4 caras están pintadas de color rojo.

2.123. Supongamos que $x_1 \sim x_2$ y $x_1 < x_2$ para ciertos $x_1, x_2 \in X$. En este caso existe un $g \in L$ tal que $gx_1 = x_2$. De aquí obtenemos $x_1 < gx_1 < g^2x_1 < \ldots < g^{k-1}x_1 < g^kx_1 = x_1$, siempre que x_1 pertenece al ciclo de longitud k de la permutación g. Tomando en consideración la transitividad, tenemos $x_1 < x_1$, lo que es imposible.

2.124. Sea $C \leqslant C'$ y $C' \leqslant C$, es decir, existen tales $x_1, x_2 \in C$ y $x_1', x_2' \in C'$ que $x_1 \leqslant x_1'$, $x_2 \geqslant x_2'$ para ciertas $C, C' \subset X/L$. Entonces, existe un $g \in L$ tal que $x_2 = gx_1$, y tenemos $x_2' \leqslant x_2 \leqslant gx_1'$, es decir, $x_2' \leqslant gx_1'$, donde $gx_1' \in C'$. Del problema 2.123 tenemos $x_2' = gx_1' = x_2$ y $C = C'$. Con una facilidad aún mayor se comprueban las demás condiciones.

2.126. Sea $X = M(D, R)$ y supongamos que G actúa sobre X de la manera siguiente: $\pi_g f = fg^{-1}$; es fácil demostrar que π es un homomorfismo de G en el grupo de permutaciones $M(D, R)$. Según el lema de Bernsaid (problema 2.109) llegamos a que el número de clases de equivalencia de las funciones isótonas es igual a

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \psi(g),$$

donde $\psi(g) = |\{f \in M(D, R): fg^{-1} = f\}| = |\{f \in M(D, R): f$ es constante en los ciclos $g\}| = |M(D/\{g\}, R)|$.

2.127. Supongamos que en el problema anterior D es una anticadena y R, una cadena. Entonces

$$M(D, R) = R^D, \quad M(D/\{g\}, R) = R^{D/(g)}.$$

Si $(b_1, b_2, \ldots)$ es el tipo de la permutación g, tendremos

$$R^{D/(g)} = |R|^{b_1 + b_2 + \ldots}.$$

Capítulo III

MÉTODOS LÓGICOS

§ 1. Método de inclusión y exclusión

3.1. Designemos $n = \left| \sum_{i=1}^{m} S_i \right|$ y sea p_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ una propiedad consistente en que el elemento elegido pertenece al conjunto S_i. Entonces, tomando en consideración las designaciones adoptadas $N_{i_1, \ldots, i_k} = |S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}|$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m$, y de conformidad con la fórmula de inclusión y exclusión tendremos

$$0 = N(0) = \left| \sum_{i=1}^{m} S_i \right| - \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant m} |S_{i_1}| + \ldots + (-1)^m |S_1 \ldots S_m|.$$

3.2. Las permutaciones de los elementos del m-conjunto dado las tomaremos por elementos de un $m!$-conjunto. Designemos $n = m!$, y sea p_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ una propiedad de la permutación consistente en que el elemento del m-conjunto que lleva el número i queda, como resultado de la permutación dada, en su lugar. Entonces, tomando en consideración las designaciones adoptadas, *tendremos*

$$N_{i_1, \ldots, i_h} = (m-k)!, \quad \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} N_{i_1, \ldots, i_k} = C_m^k (m-k)!.$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtendremos la respuesta:

$$N(r) = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_k^r C_m^k (m-k)! = \frac{m!}{r!} \sum_{s=0}^{m-r} \frac{(-1)^s}{s!}.$$

3.3. Designemos por $p_{\overline{\alpha}}$, donde $\overline{\alpha} = (i_1, \ldots, i_d)$, la propiedad del juego consistente en que en la primera permutación el elemento con el número i_1 queda en su lugar, etc., en la d-ésima permutación el elemento con el número i_d *queda en su lugar. Entonces, el número de juegos que poseen las propiedades* $p_{\overline{\alpha}_1}, \ldots, p_{\overline{\alpha}_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ será igual a

$$N_{\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_k} = [(m-k)!]^d, \quad \sum_{\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_k} N_{\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_k} = (C_m^k)^d [(m-k)!]^d.$$

Al aplicar la fórmula de inclusiones y exclusiones, obtenemos la respuesta:

$$N(r) = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_k^r (C_m^k (m-k)!)^d, \quad 0 \leqslant r \leqslant m.$$

3.4. Tomemos por elementos del m^n-conjunto diferentes repartimientos de n bolas por m cajones. Sea p_i $(i = 1, \ldots, m)$ una propiedad consistente en que

con el repartimiento dado el cajón con el número i queda vacío. Entonces la cantidad de repartimientos que poseen las propiedades $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m)$, es igual a $N_{i_1, \ldots, i_k} = (m-k)^n$ y

$$\sum_{i \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} N_{i_1, \ldots, i_k} = C_m^k (m-k)^n.$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos el resultado:

$$N(r) = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_k^r C_m^k (m-k)^n = C_m^r \sum_{s=0}^{m-r} (-1)^s C_{m-r}^s (m-r-s)^n.$$

3.5. Sea p_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ una propiedad del juego consistente en que la bola con el número i en dicho juego no está contenida. Entonces, el número de juegos que poseen las propiedades $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m)$ es igual a

$$N_{i_1, \ldots, i_k} = (C_{m-k}^s)^d, \qquad \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} N_{i_1, \ldots, i_k} = C_m^k (C_{m-k}^s)^d.$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la respuesta:

$$N(r) = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_k^r C_m^k (C_{m-k}^s)^d =$$

$$= C_m^r \sum_{t=0}^{m-r-s} (-1)^t C_{m-r}^t (C_{m-r-t}^s)^d, \quad 0 \leqslant r \leqslant m.$$

En particular, el número de juegos en los que se encuentran todas las bolas es igual a

$$N(0) = \sum_{k=0}^{m-s} (-1)^k C_m^k (C_{m-k}^s)^d.$$

3.6. Examinemos un C_m^n-conjunto de n-muestras del m-conjunto y designemos por p_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ la propiedad consistente en que en la muestra citada está contenido el elemento con el número i. Entonces el número de muestras que poseen las propiedades $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m)$ es igual a

$$N_{i_1, \ldots, i_k} = C_{m-k}^{n-k}, \qquad \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} N_{i_1, \ldots, i_k} = C_m^k C_{m-k}^{n-k}$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la identidad:

$$0 = N(0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k C_{m-k}^{n-k}.$$

3.7. Examinemos un C_{n+m-1}^n-conjunto de toda clase de n-muestras con repetición del (m)-conjunto y supongamos que p_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ es una propiedad consistente en que la citada muestra no contiene elemento con el número i. Entonces el número de muestras que poseen las propiedades $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m)$ es igual a

$$N_{i_1, \ldots, i_k} = C_{m+n-k-1}^{n-k}, \qquad N_{i_1, \ldots, i_k} = C_m^k C_{m+n-k-1}^{n-k}.$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la identidad

$$0 = N(0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k C_{m+n-k-1}^{n-k}.$$

3.8. Se deduce del problema 3.5, puesto que si $sd < m$, entonces $N(0) = 0$.

3.9. Veamos un conjunto S de particiones del número n en m sumandos enteros no negativos $n = n_1 + \ldots + n_m$. Tiene lugar la igualdad

$$\sum_{(n_1, \ldots, n_m) \in S} \frac{n!}{n_1! \ldots, n_m!} = \underbrace{(1 + \ldots + 1)^n}_{m \text{ veces}} = m^n.$$

Designemos por p_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ la propiedad de la partición $n = n_1 + \ldots + n_m$, consistente en que $n_i = 0$ y, supongamos que el peso de cada partición $n_1, \ldots, n_m$ es igual a $n!/(n_1! \ldots n_m!)$. El peso sumario de la totalidad de particiones que poseen k propiedades será $V(k) = \sum n!/(n_1! \ldots n_m!)$, donde la sumación se realiza respecto de toda clase de particiones del número n en $m - k$ sumandos enteros no negativos, es decir, $V(k) = (m - k)^n$.

Aplicando la fórmula generalizada de inclusión y exclusión, obtenemos la identidad

$$W(0) = \sum_{\substack{n = n_1 + \ldots + n_m \\ n_1 > 0, \ldots, n_m > 0}} \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n.$$

3.10. Se deduce del problema 3.9, puesto que si $n < m$, entonces $W(0) = 0$.

3.11. Se deduce del problema 3.9, puesto que la cantidad de particiones ordenadas del número m en m sumandos enteros positivos es igual a uno y el peso de esta partición $m = 1 + \ldots + 1$ es igual a $m!$, es decir, $W(0) = m!$

3.12. Designemos por p_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ la propiedad consistente en que el número dado se divide por q_i. La cantidad de números que no son superiores a n y que poseen las propiedades $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ es igual a $n/(q_{i_1}, \ldots, q_{i_k})$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m)$. Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la igualdad

$$N(0) = \varphi(n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum \frac{n}{q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}} = n\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{q_m}\right).$$

3.13. Designemos por p_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ la propiedad consistente en que el número dado se divide por q_i. Entonces la cantidad de números que no sobrepasan de n y que poseen las propiedades $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots < i_k \leqslant m)$ es igual a $N_{i_1, \ldots, i_k} = [n/(q_{i_1}, \ldots, q_{i_k})]$. De acuerdo con la fórmula de inclusión y exclusión, la cantidad de números que no sobrepasan de n y no poseen ninguna de las propiedades $p_1, \ldots, p_m$ (*es decir, la cantidad de números primos* que son superiores a $\sqrt{n}$, pero no sobrepasan de n) es igual a

$$N(0) = \pi(n) - \pi(\sqrt{n}) = (n-1) + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} \left[\frac{n}{q_{i_1} \ldots q_{i_k}}\right].$$

3.14.

$$S=\sum_{h=0}^{\infty}\left(2^{-h}-(2^{-2h}+2^{-3h}+2^{-5h})+(2^{-10h}+2^{-6h}+2^{-15h})-2^{-30h}=\right.$$

$$=2-\frac{1}{1-2^{-2}}-\frac{1}{1-2^{-3}}-\frac{1}{1-2^{-5}}+$$

$$+\frac{1}{1-2^{-10}}+\frac{1}{1-2^{-6}}+\frac{1}{1-2^{-15}}-\frac{1}{1-2^{-30}}.$$

3.15. Designemos con S el conjunto de todas las m-muestras con repetición de los números $1, \ldots, m$. Supongamos que el peso de cada una de tal muestra $i_1, \ldots, i_m$ es igual a $a_{1,i_1} \ldots a_{m,i_m}$. Designemos por p_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ la propiedad consistente en que la muestra dada no contiene los números i. Entonces la suma de pesos de las muestras que poseen las propiedades $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ será igual a

$$S(A_{i_1, \ldots, i_k})=\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_1, \ldots, i_k}}^{m} a_{j,\,i}\Big).$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la igualdad

$$W(0)=\operatorname{per} A=S(A)+\sum_{h=1}^{m-1}(-1)^h\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant m} S(A_{i_1, \ldots, i_k}).$$

3.16. Por definición de permanente de una matriz, per $A=\sum_{i_1, \ldots, i_m} a_{1,\,i_1}\cdots a_{m,\,i_m}$, donde la sumación se realiza respecto de toda clase de m-muestras sin repetición del n-conjunto $1, \ldots, n$. Si la muestra $i_1, \ldots, i_m$ es de tal índole que $a_{1,i_1} \ldots a_{m,i_m} = 1$, entonces, de conformidad con la definición de la matriz de incidencia, $s_{i_k} \in S_k$ $(k = 1, \ldots, m)$. Por consiguiente, el sistema $s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}$ es un s.r.d. para $M(S)$. Si para la muestra $i_1, \ldots, i_m$ se tiene $a_{1,i_1} \ldots a_{m,i_m} = 0$, entonces el sistema $s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}$ no puede ser un s.r.d. para $M(S)$. Por eso el número de s.r.d. para $M(S)$ es igual a per A.

3.17. La matriz de incidencia para $M(S)$ tiene por expresión

$$A=(a_{ij}),\quad i, j=1, \ldots, m,\quad a_{ij}=\begin{cases}1, & i\neq j,\\ 0, & i=j.\end{cases}$$

Calculemos per A con ayuda de la fórmula del problema 3.15. En las designaciones del problema 3.15 tenemos

$$S(A_{i_1, \ldots, i_k})=(m-k-1)^{m-k}(m-k)^k,$$

$$\sum_{i_1, \ldots, i_k} S(A_{i_1, \ldots, i_k})=C_m^k(m-k-1)^{m-k}(m-k)^k.$$

Por consiguiente, según el problema 3.16, el número de s.r.d. para $M(S)$ es igual a

$$\operatorname{per} A=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_m^k(m-k)^k(m-k-1)^{m-k}.$$

§ 2. Sistemas de representantes de los conjuntos

3.18. Supongamos que no existe un s.r.d. para $M(S)$. Entonces, según el teorema de Hall, existen subconjuntos $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k} (1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m)$ tales que $p = |S_{i_1} + \ldots + S_{i_k}| < k$. Por hipótesis del problema cada uno de los conjuntos $S_1, \ldots, S_m$ contiene exactamente r elementos y todo elemento se contiene exactamente en r conjuntos. Por eso, el número de elementos (tomándose en consideración las repeticiones) que están contenidos en la unión de conjuntos $S_{i_1} + \ldots + S_{i_k}$, o bien el número de unidades contenidas en k filas de la matriz de incidencia para $M(S)$ es igual a $k \cdot r$. Por otra parte, este número no es superior a $p \cdot r$. La contradicción obtenida demuestra la existencia del s.r.d. para $M(S)$.

3.19. Demostremos que $|A| = |B|$. Denotemos los elementos de los conjuntos $A = (a_1, \ldots, a_m)$ y $B = (b_1, \ldots, b_n)$ por puntos en un plano, y la correspondencia entre ellos, por segmentos que unen dichos puntos. El número de segmentos que tienen por origen los puntos del conjunto A es igual a km, y el número de los que tienen por origen los puntos del conjunto B es igual a kn. Por consiguiente, se verifica la igualdad $km = kn$, o bien $|A| = |B|$.

Definamos la matriz $C = (c_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ del modo siguiente:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si existe correspondencia entre los elementos } a_i \text{ y } b_i, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i, j = 1, \ldots, m, \\ 0 \text{ en el caso contrario,} \end{cases}$$

Por hipótesis la matriz C es de tal índole que en cada fila y en cada columna se contienen exactamente k unidades. Del problema 3.18 se deduce que per $C \neq 0$. Por eso existe una permutación $i_1, \ldots, i_m$ de números $1, \ldots, m$ tal que $c_{1i_1} \ldots c_{mi_m} = 1$. Al elemento b_{i_α} pongámosle en correspondencia el elemento a_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$. Hemos establecido, pues, la correspondencia biunívoca entre A y B.

3.20. Se desprende del problema 3.19.

3.21. Designemos por S_i $(i = 1, \ldots, n)$ un conjunto de números de 1 a n que no están contenidos en la i-ésima columna de un rectángulo latino dado, y $M(S) = (S_1, \ldots, S_n)$.

La matriz de incidencia para $M(S)$ contiene exactamente $n - m > 0$ unidades en cada columna y en cada fila. Por eso, según se deduce del problema 3.18, existe un s.r.d. $s_1, \ldots, s_n$ para $M(S)$. Agreguemos al rectángulo latino dado la fila $s_1, \ldots, s_n$ y obtendremos $(m + 1) \times n$ rectángulos latinos.

De la afirmación demostrada se deduce que todo rectángulo latino puede ser ensanchado hasta que se obtenga un cuadrado latino.

3.22. Designemos con $A = (a_{ij})$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ una matriz arbitrariamente elegida; $M = s + t$ representa el número mínimo de filas con los números $i_1, \ldots, i_s$ y de columnas con los números $j_1, \ldots, j_t$ que contienen todos los elementos no nulos; N es el número máximo de elementos, de los cuales ningún par se contiene en una fila y en una columna.

Examinemos una matriz A' de dimensión $s \times (n - t)$ formada por los elementos de la matriz A que se disponen en la intersección de las filas con los números $i_1, \ldots, i_s$ y de las columnas con números distintos de $j_1, \ldots, j_t$. Designemos las filas de esta submatriz por $S_1, \ldots, S_s$. Entonces, para cualquier juego de índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $|S_{\alpha_1} + \ldots + S_{\alpha_k}| \geqslant k$, pues de lo contrario pudiéramos sustituir las correspondientes k filas de la matriz A por un número menor de columnas que cubren en la matriz A los mismos elementos no nulos, lo que contradice el hecho de que M es el número mínimo. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de Hall, en la matriz A' existen s elementos no nulos, de los cuales ningún par se contiene en una columna y en una fila. Análogamente, al analizar la matriz A'' de dimensión $(m - s) \times t$, compuesta de los ele-

mentos de la matriz A que se encuentran en los lugares donde se intersecan entre sí las filas con números, distintos de $i_1, \ldots, i_s$, y las columnas con los números $j_1, \ldots, j_t$, hallamos t elementos no nulos, de los cuales ningún par está contenido en una fila y en una columna.

Así pues, hemos hallado $s + t = M$ elementos no nulos de la matriz A, de los cuales ningún par está contenido en una fila y en una columna. Por consiguiente, siendo N el número máximo, se verifica la desigualdad $N \geqslant M$. Por cuanto la desigualdad inversa $M \geqslant N$ no causa dudas algunas, entonces $M = N$.

3.23. El número mínimo de filas y de columnas que contienen todos los elementos no nulos de la matriz A no sobrepasa de $m - s + m - t < m$. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de König (problema 3.22), para cualquier permutación $i_1, \ldots, i_m$ de los números $1, \ldots, m$ tenemos $a_{1,i_1} \ldots a_{m,i_m} = 0$. De aquí obtenemos $A = \operatorname{per} A = 0$.

3.24. Designemos $S_l = \{A_j \mid A_j \cap B_l \neq \varnothing\}$, $l = 1, \ldots, m$. Sea $i_1, \ldots, i_k$ una k-muestra arbitraria de $1, \ldots, m$. Si $|S_{i_1} + \ldots + S_{i_k}| < k$, entonces los conjuntos $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ están contenidos en la unión de menos de k conjuntos $A_1, \ldots, A_m$, lo que contradice la hipótesis del problema. Por consiguiente, de conformidad con el teorema de P. Hall, existe un s.r.d. $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ para $S_1, \ldots, S_m$. De la definición de los conjuntos S_l ($l = 1, \ldots, m$) obtenemos $A_{i_k} \cap B_k \neq \varnothing$ ($k = 1, \ldots, m$). Sea $x_k \in A_{i_k} \cap B_k$ ($k = 1, \ldots, m$). Entonces, $x_1, \ldots, x_m$ es un s.r.d. para $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ y $B_1, \ldots, B_m$.

3.25. Para cualquier k-muestra $i_1, \ldots, i_k$ ($1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m$) de $1, \ldots, m$ tenemos $|A_{i_1} + \ldots + A_{i_k}| = |B_{i_1} + \ldots + B_{i_k}| = kr$. Por eso, el conjunto $A_{i_1} + \ldots + A_{i_k}$ no puede contener más que k de los conjuntos $B_1, \ldots B_m$. Por consiguiente, según el problema 3.24, existe un s.r.d. para $A_1, \ldots, A_m$ y $B_1, \ldots, B_m$.

3.26. Se deduce del problema 3.25.

3.27. Sea $i_1, \ldots, i_k$ cierta k-muestra de $1, \ldots, m$ y supongamos que $|S_{i_1} + \ldots + S_{i_k}| = n$. El número de p-combinaciones del n-conjunto es igual a C_n^p. Si los conjuntos $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ tienen un s.p-r.d., entonces el número n ha de satisfacer la desigualdad $C_n^p \geqslant k$.

§ 3. Teorema y números de Ramsey

3.28. Sea dada cierta coloración de las aristas de un 6-grafo completo. Veamos un vértice arbitrario P_0. De cinco aristas que tienen por origen este vértice, al menos tres están pintadas de un mismo color. Convengamos en considerar que las aristas P_0P_1, P_0P_2 y P_0P_3 son azules. Si una de las aristas P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3, por ejemplo, P_1P_2, es azul, entonces el 3-grafo con vértices P_0, P_1, P_2 es cromático; en el caso contrario el 3-grafo con vértices P_1, P_2, P_3 es cromático rojo.

3.29. Pintemos los lados de un pentágono regular de un color y las diagonales, de otro.

3.30. Se deduce del problema 3.28.

3.31. De los problemas 3.28 y 3.29 se deduce que $R(3, 3; 2) = 6$. Demostremos la desigualdad

$$R(k, m; 2) \leqslant R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2), \quad k > 2, \ m > 2,$$

de la cual se desprende la afirmación del problema. Observemos que $R(2, m; 2) = m$ y $R(k, 2; 2) = k$. Apliquemos la inducción matemática por el número $s = k + m$. Si $s = 6$, es decir, si $m = k = 3$, entonces, según lo demostrado

anteriormente,

$$6 = R\ (3,\ 3;\ 2) \leqslant R\ (3,\ 2;\ 2) + R\ (2,\ 3;\ 2) = 3 + 3.$$

Supongamos que la existencia de los números $R(k-1,\ m;\ 2)$ y $R\ (k,\ m-1;\ 2)$ está establecida. *Examinemos un n-grafo completo, donde* $n = R(k-1,\ m;\ 2) + R\ (k,\ m-1;\ 2)$, cuyas aristas están pintadas en dos colores (rojo y azul). Denotemos por p un vértice arbitrario del grafo; por T_1, el conjunto de vértices unidos con la p-ésima arista roja; por T_2, el conjunto de vértices unidos con la p-ésima arista azul; $n_1 = |\ T_1\ |$, $n_2 = |\ T_2\ |$. En tal caso resulta válida la igualdad $n = n_1 + n_2 + 1 = R\ (k-1,\ m;\ 2) + R\ (k,\ m-1;\ 2)$.

Analicemos dos casos:

a) $n_1 \geqslant R\ (k-1,\ m;\ 2)$, $n_2 < R\ (k,\ m-1;\ 2)$;

b) $n_2 \geqslant R\ (k,\ m-1;\ 2)$, $n_1 < R\ (k-1,\ m;\ 2)$.

En el caso a), por definición del número $R\ (k-1,\ m;\ 2)$, en el subgrafo T_1 o bien existe un m-subgrafo cromático azul o bien un $(k-1)$-subgrafo cromático rojo. *En el segundo caso agreguemos al* $(k-1)$*-subgrafo cromático rojo* el vértice p y obtendremos el k-subgrafo cromático rojo.

El caso b) se analiza de un modo análogo.

3.32. La desigualdad no rigurosa está demostrada en el problema 3.31.

Demostremos que si $R\ (k-1,\ m;\ 2) = 2p$ y $R\ (k,\ m-1;\ 2) = 2q$, donde p y q son unos números naturales, entonces es válida la siguiente desigualdad rigurosa:

$$R\ (k,\ m;\ 2) < R\ (k-1,\ m;\ 2) + R\ (k,\ m-1;\ 2), \quad k > 2,\ m > 2.$$

Sea $n = 2p + 2q - 1$ y sea P un vértice arbitrario del n-grafo completo; n_1, el número de aristas rojas que tienen por origen P; n_2, el número de aristas azules que tienen por origen P. En este caso es válida la igualdad

$$n - 1 = n_1 + n_2 = R\ (k-1,\ m;\ 2) + R\ (k,\ m-1;\ 2) - 2.$$

Son posibles tres casos:

a) $n_1 \geqslant R\ (k-1,\ m;\ 2)$, $n_2 < R\ (k,\ m-1;\ 2)$;

b) $n_2 \geqslant R\ (k,\ m-1;\ 2)$, $n_1 < R\ (k-1,\ m;\ 2)$;

c) $n_1 = 2p - 1$, $n_2 = 2q - 1$.

Los dos casos primeros se han analizado en el problema 3.31. Si para todos los vértices del grafo tiene lugar el caso c), el número de extremos rojos de las aristas es igual a $(2p + 2q - 1)\ (2p - 1)$, mas este número debe ser par.

3.33. Apliquemos la inducción matemática para el número $s = k + m$. Si $s = 6$, es decir, si $k = m = 3$, la desigualdad $6 = R\ (3,\ 3;\ 2) \leqslant C_{3+3-2}^{3-1} = 6$ se verifica.

Supongamos que $R\ (k-1,\ m;\ 2) \leqslant C_{k+m-3}^{k-2}$, $R\ (k,\ m-1;\ 2) \leqslant C_{k+m-3}^{k-1}$. Entonces, haciendo uso de la desigualdad del problema 3.32 y de la propiedad de los coeficientes binomiales, obtenemos la estimación

$$R(k,\ m;\ 2) \leqslant R\ (k-1,\ m;\ 2) + R\ (k,\ m-1;\ 2) \leqslant$$
$$\leqslant C_{k+m-3}^{k-2} + C_{k+m-3}^{k-1} = C_{k+m-2}^{k-1}$$

3.34. *Indicaciones.* Razonando igual que en la demostración del problema 3.31, establézcase la validez de la desigualdad

$$R\ (k_1, \ldots, k_m;\ 2) \leqslant R\ (k_1 - 1,\ k_2, \ldots, k_m;\ 2) + \ldots + R\ (k_1, \ldots, k_{m-1},\ k_m - 1;\ 2), \quad k_i > 2, \quad i = 1, \ldots, m.$$

3.35. *Indicaciones.* Hágase uso de la desigualdad del problema 3.34 y de la propiedad de los coeficientes polinomiales

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} = \sum_{s=1}^{m} \frac{(n-1)!}{n_1! \ldots n_{s-1}!\,(n_s - 1)!\,n_{s+1}! \ldots n_m!},$$
$$n = n_1 + \ldots + n_m.$$

3.36. Numeremos los vértices del 13-grafo con los números del 0 al 12 inclusive. Una arista que une los vértices con los números i y j se pintará de color rojo, siempre que $i - j$ sea comparable con ± 2 ó ± 3 respecto del módulo 13, y las demás aristas se pintarán de color azul (fig. 3.1′ y 3.2′).

3.37. De los problemas 3.32 y 3.36 se deduce que

$$R\ (3,\ 4;\ 2) < R\ (3,\ 3;\ 2) + R\ (2,\ 4;\ 2) = 10,$$

$$R\ (3,\ 5;\ 2) > 13, \quad R\ (3,\ 5;\ 2) \leqslant R\ (2,\ 5;\ 2) + R\ (3,\ 4;\ 2) < 15.$$

Por eso, resultan válidas las igualdades $R\ (3,\ 4;\ 2) = 9$ y $R\ (3,\ 5;\ 2) = 14$.

3.38. Numeremos los vértices del 17-grafo con los números del 0 al 16 inclusive. Vamos a pintar la arista que une los vértices con los números i y j de color rojo, siempre que la diferencia $i - j$ sea un residuo cuadrático respecto

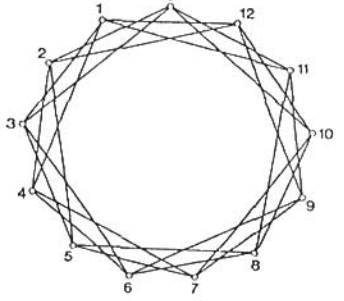


Fig. 3.1′.

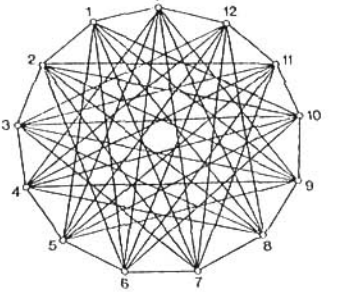


Fig. 3.2′.

del módulo 17, y en color azul, en el caso contrario. Supongamos que el subgrafo con vértices a, b, c, d es cromático. Designemos: $m = (a - c)/(a - b)$ y $n = (a - d)/(a - b)$. Entonces, los números m, n, $m - 1$, $n-1$, $m - n$ deben ser simultáneamente cuadráticos respecto del módulo 17, lo que es imposible, puesto que los residuos cuadráticos respecto del módulo 17 son los números 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16.

3.39. Del problema 3.38 se deduce que $R\ (4,\ 4;\ 2) > 17$. Por otra parte, de la desigualdad del problema 3.32 obtenemos una estimación superior:

$$R\ (4,\ 4;\ 2) \leqslant R\ (3,\ 4;\ 2) + R\ (4,\ 3;\ 2) = 18.$$

Comparando estas dos desigualdades, encontramos $R\ (4,\ 4;\ 2) = 18$.

3.40. Supongamos que las aristas del n-grafo completo se pintan casualmente en dos colores, con la particularidad de que la probabilidad de que una arista se pinte en color rojo es igual a p, y en color azul, a $1 - p$. Designemos por $P\ (A)$ la probabilidad del suceso A y por $M\ (\xi)$, la esperanza matemática de la magnitud aleatoria ξ. Para una k-muestra $i_1, \ldots, i_k$ y una l-muestra $j_1, \ldots, j_l$ arbitrarias de $1, \ldots, n$ denotemos con $\xi_{i_1, \ldots, i_k}$ una magnitud aleatoria que toma el valor uno, si todas las aristas del grafo con vértices $i_1, \ldots, i_k$ están pintadas de rojo, y el valor cero, en el caso contrario; con $\eta_{j_1, \ldots, j_l}$ una magnitud aleatoria que toma el valor uno, si todas las aristas del grafo con vértices $j_1, \ldots, j_l$ están pintadas de azul y el valor nulo, en el caso contrario:

$$\xi = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \xi_{i_1, \ldots, i_k} + \sum_{j_1, \ldots, j_l} \eta_{j_1, \ldots, j_l},$$

donde la sumación se realiza respecto de toda clase de k y l-muestras de $1, \ldots, n$.

Calculemos la esperanza matemática ξ, aprovechando el hecho de que la esperanza matemática de una suma de magnitudes aleatorias es igual a la suma de las esperanzas matemáticas de dichas magnitudes:

$$M(\xi) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} M(\xi_{i_1, \ldots, i_k}) + \sum_{j_1, \ldots, j_l} M(\eta_{j_1, \ldots, j_l}) =$$

$$= \sum_{i, \ldots, i_k} p(\xi_{i_1, \ldots, i_k} = 1) + \sum_{j_1, \ldots, j_l} p(\eta_{j_1, \ldots, j_l} = 1) =$$

$$= C_n^k p^{C_k^2} + C_n^l (1-p)^{C_l^2}.$$

De la hipótesis del problema se desprende que $M(\xi) < 1$.

Si ξ no asume el valor igual a cero, entonces

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{C_n^k + C_n^l} ip(\xi = i) > \sum_{i=1}^{C_n^k + C_n^l} p(\xi = i) = 1,$$

lo que contradice la hipótesis del problema.

Por consiguiente, la magnitud aleatoria ξ puede tomar un valor igual a cero, es decir, existe tal coloración de las aristas del n-grafo para la cual todos los k-subgrafos no son cromáticos rojos y todos los l-subgrafos no son cromáticos azules. Por eso tiene lugar la desigualdad $R(k, l; 2) > n$.

3.41 Del problema 3.40 se deduce que si un número n satisface la desigualdad $C_n^k p^{C_k^2} + C_n^k (1-p)^{C_k^2} < 1$, $0 < p < 1$, entonces $R(k, k; 2) > n$.

Sirviéndonos de la valoración para los coeficientes binomiales $C_n^k < (c_1 n/k)^k$, donde $c_1 > 0$ es una constante, y poniendo $p = 1/2$, $n = k2^{k/2}/(2c)$, tendremos la desigualdad requerida

$$C_n^k p^{C_k^2} + C_n^k (1-p)^{C_k^2} < \left(\frac{c_1 n}{k}\right)^k \frac{2}{2^{C_k^2}} < 1.$$

3.42. Observemos que si todos los cuadriláteros compuestos de los vértices del polígono n dado son convexos, entonces también convexo será el propio polígono n.

Sea $N = R(n, 5; 4)$ y supongamos que están dados N puntos en un plano, de los cuales cualesquiera tres no yacen en una misma recta. Dividamos el C_N^4-conjunto de cuadriláteros en dos clases: convexos y no convexos. Entonces, de acuerdo con el teorema de Ramsey, existen o bien n puntos tales que todos los cuadriláteros con vértices en estos puntos son convexos, o bien existen cinco puntos tales que todos los cuadriláteros con vértices en estos puntos son no convexos. Lo último no es posible.

TABLAS Y ESQUEMAS COMBINATORIOS

§ 1. Matrices especiales

4.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2. Cada fila y cada columna de esta matriz contiene una unidad. Intercambiando las filas y columnas, obtendremos una matriz en cuya diagonal principal se encontrarán sólo unidades. Su permanente es igual a 1.

4.3. Para la matriz A de la permutación $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ en la expresión, $\det A = \sum (\pm)\, a_{1,1}, \ldots, a_{1_n n}$ solamente un término, $a_{h_1 1} a_{h_2 2} \ldots a_{h_n n}$, es *distinto de cero. Dicho término es igual a uno e integra la suma con el signo* +, si la permutación es par y con el signo —, si la permutación es impar. La respuesta es: $\det A = 1$, si la permutación es par; -1, si la permutación es impar.

4.4. per $A = 24$.

4.5. per $A = 8$.

4.6. $2^{(n^2+n)/2}$. *Resolución.* Por encima de la diagonal principal y en la misma diagonal hay en la matriz $n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = n(n+1)/2$ *elementos. Cada uno de ellos puede ser o bien cero, o bien la unidad. En total* existen $2^{(n^2+n)/2}$ posibilidades. Los elementos por debajo de la diagonal se determinan unívocamente, en virtud de la simetría.

4.7. $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$, donde $n \geqslant 2k$. 4.8. $n!$. 4.9. $\binom{m}{r}\binom{n}{r}$.

4.10. Sea A una de tales matrices y supongamos que t elementos en ella son iguales a -1. Entonces, existen en la misma $t + r$ elementos iguales a $+1$, y a $2t + r = n^2$, de donde $t = (n^2 - r)/2$. Por consiguiente, el número de matrices mencionadas es igual a cero, siempre que $n^2 - r$ sea impar. En el caso contrario la respuesta será: $\binom{n^2}{(n^2-r)/2}$.

4.11. $\binom{n}{r}^n$. 4.12. 2^{n^2-n+1}.

4.13. $\binom{(n^2-n)/2}{k/2} + \binom{(n^2-n)/2}{(k-n)/2}$.

4.14. $\binom{n(n-1)/2}{k}\binom{n(n-1)/2}{l}$. El cálculo da 90.

4.15. $\binom{10}{7}\binom{5}{2}^5 = 12 \cdot 10^6$. 4.16. $\binom{r}{l}\binom{n-r}{m-l}$.

4.17. Todos los 6 términos del determinante no pueden tener un mismo signo (véase el problema 4.29). Si 5 términos del determinante tienen un mismo signo y el sexto término tiene otro, el determinante será par. El resultado análogo se obtiene en el caso cuando 4 términos tienen un mismo signo, y dos, otro signo, o bien cuando la cantidad de términos con signos opuestos es igual.

4.18. Existen $\binom{n}{r}^m$ matrices que en cada una de las primeras m filas contienen r unidades, y $\binom{n}{q}^{n-m}$ matrices, las cuales contienen en cada una de $n-m$ filas q unidades. El número buscado de (0, 1)-matrices es igual a $\binom{n}{r}^m \binom{n}{q}^{n-m}$.

4.19. $\binom{n-1}{r}^m \binom{n-1}{q}^{n-m}$.

4.20. Existen $\binom{m}{s}$ diferentes columnas de m-sitios ocupadas por ceros y unidades, en cada una de las cuales hay exactamente s unidades. A partir de tales columnas pueden formarse $\binom{m}{s}^r$ matrices de dimensión $m \times r$. Luego, se tienen $\binom{m}{k}^{(n-r)}$ matrices de dimensión $m \times (n-r)$, cada una de las cuales contiene exactamente k unidades. Tomando cualquiera de las citadas $m \times r$ matrices y agregándole $(n-r)$ columnas de cualquier $m \times (n-r)$ matriz, obtendremos la matriz buscada de dimensión $m \times n$. Por consiguiente existen $\binom{m}{s}^r \binom{m}{k}^{(n-r)}$ matrices de este tipo.

4.22. Dispongamos los números de un modo tal que $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Entonces, para $i \geqslant j$, tenemos $b_i \leqslant b_j$; esto significa que $a_{ij} = 0$ $(i \geqslant j)$, es decir, en la diagonal principal y por debajo de ésta figuran los ceros. El permanente de tal matriz es igual a cero, puesto que en cada término de la suma per $A = \sum a_{1i_1} \ldots a_{ni_n}$ el elemento a_{ni_n} (de la última fila en la matriz) es igual a cero.

4.23. per $A = 9$.

4.24. a) 0; b) 1; c) 8; d) 44; e) 11; f) 10.

4.25. El resultado se desprende de las definiciones de per A y de det A; per A y det A son sumas algebraicas de unos mismos sumandos, mas en per A todos los sumandos son no negativos, mientras que en det A pueden haber también negativos.

4.26. La matriz A^2 se compone de los elementos $c_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \ldots + a_{in}a_{nj}$. Por cuanto $a_{pq} \geqslant 0$, entonces para $A^2 = 0$, es decir, para $c_{ij} = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, es necesario y suficiente que $a_{ih}a_{hj} = 0$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$. Esta condición es equivalente (dado que $a_{pq} \geqslant 0$) a la siguiente: $\sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ih}a_{hj} \right) = 0$, es decir, a la condición $\sum_{h=1}^{n} b_h a_h = 0$.

4.27. El determinante no puede ser igual a 6, de lo contrario el producto de tres de sus términos $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ sería igual al producto de los tres términos restantes. Pero, el primero de estos productos es igual al producto de todos los nueve elementos de la matriz, y el segundo, al mismo producto, pero con el signo opuesto. El determinante no es igual a 5 (véase el problema 4.17,) y el determinante, en el cual la diagonal principal está ocupada por -1 y los demás lugares, por $+1$, es igual a 4.

4.28. Desarrollando per B_n según la primera fila, obtendremos per $B_n = 1 \cdot \text{per}\, B_{n-1} + 1 \cdot \text{per}\, C_{n-1}$, donde

$$C_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Al desarrollar per C_{n-1} según la primera columna, obtendremos per $C_{n-1} = 1 \cdot \text{per}\, B_{n-2}$. De aquí, per $B_n = \text{per}\, B_{n-1} + \text{per}\, B_{n-2}$.

4.29. $p_n = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$. Si, por lo menos para un solo k, $i_k = k$, entonces $a_{hi_k} = a_{hh} = 0$, y el producto que contiene a_{hh} es igual a 0. Los productos, en los cuales $i_k \neq k$ $(k = 1, \dots, n)$, no contienen elementos de la diagonal principal y, por tanto, son iguales a 1. Su número es igual al número de *tales permutaciones* $(i_1, \dots, i_n)$ en las cuales $i_k \neq k$ $(k = 1, \dots, n)$. De aquí se deduce que la fórmula en las condiciones del problema es lícita.

4.30. a) sí; b) no.

4.31. Cada una de las restantes $(n - 1)$ filas es ortogonal a la primera, por consiguiente, contiene $n/2$ unidades y $n/2$ menos-unidades. En total se tienen $n + (n - 1)\, n/2 = n\,(n + 1)/2$ unidades.

4.33. d) 5. La traza es igual a 0; el rango de frontera, 5; la α-anchura, *siendo* $\alpha = 1, 2, 3, y\ 4$, *es igual a* 2, 3, 4 *y* 5, *respectivamente*.

4.34. El grupo de 24-ésimo orden. De elemento del grupo sirve el producto de cualquier permutación de las filas primera y tercera por cualquier permutación de las filas segunda, cuarta, quinta y por cualquier permutación de la 1ª y 4ª columnas.

4.35. No varían las magnitudes indicadas en a), c), f), h); a) es obvio; c) se deduce de la definición de per A; f) $\det(A^2) = (\det A)^2$, y $\det A$ se multiplica, al permutar las filas o las columnas, por $+1$ ó -1; h) se desprende del teorema de álgebra.

Las magnitudes citadas en b), d), e), g), i), pueden variar al realizar las permutaciones de las filas (o de las columnas), lo que se ve de los ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ \text{traza}\ A = 1;\ \det A = -1;\ \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \text{per}\,(A^2) = 3;$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \text{traza}\ B = 2;\ \det B = 1;\ \lambda_{1,2} = 1;$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{per}\,(B^2) = 1;$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{rango}\,(C^2) = 1;$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{rango}\,(D^2) = 0.$$

4.36. Siete matrices, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Rectángulos y cuadrados latinos

4.37. N (2, 9) = 133496.

4.38. Numeremos las figuras de la primera fila con las cifras 1, 2, 3, 4. Al igual que en el problema 4.37, N (2, 4) = 9:

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	4	1	3	2	1	4	3	3	4	1	2	3	4	2	1
				1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
				3	1	4	2	4	1	2	3	4	3	1	2	4	3	2	1

4.39. A título de tercera fila podemos tomar cualquiera de las siguientes:

3 1 5 2 4, 3 4 5 1 2, 3 5 1 2 4, 3 5 2 1 4, 4 1 5 2 3,
4 1 5 3 2, 4 5 1 2 3, 4 5 1 3 2, 4 5 2 1 3, 5 1 2 3 4,
5 4 1 2 3, 5 4 1 3 2, 5 4 2 1 3.

4.40. a) 4; b) 2.

4.41. Siempre exactamente mediante un solo método, puesto que cada columna de la novena fila se completa con elementos que no figuraban en las filas anteriores.

4.42. N (3, 5) = 552.

4.43. Divídase en m^2 cuadrados el campo y siémbrense las variedades de trigo de una manera tal que cada variedad sea usada exactamente una vez en cada fila y exactamente una vez en cada columna de la partición de la parcela. De este modo, a título de esquema para este experimento sirve un cuadrado latino de orden m.

4.44. El coste máximo que se busca es igual a 80, y el cuadrado que se busca tiene la forma (una de las soluciones)

2	3	5	10
10	5	3	2
3	2	10	5
5	10	2	3

4.45. La tabla de torneo tiene la forma (una de las soluciones)

·	2	3	4	5	1
2	·	4	5	1	3
3	4	·	1	2	5
4	5	1	·	3	2
5	1	2	3	·	4
1	3	5	2	4	·

Si en todas las casillas de la diagonal principal ponemos el número 6, se obtendrá un cuadrado latino simétrico de orden 6.

4.46.

1	2	3	4	5		1	2	3	4	5	
2	3	4	5	1		3	4	5	1	2	
3	4	5	1	2		5	1	2	3	4	
4	5	1	2	3		2	3	4	5	1	
5	1	2	3	4		4	5	1	2	3	

Todas las filas del cuadrado latino cíclico se obtienen a partir de la primera fila por medio de toda clase de desplazamientos cíclicos. Lo mismo es válido para cualquier otro cuadrado latino cíclico del mismo orden. Esto quiere decir que

los dos cuadrados citados difieren sólo en el orden de las filas, razón por la cual son isomorfos.

4.47. Tomemos los cuadrados de orden 2:

$$A: \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \qquad B: \begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

Formemos de ellos un cuadrado de orden 4:

$$\begin{matrix} A & B \\ B & A \end{matrix}: \text{ es decir, } \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

4.48. La permutación (1 2) transforma un cuadrado en otro.

4.49. El isomorfismo del primero y segundo cuadrados está dado por (1 2) × (1 2) × (1 2), y el del primero y tercero por (1 2 3) × (1 2 3) × e, donde e es una sustitución idéntica.

4.50. Aplicando sucesivamente las permutaciones de las columnas, filas y elementos, obtendremos el cuadrado B, isomorfo al cuadrado dado A:

$$B: \begin{matrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{matrix}$$

4.51. En el primer cuadrado cada fila se obtiene a partir de la fila antecedente (y la primera fila, de la última) mediante la permutación (0 1 2 3) con un ciclo. En el segundo cuadrado cualquier fila se obtiene de cualquier otra fila mediante una permutación con dos ciclos, por ejemplo, (0 1) (2 3), o bien (0 2) (1 3), o bien (0 3) (1 2).

4.52. Los automorfismos del cuadrado los constituirán, en particular, las siguientes permutaciones

α_1: (1 2 3) × (1 3 2) × e; e es una permutación idéntica;
α_2: (1 2) × (1 2) × (1 3);
α_3: (1 3) × (1 3) × (1 2);
α_4: (2 3) × (2 3) × (2 3);
α_5: (1 2 3) × (1 2 3) × (1 2 3);
α_6: (1 3 2) × (1 3 2) × (1 3 2).

4.53. Renumeremos al azar los elementos. Esto puede hacerse por medio de $4! = 24$ métodos. Pongamos cualquier fila en el primer lugar (4 métodos). Permutemos las columnas de un modo tal que en la primera fila se obtenga 4123. Luego, cambiemos de lugar la 2ª, 3ª y 4ª filas de tal modo que se obtenga 4123 en la primera columna. El cuadrado obtenido coincide con el de partida. Por cuanto la transformación mencionada puede realizarse mediante $24 \times 4 = 96$ métodos, se tienen en total 96 automorfismos. En lugar de todos los 96 casos resulta suficiente analizar los siguientes 6:

a) los elementos 1, 2, 3, 4 no cambian, y en lugar de la 1ª fila se pone la 2ª, 3ª ó 4ª (3 casos);

b) con los elementos 1, 2, 3, 4 se realiza una de las permutaciones (1 2), (1 3), (1 4), mientras que la 1ª fila queda en su lugar (3 casos). (Efectivamente, cada una de las 96 transformaciones es el resultado de realizar sucesivamente algunas de las 6 transformaciones mencionadas.)

4.54. Si el par ij se halla en el k-ésimo grupo, entonces en el cuadrado latino $a_{ij} = a_{ji} = k$:

0	1	2	3	4	5
1	0	4	2	5	3
2	4	0	5	3	1
3	2	5	0	1	4
4	5	3	1	0	2
5	3	1	4	2	0

4.55. Supongámos que la primera fila es 0 1 2 . . . p. Las otras filas se obtienen realizando desplazamientos cíclicos; la i-ésima fila comienza por i (debido a la simetría), lo que quiero decir que se obtiene de la 1ª fila realizando el desplazamiento cíclico en $i - 1$ unidades. Por consiguiente, para los elementos de la i-ésima fila tenemos $a_{ij} \equiv a_{1j} + (i - 1)$, es decir, $a_{ij} \equiv a_{1j} + a_{i1} \pmod p$. El cuadrado latino es una tabla de sumación del grupo cíclico de residuos respecto del módulo p.

4.56. Sean $b_1, \ldots, b_p$ diferentes elementos de un cuadrado latino $\{a_{ij}\}$ $(i, j = 1, \ldots, p)$. Definamos la operación $b_i b_j = a_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, p)$. En cada fila del cuadrado latino $a_{ij} \neq a_{ik}$ $(j \neq k)$. Por cuanto p ecuaciones $b_i x = a_{ij}$ $(j = 1, \ldots, p)$ tienen p diferentes soluciones $x = b_1, \ldots, x = b_p$, cada ecuación, pues, es univocamente resoluble. De un modo análogo se demuestra la resolubilidad unívoca de las ecuaciones $y b_j = a_{ij}$ $(i = 1, \ldots, p)$. Por consiguiente, el conjunto $\{b_1, \ldots, b_p\}$ con la tabla de multiplicar $b_i b_j = a_{ij}$ es un casigrupo.

4.57. La unicidad de las soluciones de las ecuaciones $ax = b$ e $ya = b$ predetermina que cada elemento en cada fila y en cada columna se encuentra exactamente una sola vez.

4.59. 196.

4.60. a) Los nombres de las cartas forman un cuadrado latino, y los nombres de los palos, otro cuadrado que es ortogonal con relación al primero. He aquí una de las soluciones:

B bastos	*T* copas	*D* espadas	*K* oros
D oros	*K* espadas	*B* copas	*T* bastos
K copas	*D* bastos	*T* oros	*B* espadas
T espadas	*B* oros	*K* bastos	*D* copas

b) Es imposible, puesto que de esta condición se deduce que en una diagonal todas las cuatro cartas han de tener un color igual, y en tal caso los palos en las diagonales se repetirán.

c)

D copas	*K* bastos	*B* oros	*T* espadas
B bastos	*T* copas	*D* espadas	*K* oros
T oros	*B* espadas	*K* copas	*D* bastos
K espadas	*D* oros	*T* bastos	*B* copas

4.61.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	1	5	6	4	8	9	7		3	1	2	6	4	5	9	7	8
	3	1	2	6	4	5	9	7	8		2	3	1	5	6	4	8	9	7
	4	5	6	7	8	9	1	2	3		7	8	9	1	2	3	4	5	6
A:	5	6	4	8	9	7	2	3	1	*B*:	9	7	8	3	1	2	6	4	5
	6	4	5	9	7	8	3	1	2		8	9	7	2	3	1	5	6	4
	7	8	9	1	2	3	4	5	6		4	5	6	7	8	9	1	2	3
	8	9	7	2	3	1	5	6	4		6	4	5	9	7	8	3	1	2
	9	7	8	3	1	2	6	4	5		5	6	4	8	9	7	2	3	1

B es un cuadrado latino, ortogonal al cuadrado A.

4.62.
$$\begin{matrix} 0&1&2 \\ 1&2&0 \\ 2&0&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0&1&2 \\ 2&0&1 \\ 1&2&0 \end{matrix}$$

4.63.
$$\begin{matrix} 0&1&2&3&4 \\ 1&2&3&4&0 \\ 2&3&4&0&1 \\ 3&4&0&1&2 \\ 4&0&1&2&3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0&1&2&3&4 \\ 2&3&4&0&1 \\ 4&0&1&2&3 \\ 1&2&3&4&0 \\ 3&4&0&1&2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0&1&2&3&4 \\ 3&4&0&1&2 \\ 1&2&3&4&0 \\ 4&0&1&2&3 \\ 2&3&4&0&1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0&1&2&3&4 \\ 4&0&1&2&3 \\ 3&4&0&1&2 \\ 2&3&4&0&1 \\ 1&2&3&4&0 \end{matrix}$$

4.64.
$$\begin{matrix} 0&1&2&3 \\ 1&0&3&2 \\ 2&3&0&1 \\ 3&2&1&0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0&2&3&1 \\ 1&3&2&0 \\ 2&0&1&3 \\ 3&1&0&2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0&3&1&2 \\ 1&2&0&3 \\ 2&1&3&0 \\ 3&0&2&1 \end{matrix}$$

4.65. La primera fila de cada cuadrado es igual, mientras que cada fila siguiente se obtiene a partir de la anterior mediante un mismo desplazamiento cíclico en k, donde para el primer cuadrado $k = 1$, para el segundo $k = 2$, para el tercero $k = 4$, para el cuarto $k = 5$, para el quinto $k = 7$ y para el sexto $k = 8$.

4.66. De los cuadrados $\begin{matrix} 0&1&2 \\ 1&2&0 \\ 2&0&1 \end{matrix}$ y $\begin{matrix} 0&3 \\ 3&0 \end{matrix}$ obtenemos A y de los cuadrados $\begin{matrix} 0&1 \\ 1&0 \end{matrix}$ y $\begin{matrix} 0&2&4 \\ 2&4&0 \\ 4&0&2 \end{matrix}$ obtenemos B:

A:
$$\begin{matrix} 0&1&2&3&4&5 \\ 1&2&0&4&5&3 \\ 2&0&1&5&3&4 \\ 3&4&5&0&1&2 \\ 4&5&3&1&2&0 \\ 5&3&4&2&0&1 \end{matrix}$$

B:
$$\begin{matrix} 0&1&2&3&4&5 \\ 1&0&3&2&5&4 \\ 2&3&4&5&0&1 \\ 3&2&5&4&1&0 \\ 4&5&0&1&2&3 \\ 5&4&1&0&3&2 \end{matrix}$$

Estos cuadrados no son ortogonales.

4.67. Todos los cuadrados se obtienen a partir del primero permutando las filas, al igual que en la resolución del problema 4.65. Por consiguiente, son isomorfos.

4.68. Por hipótesis, los cuadrados k-ésimo y l-ésimo se definen del modo siguiente:

$$a_{ij}^{(k)} = ik + j \pmod p, \qquad a_{ij}^{(l)} = il + j \pmod p. \tag{4.1'}$$

Analicemos los pares de elementos

$$(ik + j,\ il + j) = (i_1k + j_1,\ i_1l + j_1). \tag{4.2'}$$

De (4.2') se deduce

$$ik + j \equiv i_1k + j_1 \pmod p, \qquad il + j \equiv i_1l + j_1 \pmod p,$$

o bien

$$j - j_1 \equiv k\,(i_1 - i) \pmod p, \qquad j - j_1 \equiv l\,(i_1 - i) \pmod p. \tag{4.3'}$$

De (4.3') obtenemos $k\,(i_1 - i) \equiv l\,(i_1 - i) \pmod p$. Esta comparación es equivalente a la igualdad

$$(k - l)\,(i_1 - i) = mp, \qquad m \text{ es entero}, \tag{4.4'}$$

donde $1 \leqslant |\,k - l\,| \leqslant p - 2$, $|\,i_1 - i\,| \leqslant p - 1$.

Por hipótesis, p es primo. Por cuanto el producto que figura en el primer miembro de (4.4') se divide por el número primo p, entonces uno de los factores se divide por este número. Pero, $1 \leqslant |\,k - l\,| \leqslant p - 2$, por consiguiente, $k - l$ no se divide por p. En tal caso $i_1 - i$ ha de dividirse por p. Esto es posible sólo cuando $i_1 = i$. Si $i_1 = i$, de la relación (4.3') se deduce que $j_1 = j$. Es decir, los pares $(a_{ij}^{(k)}, a_{ij}^{(l)})$ y $(a_{i_1 j_1}^{(k)}, a_{i_1 j_1}^{(l)})$ coinciden sólo en el caso en que $i = i_1$, $j = j_1$.

4.69. Escribamos los elementos del grupo G en forma de los vectores (α, β, γ), donde $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,1$; $\gamma = 0,1$. La operación de grupo es la suma respecto del mod 2. Denotemos, para abreviar, el elemento (α, β, γ) con el número $m = \alpha + 2\beta + 4\gamma + 1$. Entonces, los elementos del grupo se designarán con los números $m = 1, 2, \ldots, 8$. Los automorfismos del grupo G se escribirán en forma de las permutaciones $\begin{pmatrix} 1\,2 \ldots 8 \\ b_1 \ldots b_8 \end{pmatrix}$. Elijamos un automorfismo φ tal que todas las potencias suyas φ, φ^2, φ^3, $\ldots$, φ^8 sean diferentes y cada una de ellas deje en su lugar sólo la unidad. Por ejemplo, $\varphi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 1\,5\,2\,6\,7\,3\,8\,4 \end{pmatrix}$. A título de cuadrado latino K_0 tomemos la tabla de multiplicar del grupo G, y a título de K_1 una tabla que se obtiene de K_0 por permutación de las filas con ayuda de la permutación φ^i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Entonces, K_0, K_1, K_2, $\ldots$ $\ldots$, K_6 será el conjunto de cuadrados latinos ortogonales que se busca. En efecto, supongamos que en K_p y en K_q $(p \neq q)$ se han encontrado dos pares iguales:

$$(a_{ij}^{(p)}, a_{ij}^{(q)}) = (a_{i_1 j_1}^{(p)}, a_{i_1 j_1}^{(q)}). \tag{4.5'}$$

Por cuanto cada cuadrado es una tabla de sumar, entonces $a_{ij}^{(s)} = a_{i1}^{(s)} + a_{1j}^{(s)}$ $(s = 0, 1, \ldots, 6)$. Ya que la primera fila en todos los cuadrados es $1, 2, \ldots, 8$, entonces $a_{1j}^{(p)} = a_{1j}^{(q)} = j$, $a_{1j_1}^{(p)} = a_{1j_1}^{(q)} = j_1$. Por cuanto la primera fila en K_s se obtiene a partir de la columna $1\ 2 \ldots 8$ en K_0 con ayuda de la permutación φ^s, entonces $a_i^{(s)} = \varphi^{(s)}(i)$, $a_{i1}^{(s)} = \varphi^s(i_1)$ $(s = 0, 1, \ldots, 6)$. Ahora, de (4.5') se deduce

$$\varphi^p(i) + j = \varphi^p(i_1) + j_1, \tag{4.6'}$$

$$\varphi^q(i) + j = \varphi^q(i_1) + j_1.$$

De aquí, $\varphi^p(i) - \varphi^p(i_1) = \varphi^q(i) - \varphi^q(i_1)$. Por cuanto φ^s es un automorfismo, tenemos $\varphi^s(a) - \varphi^s(b) \equiv \varphi^s(a - b)$. Por consiguiente, $\varphi^p(i - i_1) = \varphi^q(i - i_1)$. Tenemos: $0 \leqslant p \leqslant 6$. Sea, por ejemplo, $p > q$. Aplicando a ambos miembros de la igualdad φ^{p-q}, obtenemos

$$\varphi^{p-q}(i - i_1) = i - i_1, \qquad 1 \leqslant p - q \leqslant 6. \tag{4.7'}$$

Por cuanto el automorfismo φ^s $(1 \leqslant s \leqslant 6)$ deja en su lugar sólo la unidad del grupo (si la operación de grupo es sumación, entonces sólo deja el cero del grupo), de (4.7') se deduce que $i = i_1$. En tal caso de (4.6') se deduce que $j = j_1$. Es decir, los pares diferentes no pueden coincidir. Esto significa que los cuadrados K_p y K_q son ortogonales.

4.70. El método de construir un conjunto completo de cuadrados latinos y la demostración de su ortogonalidad están descritos en la resolución del problema 4.69.

4.72. El campo de Galois $GF(n)$ de $n = 3^2$ elementos. Como elementos del campo tomemos

$$a_0 = 0, \quad a_1 = x^0 = 1, \quad a_2 = x^1 = x, \quad a_3 = x^2 = 2x + 1,$$
$$a_4 = x^3 = 2x + 2, \quad a_5 = x^4 = 2, \quad a_6 = x^5 = 2x, \quad a_7 = x^6 = x + 2,$$
$$a_8 = x^7 = x + 1.$$

Construyamos las matrices de orden $n = 3^2$:

$$C_1 = \begin{pmatrix}
0 & 1 & x & 2x+1 & 2x+2 & 2 & 2x & x+2 & x+1 \\
1 & 2 & x+1 & 2x+2 & 2x & 0 & 2x+1 & x & x+2 \\
x & x+1 & 2x & 1 & 2 & x+2 & 0 & 2x+2 & 2x+1 \\
2x+1 & 2x+2 & 1 & x+2 & x & 2x & x+1 & 0 & 2 \\
2x+2 & 2x & 2 & x & x+1 & 2x+1 & x+2 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 2+x & 2x & 2x+1 & 1 & 2x+2 & x+1 & x \\
2x & 2x+1 & 0 & x+1 & x+2 & 2x+2 & x & 2 & 1 \\
x+2 & x & 2x+2 & 0 & 1 & x+1 & 2 & 2x+1 & 2x \\
x+1 & x+2 & 2x+1 & 2 & 0 & x & 1 & 2x & 2x+2
\end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix}
0 & 1 & x & 2x+1 & 2x+2 & 2 & 2x & x+2 & x+1 \\
x & x+1 & 2x & 1 & 2 & x+2 & 0 & 2x+2 & 2x+1 \\
2x+1 & 2x+2 & 1 & x+2 & x & 2x & x+1 & 0 & 2 \\
2x+2 & 2x & 2 & x & x+1 & 2x+1 & x+2 & 1 & 0 \\
2 & 0 & x+2 & 2x & 2x+1 & 1 & 2x+2 & x+1 & x \\
2x & 2x+1 & 0 & x+1 & x+2 & 2x+2 & x & 2 & 1 \\
x+2 & x & 2x+2 & 0 & 1 & x+1 & 2 & 2x+1 & 2x \\
x+1 & x+2 & 2x+1 & 2 & 0 & x & 1 & 2x & 2x+2 \\
1 & 2 & x+1 & 2x+2 & 2x & 0 & 2x+1 & x & x+2
\end{pmatrix}$$

o bien, al redesignar los elementos, tendremos en definitiva

0	1	3	7	8	2	6	5	4	0	1	3	7	8	2	6	5	4
1	2	4	8	6	0	7	3	5	3	4	6	1	2	5	0	8	7
3	4	6	1	2	5	0	8	7	7	8	1	5	3	6	4	0	2
7	8	1	5	3	6	4	0	2	8	6	2	3	4	7	5	1	0
8	6	2	3	4	7	5	1	0	2	0	5	6	7	1	8	4	3
2	0	5	6	7	1	8	4	3	6	7	0	4	5	8	3	2	1
6	7	0	4	5	8	3	2	1	5	3	8	0	1	4	2	7	6
5	3	8	0	1	4	2	7	6	4	5	7	2	0	3	1	6	8
4	5	7	2	0	3	1	6	8	1	2	4	8	6	0	7	3	5,

etc. Cada cuadrado sucesivo se obtiene del anterior con ayuda de una misma permutación cíclica de las filas 2, 3, . . ., 9.

§ 3. Sistema de ternas de Steiner y juegos semejantes

4.73. a) 123; 145; b) 123; 145; 245; 345 (tres ternas no son suficientes, puesto que en tres ternas están contenidos no más de 9 pares diferentes, mientras que de cinco elementos pueden formarse 10 pares); c) 123; 145; 167; 246; 257; 347; 356.

4.74. a) No; b) no; c) sí.

4.75. De n elementos pueden formarse $n(n-1)/2$ pares; en cada terna hay tres pares, en diferentes ternas hay distintos pares. Esto quiere decir que el número de ternas es igual a $n(n-1)/2 : 3 = n(n-1)/6$.

4.76. Hágase uso del problema 4.75.

4.77. A) Sí; B) sí; C) no.

4.78. Al añadir las ternas de b), obtendremos un sistema de ternas de Steiner de orden 7; la adición de las ternas a), c), d) no da los sistemas de ternas de Steiner, puesto que algunos pares se repiten.

4.79. $(n-1)/2$. Todo elemento integra el par $n-1$: en cada terna, donde se tiene este elemento, figuran dos de estos pares. Esto significa que el elemento figura en $(n-1)/2$ ternas.

4.80. Sea E el conjunto principal del sistema Δ_n y sea S el conjunto principal del sistema Δ_d. Los elementos del conjunto $E \setminus S$ forman $\binom{n-d}{2}$ pares no ordenados; los pares mencionados se encuentran en las ternas del sistema Δ_n que no pertenecen a Δ_d. Cada elemento de S se encuentra con $(n-d)/2$ pares de este género, con la particularidad de que los diferentes elementos no pueden encontrarse con un mismo par de elementos del conjunto $E \setminus S$. Por consiguiente, el número de pares que se encuentran con los elementos del conjunto S es igual a $d(n-d)/2$. Es obvio que este número no sobrepasa el número total de pares, por lo cual $\frac{d(n-d)}{2} \leqslant \binom{n-d}{2}$, de donde se deduce la desigualdad que se demuestra.

4.81. Sea Δ_n un sistema de ternas de Steiner y sean Δ_d y Δ_t los subsistemas de éste. Si $\Delta_d \cap \Delta_t = \Delta = \varnothing$, el teorema es cierto. Sea $\Delta \neq \varnothing$. Designemos con S un conjunto de elementos que se encuentran en las ternas provenientes de Δ. Elijamos arbitrariamente $a \in S$, $b \in S$, $a \neq b$. Entonces, en Δ_n existe la única terna $\{a, b, x\}$ que incluye el par $\{a, b\}$. Por cuanto los elementos a, b pertenecen al conjunto principal del sistema Δ_d, entonces $\{a, b, x\} \in \Delta_d$. De un modo análogo se muestra que $\{a, b, x\} \in \Delta_t$. Por consiguiente, $\{a, b, x\} \in \Delta$. Así pues, para un par arbitrario de elementos provenientes de S existe en Δ una terna que incluye dicho par. Por eso Δ es un sistema de ternas de Steiner, lo que se trataba de demostrar.

4.82.
1	2	3	2	4	5	3	4	7
1	4	6	2	6	7	3	5	6
1	5	7						

4.83. Tipo de entrelazamiento: $T_1 = (2, 3)$ (fig. 4.1').

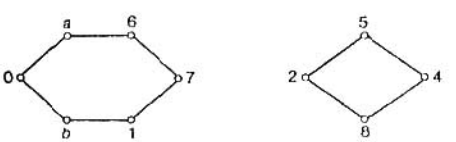


Fig. 4.1'.

4.84. Representemos los tipos de entrelazamiento del elemento 3 con los demás elementos en forma de tabla:

0	1	2	4	5	6	7	8	9	a	b	c
3	1	2	2	2	2	2	1	2	1	1	2	2

donde $T_1 = (2, 3)$ y $T_2 = (5)$. El vector índice: (4, 8).

4.85. $T_1 = (2^4)$; $T_2 = (2^2, 4)$; $T_3 = (2, 3^2)$; $T_4 = (2, 6)$; $T_5 = (3, 5)$; $T_6 = (4^2)$; $T_7 = (8)$.

4.86. La permutación (7 8) convierte un sistema en otro.

4.87. Calculemos las T-tablas de estos sistemas:

$$T_A = \left|\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 4 \\ \hline 4 & 8 & 9 \end{array}\right|; \qquad T_B = \left|\begin{array}{ccc} 6 & 6 & 13 \end{array}\right|$$

Estas tablas son distintas, por lo cual los sistemas no son isomorfos.

4.88. Sí, es un automorfismo.

4.89. Dividamos los elementos en tres conjuntos: 1 2 3; 4 5 6; 7 8 9. El grupo cíclico engendrado por el automorfismo $\alpha = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6)\ (7\ 8\ 9)$ será $\{1, \alpha, \alpha^2\}$. Para mayor comodidad dispongamos las ternas en vertical:

$$\begin{matrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 4. \\ 4 & 7 & 1 & 7 \end{matrix}$$

Aplicando α, obtendremos

$$\begin{matrix} 3 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 5, \\ 5 & 8 & 2 & 8 \end{matrix}$$

y para α^2 tendremos

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 6. \\ 6 & 9 & 3 & 9 \end{matrix}$$

4.90. Tomemos algún sistema de ternas de Steiner Δ_9, por ejemplo b) del problema 4.96, y dividámoslo en grupos sin términos comunes en el interior de cada grupo:

1	2	3	1	4	5	1	6	8	1	7	9
4	6	9	2	8	9	2	4	7	2	5	6
5	7	8	3	6	7	3	5	9	3	4	8

4.91. $3k + 1$. De $n = 6k + 3$ elementos pueden formarse $n\,(n - 1)/6 = (6k + 3)\,(6k + 2)/6 = (2k + 1)\,(3k + 1)$ ternas de Steiner (véase el problema 4.84). En cada grupo están contenidos todos los $6k + 3$ elementos; éstos constituyen $(6k + 3)/3 = 2k + 1$ ternas. Por consiguiente, el número de grupos será $(2k + 1)\,(3k + 1)/(2k + 1) = 3k + 1$.

4.92. Se puede:

1	8	11	1	12	14
2	7	14	3	6	13
3	6	9	3	8	15
4	10	15	4	9	11
2	12	13	5	7	10

4.93. Sí.

4.94. En todo grupo de ternas debe figurar una sola vez cada uno de los $6k+1$ elementos. Esto no es posible, puesto que $6k + 1$ no es divisor de 3.

4.95. Tomemos cualquier sistema de ternas de Kirkman de nueve elementos, por ejemplo, de la respuesta del problema 4.90. Cada grupo de ternas da la composición de las comisiones para 1 día.

4.96. Son automorfismos.

4.97. Todo automorfismo de un sistema de ternas de Kirkman conserva dichas ternas, lo que quiere decir que es un elemento del grupo de automorfismos del sistema de ternas de Steiner.

4.98.
0 1 0 2 0 3 0 4 0 5
2 3 1 4 1 5 1 3 1 2
4 5 3 5 2 4 2 5 3 4

4.99.
0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7
2 7 1 3 1 5 1 7 1 2 1 4 1 6
3 6 4 7 2 4 2 6 3 7 2 3 2 5
4 5 5 6 6 7 3 5 4 6 5 7 3 4

4.100. De 2μ jugadores pueden formarse $2\mu\,(2\mu-1)/2 = \mu\,(2\mu-1)$ diferentes pares. En un día pueden jugar μ pares de 2μ jugadores. Esto significa que en total pueden realizarse $\mu\,(2\mu-1)/\mu = 2\mu-1$ jornadas. En el caso dado 11 jornadas y en cada jornada juegan 6 pares:

N° de jornada										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1 12	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9	1 10	1 11
2 11	3 11	2 12	2 3	2 4	2 5	2 6	2 7	2 8	2 9	2 10
3 10	4 10	4 11	5 11	3 12	3 4	3 5	3 6	3 7	3 8	3 9
4 9	5 9	5 10	6 10	6 11	7 11	4 12	4 5	4 6	4 7	4 8
5 8	6 8	6 9	7 9	7 10	8 10	8 11	9 11	5 12	5 6	5 7
6 7	7 12	7 8	8 12	8 9	9 12	9 10	10 12	10 11	11 12	6 12

Este mismo sistema da el sistema buscado de grupos de pares.

4.101. Por definición, los grupos restantes de pares se obtienen del modo siguiente:

$$T\tau_1 = \tau_2, \quad T\tau_2 = \tau_3, \ \ldots, \ T\tau_{2\mu-2} = \tau_{2\mu-1}, \quad T\tau_{2\mu-1} = \tau_1, \tag{4.8'}$$

es decir, $\tau_i = T^{i-1}\tau_1$ $(i = 1, \ldots, 2\mu-1)$. Por consiguiente, todas las potencias de $T^0, T^1, \ldots, T^{2\mu-2}$ son distintas, y

$$T^{2\mu-1}\tau = \tau. \tag{4.9'}$$

Con una exactitud de hasta la enumeración de los elementos existen solamente dos permutaciones de 2μ elementos que poseen diferentes $T^0, T^1, \ldots, T^{2\mu-1}$, a saber, $(0\ 1\ 2\ \ldots\ 2\mu-1)$ y $(0)\,(1\ 2\ \ldots\ 2\mu-1)$. Para la primera de ellas $T^{2\mu} = E$. Por consiguiente, en virtud de (4.8') y (4.9'),

$$\tau_1 = T^{2\mu}\tau_1 = T\,(T^{2\mu-1}\tau_1) = T\tau_1 = \tau_2.$$

La contradicción obtenida muestra que la primera permutación no da sistemas del tipo cíclico.

4.102. Las tablas correspondientes son:

0	6	1
1	5	6

;

0	6	7

;

1	5	2
2	4	4
4	2	1

;

2	4	2
4	2	4
6	0	1

;

2	4	3
3	3	4

;

6	0	7

.

Entre los sistemas mencionados no hay isomorfos.

4.103. Confeccionando la matriz de los tipos de entrelazamiento del primer sistema, calculamos los vectores índices de sus grupos de pares; véase a).

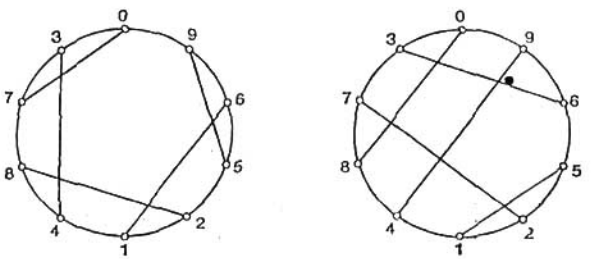


Fig. 4.2'.

Dibujamos los grafos, por ejemplo, $\tau_3 \cup \tau_9 \cup \tau_7$ y $\tau_3 \cup \tau_9 \cup \tau_8$ (fig. 4.2'). Los vectores índices de los grupos de pares para el segundo sistema tienen la forma b);

a)

1	4 4
2	4 4
3	2 6
4	0 8
5	4 4
6	4 4
7	5 3
8	5 3
9	2 6

b)

1	5 3
2	4 4
3	2 6
4	0 8
5	4 4
6	5 3
7	4 4
8	2 6
9	4 4

A los grupos τ_3 y τ_8 con vectores índices (2 6) del primer sistema pueden corresponder solamente los grupos τ_3 y τ_8 con los mismos índices en el segundo sistema, y a los grupos τ_7 y τ_8 con (5 3), solamente los grupos τ_1 y τ_6. Por eso, para el segundo sistema dibujamos los grafos $\tau_3 \cup \tau_6 \cup \tau_1$ y $\tau_3 \cup \tau_8 \cup \tau_6$ (fig. 4.3'). La única permutación que puede traspasar el dibujo izquierdo al derecho es (0 8 9 7 3) (1 5 4 6). Se comprueba directamente que esta permutación es la buscada.

4.104.

0	1	0	2	0	3
2	3	1	3	1	2

Por cuanto los cuatro elementos pueden ser partidos en pares solamente mediante estos tres métodos (empleados en el sistema construido aquí), entonces después de cualquier permutación de dichos elementos obtendremos los mismos tres métodos de partición en pares, es decir, el mismo sistema. Por consiguiente,

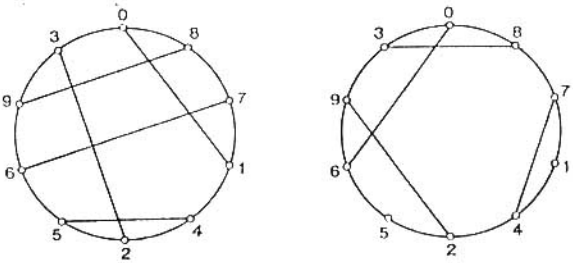


Fig. 4.3'.

cualquier permutación de cuatro elementos es un automorfismo del sistema. Así pues, el grupo de automorfismos buscado es el grupo S_4 de todas las permutaciones de cuatro elementos: su orden es $4! = 24$.

4.105. Sea un sistema

$$\begin{array}{ccccc} 0\,1 & 0\,2 & 0\,3 & 0\,4 & 0\,5 \\ 2\,5 & 3\,1 & 4\,2 & 5\,3 & 1\,4 \\ 3\,4 & 4\,5 & 5\,1 & 1\,2 & 2\,3 \end{array}$$

La permutación $T = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ convierte todo grupo de pares τ_i en el grupo siguiente τ_{i+1}. Esto significa que $T^i\tau_1 = \tau_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; $T^5 = E$. Si φ es un automorfismo del sistema, entonces $\varphi\tau_1 = \tau_{i+1}$ para cierto i $(0 \leqslant i \leqslant 4)$, es decir, $\varphi\tau_1 = T^i\tau_1$, $T^{-i}\varphi\tau_1 = \tau_1$. De aquí, $\psi = T^{-i}\varphi$ es un automorfismo del grupo de pares τ_1. Cualquier automorfismo de este tipo ψ puede ser representado unívocamente en forma de un producto de dos automorfismos, uno de los cuales hace permutar solamente los pares 0 1, 2 5, 3 4 (el grupo de tales automorfismos es isomorfo al grupo de todas las permutaciones de tres elementos) y el otro hace permutar los elementos en cualesquiera de estos tres pares de manera independiente (el grupo de tales automorfismos es un grupo abeliano con las generatrices (0 1), (2 5), (3 4), es decir, es isomorfo al grupo $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$). Así pues, $\Gamma\ (\text{aut}\ \tau_1) = 5 \times 6 \times 8 = 240$.

4.106. La permutación T es, en virtud del problema 4.101, un automorfismo del sistema. También son automorfismos las permutaciones T^2, T^3, ... , $T^{2\mu-1} = E$. Por consiguiente, el grupo de automorfismos contiene un subgrupo cíclico de orden $2\mu - 1$ con elemento generatriz T.

4.107. Agreguemos al 1er grupo el elemento 1; al 2º grupo, el 2, al 3er grupo, el 3. Obtendremos la siguiente sucesión

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 7 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{array}$$

Añadiendo la terna 1 2 3, obtendremos las siete ternas buscadas de Steiner.

4.108.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 7 & 1 & 9 & 1 & 8 & 1 & 2 & 1 & 6 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 6 & 2 & 5 & 2 & 9 & 2 & 8 & 2 & 7 & 3 & 8 & 2 & 4 & 2 & 6 \\ 6 & 7 & 5 & 8 & 6 & 9 & 3 & 5 & 3 & 6 & 3 & 4 & 4 & 9 & 3 & 9 & 3 & 7 \\ 8 & 9 & 7 & 9 & 7 & 8 & 6 & 8 & 4 & 7 & 5 & 9 & 5 & 6 & 5 & 7 & 4 & 8 \end{array}$$

El par (i, j), donde $i, j = 0, \ldots, 9$, $i \neq j$, figura en el a_{ij}-ésimo grupo.

§ 4. Bloque-esquemas

4.110.

a) $v = b = 7$, $k = r = 3$, $\lambda = 1$:

1 2 4
1 3 5
1 6 7
2 3 6
2 5 7
3 4 7
4 5 6

b) $v = b = 13$, $k = r = 4$, $\lambda = 1$:

1 2 3 4
1 5 6 7
1 8 9 10
1 11 12 13
2 5 8 11
2 6 9 12
2 7 10 13
3 5 9 13
3 6 10 11
3 7 8 12
4 5 10 12
4 6 8 13
4 7 9 11

c) $v = 9$, $b = 12$, $r = 4$, $k = 3$, $\lambda = 1$:

1 2 3
1 4 5
1 6 7
1 8 9
2 4 6
2 5 8
2 7 9
3 4 9
3 5 7
3 6 8
4 7 8
5 6 9

4.111. a) No existe. De lo contrario, según el teorema de encaje, el esquema de que se trata podría ser encajado en un esquema simétrico con parámetros $v_1 = 22$, $k_1 = 7$, $\lambda = 2$, el cual no existe de acuerdo con el teorema de Bruck—Ryser—Chowla sobre la existencia de BIB-esquemas simétricos. En efecto, v_1 es par, $k_1 - \lambda = 5$ no es un cuadrado.

d) La resolución es análoga a a): según el segundo de los teoremas citados no existe esquema con los parámetros $v_1 = 43$, $k_1 = 7$, $\lambda = 1$; según el primer teorema, no existe esquema con los parámetros $v = 36$, $b = 42$, $r = 7$, $k = 6$ y $\lambda = 1$.

4.112. a) Es fácil establecer la validez de la siguiente afirmación: sea $v = 6t + 1 = p^n$ y p, un número primo, y sea x una raíz primitiva del campo $GF(p^n)$. En este caso los bloques $(x^0, x^{2t}, x^{4t}), \ldots, (x^t, x^{2t+t}, x^{4t+t}), (x^{t-1}, x^{3t-1}, x^{6t-1})$ forman la base del esquema con los parámetros $v = 6t + 1$, $b = 6t^2 + t$, $r = 3t$, $k = 3$, $\lambda = 1$ y un grupo de automorfismos A que es un grupo aditivo del campo $GF(p^n)$. Observemos que la raíz primitiva de $GF(7)$ es el elemento 3, por consiguiente, la base del bloque-esquema dado está formada por el bloque $t = 1$, $x = 3$ $(x^0, x^2, x^4) = (1, 2, 4)$. El grupo de automorfismos es un grupo cíclico de residuos respecto al módulo 7.

b) La resolución es análoga a la anterior. Al aplicar los razonamientos realizados más arriba, encontramos la base del BIB-esquema dado: $t = 2$, $x = 2$ (1, 3, 9) y $x = (2, 6, 5)$. El grupo de automorfismos es un grupo cíclico de residuos respecto al módulo 13.

4.114. El bloque-esquema tiene por expresión

1 2 4 2 3 4 3 4 5
1 2 5 2 3 6 4 5 6
1 3 5 2 5 6
1 3 6
1 4 6

4.115. *a) Es el bloque-esquema del problema 4.110, a). En efecto, la igualdad de incidencia tiene por expresión*

$$L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_b^2 = (r - \lambda)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_v^2) + \lambda (x_1 + x_2 + \ldots + x_v)^2.$$

Teniendo presente que $v = b = 7$, $k = r = 3$, $\lambda = 1$, obtenemos la igualdad requerida.

4.116. a) Por cuanto $v = 21$ es impar, entonces, de acuerdo con el teorema de Bruck—Ryser—Chowla sobre la existencia de BIB-esquemas simétricos,

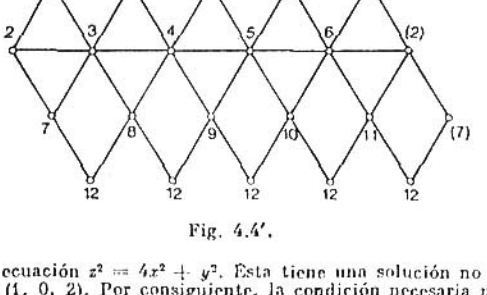


Fig. 4.4'.

llegamos a la ecuación $z^2 = 4x^2 + y^2$. Esta tiene una solución no nula de números enteros (1, 0, 2). Por consiguiente, la condición *necesaria para la existencia* de un bloque-esquema es válida.

b) $v = 15$ es impar. Aplicando el teorema citado, obtenemos, por analogía con lo anterior, la ecuación $z^2 = 4x^2 - 3y^2$, la cual tiene una solución no nula de números enteros (1, 1, 1). Por consiguiente, la condición necesaria de la existencia de un bloque-esquema se cumple.

c) Por analogía con lo anterior obtenemos la ecuación $z^2 = 5x^2 - 4y^2$ y su solución no nula de números enteros (1, 1, 1).

d) Obtenemos la ecuación $z^2 = 7x^2 + 2y^2$ y su solución buscada (1, 1, 3).

4.117. Si por elementos del esquema tomamos los vértices del tetraedro y por bloques, las caras de éste, entonces el tetraedro corresponderá a un BIB-esquema simétrico.

El octaedro es un PBIB-esquema con los parámetros $v = 6$, $b = 8$, $r = 4$, $k = 3$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 4$,

$$p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El cubo es un PBIB(3)-esquema con los parámetros $v=8$, $b=6$, $r=3$, $k=4$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=3$, $n_1=1$, $n_2=3$, $n_3=3$,

$$p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_{jk}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El icosaedro (véase la desarrollante en la fig. 4.4') es un PBIB(3)-esquema con los parámetros $v = 12$, $b = 20$, $r = 5$, $k = 3$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 5$, $n_3 = 5$,

$$p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_{jk}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El dodecaedro es un PBIB(5)-esquema con los parámetros $v = 20$, $b = 12$, $k = 5$, $r = 3$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = 0$, $n_1 = 3$, $n_2 = 6$, $n_3 = 6$, $n_4 = 3$, $n_5 = 1$,

$$p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_{jk}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{jk}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_{jk}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.118. a) Las caras del cubo corresponden a los vértices del octaedro y viceversa. Para el octaedro la matriz de incidencia tiene la forma siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de incidencia del cubo es la matriz transpuesta A^T.

b) Al dodecaedro corresponde el siguiente bloque-esquema: $v = 20$, $b = 12$, $k = 5$, $r = 3$:

D: (1, 2, 3, 4, 5, 6), (5, 6, 11, 16, 17), (9, 10, 12, 13, 19), (1, 7, 8, 4, 3), (3, 7, 6, 16, 15), (20, 17, 19, 12, 11), (1, 2, 4, 9, 10), (7, 8, 14, 15, 18), (20, 18, 17, 16, 15), (2, 5, 11, 12, 10), (4, 8, 9, 13, 14), (20, 19, 18, 14, 13). Definamos D', rigiéndonos por las reglas $b_j \in A_i \Leftrightarrow a_i \in B_j$ en D. Obtendremos un PBIB(2)-esquema que corresponde al icosaedro. Sus parámetros son: $v = 12$, $b = 20$, $r = 5$, $k = 3$. El esquema es de la forma: (1, 2, 3), (1, 4, 5), (3, 8, 9), (8, 9, 12), (5, 10, 11), (1, 3, 4), (1, 5, 6), (2, 4, 9), (7, 8, 12), (7, 11, 12), (1, 2, 6), (2, 6, 7), (4, 5, 10), (6, 7, 11), (9, 10, 12), (2, 3, 8), (2, 7, 8), (4, 9, 10), (5, 6, 11), (10, 11, 12).

c) El tetraedro corresponde al siguiente BIB-esquema: (1, 2, 3), (1, 2, 4), (2, 4, 3), (1, 4, 3). Los parámetros de este esquema, que llamaremos D, son: $v = b = 4$, $r = k = 3$, $\lambda = 2$. Construyamos D' según la regla $a_i \rightleftarrows A_i$; $B_j \rightleftarrows b_j$; $b_j \in A_i \Leftrightarrow a_i \in B_j$ en D. Los bloques de D' tienen por expresión

$$A_1\colon (b_1, b_2, b_4) = (1, 2, 4); \quad A_2\colon (b_1, b_2, b_3) = (1, 2, 3);$$
$$A_3\colon (b_1, b_3, b_4) = (1, 3, 4); \quad A_4\colon (b_2, b_3, b_4) = (2, 3, 4).$$

Para D': $v' = b' = 4$, $r' = k' = 3$, $\lambda' = 2$. El tetraedro es autodual.

4.119. De acuerdo con el teorema de Zinger sobre los bloque-esquemas que se obtienen de las geometrías $PG(n, p^2)$, llegamos a una conclusión de que el bloque-esquema buscado es cíclico y tiene los parámetros: $v = b = 7$, $k = r = 3$, $\lambda = 1$. Por cuanto (0, 1, 3) es el (7, 3, 1)-conjunto de diferencias, entonces el bloque-esquema tendrá por expresión: (0, 1, 3), (2, 3, 5), (4, 5, 0), (1, 2, 4), (3, 4, 6), (5, 6, 1), (6, 0, 2).

4.120. La matriz de incidencia del bloque-esquema del problema 4.119 tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Construimos la matriz de Hadamard, partiendo de la matriz de incidencia citada. Denotemos la matriz de Hadamard buscada con $H = (b_{ij})$, $i, j = 0, 1, \ldots, 4t - 1$. Suponemos $b_{0j} = b_{i0} = 1$; $b_{ij} = 1$, si $a_{ij} = 1$, $b_{ij} = -1$, si $a_{ij} = 0$, $i, j = 1, \ldots, 4t - 1$. En definitiva tenemos

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.121. a) El bloque-esquema tiene la forma: (1, 2, 3), (3, 4, 0), (0, 1, 2), (2, 3, 4), (4, 0, 1). Para definir la relación de conexión resulta cómodo construir el siguiente diagrama (fig. 4.5'): $i = 1$, el par se encuentra en dos bloques (línea ininterrumpida), $i = 2$, el par se encuentra en un bloque (línea ondeada).

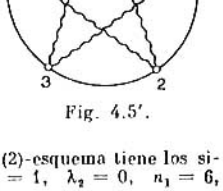


Fig. 4.5'.

Empleando el diagrama, es fácil hallar los parámetros del PBIB(2)-esquema: $v = b = 5$, $k = r = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) El bloque-esquema tiene la forma: (1, 3, 9), (5, 7, 0), (9, 11, 4), (2, 4, 10), (6, 8, 1), (10, 12, 5), (0, 2, 8), (3, 5, 11), (7, 9, 2), (11, 0, 6), (4, 6, 12), (8, 10, 3), (12, 1, 7).

Por analogía con a) puede construirse el diagrama: $i = 1$, el par se encuentra en un solo bloque; $i = 2$, el par está ausente, el PBIB(2)-esquema tiene los siguientes parámetros: $v = b = 13$, $k = r = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $n_1 = 6$, $n_2 = 6$, $p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4.124. El conjunto {1, 4, 5, 6, 7, 11, 16, 17} es un (19, 9, 4)-conjunto de diferencias. El bloque-esquema tiene la siguiente forma:

(1, 4, 5, 6, 7, 11, 16, 17), (8, 11, 12, 13, 14, 18, 4, 5),
(15, 18, 0, 12, 6, 11, 12), (2, 5, 6, 7, 8, 12, 17, 18),
(9, 12, 13, 14, 15, 0, 5, 6), (16, 0, 1, 2, 3, 7, 12, 13),
(3, 6, 7, 8, 9, 13, 18, 0), (10, 13, 14, 15, 16, 1, 6, 7),
(17, 1, 2, 3, 4, 8, 13, 14), (4, 7, 8, 9, 10, 14, 0, 1),
(11, 14, 15, 16, 17, 2, 7, 8), (18, 2, 3, 4, 5, 9, 14, 15),
(5, 8, 9, 10, 11, 15, 1, 2), (12, 15, 16, 17, 18, 3, 8, 9),
(0, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 16), (6, 9, 10, 11, 12, 16, 2, 3),
(13, 16, 17, 18, 0, 4, 9, 10), (1, 4, 5, 6, 7, 11, 16, 17),
(7, 10, 11, 12, 13, 17, 3, 4), (14, 17, 18, 0, 1, 5, 10, 11).

4.125. En PG (2, 3) se contienen 13 puntos y 13 rectas, y en EG (2, 3), 9 puntos y 12 rectas. Por cada punto pasan cuatro rectas y cada recta contiene tres puntos. Por consiguiente, el BIB-esquema que se obtiene de EG (2, 3) tiene por parámetros: $v = 9$, $b = 12$, $r = 4$, $\lambda = 1$. El campo GF (3) contiene los elementos 0, 1 y -1 que se examinan según el módulo 3. Los puntos de PG (2, 3) son:

$p_1 = 1, 0, 0$; $p_6 = 0; 1, 1$; $p_{10} = -1, 1, 1$;
$p_2 = 0, 1, 0$; $p_7 = 1; 1, 1$; $p_{11} = 1, -1, 1$;
$p_3 = 0, 0, 1$; $p_8 = 1, -1; 0$; $p_{12} = 1, 1, -1$;
$p_4 = 1, 1, 0$; $p_9 = 1, 0, -1$; $p_{13} = 0, -1, 1$.
$p_5 = 1, 0, 1$;

Las rectas se obtendrán, si tomamos dos puntos, por ejemplo, p_1 y p_2, y componemos $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$, donde $\lambda_i \in GF$ (3), con la particularidad de que por lo menos uno de λ_i es distinto de cero. La recta que pasa por p_1 y p_2 contiene los puntos p_1 y p_2; $(p_1 + p_2) = p_4$; $(p_1 - p_2) = p_8$. Al realizar este procedimiento con todos los puntos, obtendremos las rectas:

p_1, p_2, p_4, p_8 p_2, p_5, p_7, p_{11} p_4, p_5, p_{10}, p_{13}
p_1, p_3, p_5, p_9 p_2, p_9, p_{10}, p_{12} p_4, p_6, p_9, p_{11}
p_1, p_6, p_7, p_{10} p_3, p_4, p_7, p_{12} p_5, p_6, p_8, p_{12}
$p_1, p_{11}, p_{12}, p_{13}$ p_3, p_8, p_{10}, p_{11} p_7, p_8, p_9, p_{13}
p_2, p_3, p_6, p_{13}

Si tachamos todos los puntos, cuya última coordenada es 0, obtendremos EG (2, 3). Los puntos tachados son p_1, p_2, p_4, p_8. Así pues, tenemos:

p_3, p_5, p_9 p_3, p_{10}, p_{11} p_5, p_7, p_{12} p_6, p_7, p_{10}
p_5, p_6, p_{12} p_3, p_6, p_{13} p_9, p_{10}, p_{12} p_7, p_9, p_{13}
p_5, p_7, p_{11} p_{11}, p_{12}, p_{13}

Si tomamos estos puntos por elementos del bloque-esquema y las rectas de EG (2, 3), por bloques, entonces, al redesignar los elementos

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

obtendremos un BIB-esquema con los parámetros $v = 9$, $b = 12$, $r = 4$, $k = 3$, $\lambda = 1$: (1, 2, 5), (1, 3, 9), (1, 4, 8), (1, 6, 7), (3, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 6, 9), (2, 3, 8), (7, 8, 9), (5, 6, 8), (3, 5, 7), (4, 5, 9).
Es obvio que este esquema es resoluble.

4.126. a) Al plano parcial $r=3$, $k=4$, $t=2$ le corresponde el siguiente PBIB(2)-esquema con los parámetros $v=16$, $b=12$, $r=3$, $k=4$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, $n_1=9$, $n_2=6$, $p_{jk}^1=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $p_{jk}^2=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Este bloque-esquema tiene la forma: (1, 2, 3, 4), (11, 15, 2, 7), (2, 8, 7, 13), (1, 5, 6, 7); (11, 9, 5, 16), (13, 3, 9, 4), (1, 8, 9, 10), (12, 2, 16, 10), (13, 4, 6, 16), (11, 14, 4, 8), (12, 15, 3, 6), (14, 15, 5, 10).

b) Al plano parcial $r = 4$, $k = 5$, $t = 3$ le corresponde el siguiente PBIB(2)-esquema con los parámetros $v = 25$, $b = 20$, $r = 4$, $k = 5$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $n_1 = 16$, $n_2 = 5$, $p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Este bloque-esquema tiene la forma: (1, 2, 3, 4, 5), (1, 6, 7, 8, 9), (1, 10, 11, 12, 13), (1, 14, 15, 16, 17), (18, 2, 6, 9, 21), (18, 3, 7, 11, 22), (18, 4, 8, 12, 23), (18, 5, 9, 13, 24), (19, 2, 7, 14, 24), (19, 3, 8, 15, 21), (19, 4, 9, 16, 22), (19, 5, 6, 17, 23), (20, 2, 11, 16, 23), (20, 3, 12, 17, 24), (20, 4, 13, 14, 21), (20, 5, 10, 15, 22), (25, 6, 11, 15, 24), (25, 7, 12, 16, 21), (25, 8, 13, 17, 22), (25, 9, 10, 14, 23).

4.128. Construyamos el bloque-esquema D_1: (1, 2), (1, 3), (2, 3). Su matriz de incidencia tiene por expresión

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El bloque-esquema D_2 tiene la forma: (1, 2, 3), (1, 4, 7), (1, 5, 9), (1, 6, 8), (4, 5, 6), (2, 5, 8), (2, 6, 7), (2, 4, 9), (7, 8, 9), (3, 6, 9), (3, 4, 8), (3, 5, 7). La matriz de incidencia del esquema que se busca tiene por expresión

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que este esquema es 2-resoluble con los parámetros $v^* = 9$, $b^* = 12$, $k^* = 6$, $r^* = 8$, $\lambda^* = 5$, $\alpha^* = 2$, $n^* = 3$, $\nu^* = 4$, $q_0^* = 3$, $q_1^* = 4$.

4.129. Construyamos el esquema D_1; sus parámetros son: $v_1 = b_1 = 4$, $r_1 = k_1 = 3$, $\lambda_1 = 2$. De manera análoga construimos el esquema D_2. Las ma-

trices de incidencia de estos esquemas son

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix},\quad A^*=\begin{pmatrix}1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1\\1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&0\\1&1&0&1&0&1&1&1&1&0&1&1\\1&1&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1\\0&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0\\1&1&1&0&1&1&0&1&1&0&1&1\\1&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1\\1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0\\1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1\\1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0\\1&1&1&0&1&0&1&1&0&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Los parámetros D_2 son: $v^*=16$, $b^*=12$, $r^*=9$, $k^*=12$, $\lambda_1^*=7$, $\lambda_2^*=6$, $n_1^*=9$, $n_2^*=6$, $\alpha=3$, $n=4$, $\nu=3$, $p_{jh}^1=\begin{pmatrix}4&4\\4&2\end{pmatrix}$; $p_{jh}^2=\begin{pmatrix}6&3\\3&2\end{pmatrix}$. Es fácil ver que el esquema obtenido es 3-resoluble: $q_0^*=8$, $q_1^*=9$.

4.130. (véase fig. 4.6'). Los parámetros del PBIB(3)-esquema que se obtiene son: $v=18$, $b=6$, $r=2$, $k=6$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$, $n_1=1$, $n_2=8$, $n_3=8$,

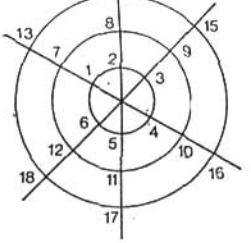


Fig. 4.6'.

$$p_{jh}^1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{pmatrix},$$

$$p_{jh}^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&2&4\\0&4&4\end{pmatrix},\quad p_{jh}^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&4&4\\1&4&2\end{pmatrix}.$$

La condición necesaria de resolubilidad del bloque-esquema ($b\geqslant r+v-1$) no se cumple en el caso dado ($6\not\geqslant 19$), por consiguiente, el bloque-esquema construido no es resoluble.

4.131. (véase fig. 4.7'). En este caso los parámetros del bloque-esquema, el cual constituye un PBIB(3)-esquema son: $v=32$, $b=8$, $k=8$, $r=2$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$, $n_1=1$, $n_2=12$, $n_3=18$,

$$p_{jh}^1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&12&0\\0&0&18\end{pmatrix},\quad p_{jh}^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&4&6\\0&6&12\end{pmatrix},\quad p_{jh}^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&4&8\\1&8&8\end{pmatrix}.$$

La condición necesaria de resolubilidad del bloque-esquema no está cumplida ($8 \not\vdash 33$), quiere decir, el bloque-esquema dado no es resoluble.

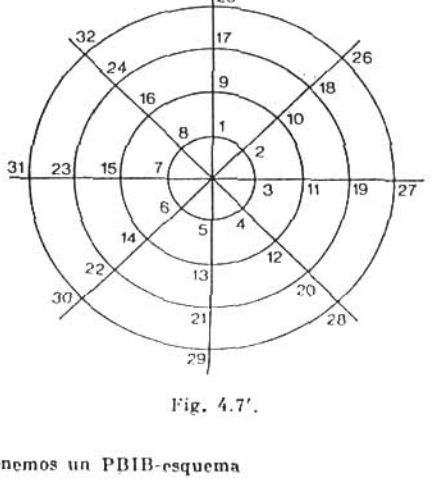


Fig. 4.7'.

4.132. a) Tenemos un PBIB-esquema

$$\begin{Bmatrix}(2,\ 1)\\(3,\ 1)\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}(1,\ 2)\\(3,\ 2)\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}(1,\ 3)\\(2,\ 3)\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}(1,\ 2)\\(1,\ 3)\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}(2,\ 1)\\(2,\ 3)\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}(3,\ 1)\\(3,\ 2)\end{Bmatrix}.$$

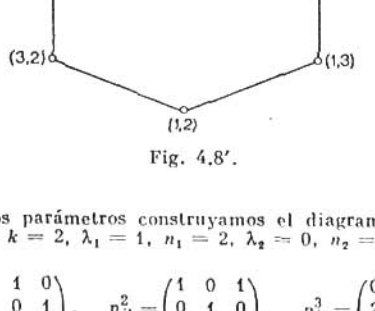


Fig. 4.8'.

Para hallar los parámetros construyamos el diagrama (véase fig. 4.8'): $v = 6$, $b = 6$, $r = k = 2$, $\lambda_1 = 1$, $n_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $n_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$, $n_3 = 1$.

$$p_{jk}^1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad p_{jk}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad p_{jk}^3 = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

b) Tenemos un PBIB(4)-esquema

$$\begin{Bmatrix}(2,\ 1)\\(3,\ 1)\\(4,\ 1)\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}(1,\ 2)\\(3,\ 2)\\(4,\ 2)\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}(1,\ 3)\\(2,\ 3)\\(4,\ 3)\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}(1,\ 4)\\(2,\ 4)\\(9,\ 4)\end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix}(1,\ 2)\\(1,\ 3)\\(1,\ 4)\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}(2,\ 1)\\(2,\ 3)\\(12,\ 4)\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}(3,\ 1)\\(3,\ 2)\\(3,\ 4)\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}(4,\ 1)\\(4,\ 2)\\(4,\ 3)\end{Bmatrix}.$$

Los parámetros son: $v = 12$, $b = 8$, $k = 3$, $r = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$, $n_4 = 1$,

$$p_{jk}^1 = \begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad p_{jk}^2 = \begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$p_{jk}^3 = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad p_{jk}^4 = \begin{pmatrix}0&0&4&0\\0&2&0&0\\4&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

4.133. Tenemos un PBIB(6)-esquema con los parámetros $v = 24$, $b = 12$, $r = 3$, $k = 6$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = 8$, $n_1 = 3$, $n_2 = 6$, $n_3 = 3$, $n_4 = 6$, $n_5 = 3$, $n_6 = 2$.

§ 5. Problema de Van der Waerden

4.134. $M = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i$, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$. Si $k > n$, los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k$ son dependientes y existen tales números $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$, distintos de cero simultáneamente, que $\sum_{i=0}^{k} \mu_i = 0$, $\sum_{i=0}^{k} \mu_i P_i = 0$. Sin restringir la generalidad de nuestros razonamientos convengamos en considerar que la magnitud $|\lambda_k/\mu_k|$ es mínima entre los números $|\lambda_i/\mu_i|$ con los denominadores $\mu_i \neq 0$. Entonces

$$M = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\lambda_i - \lambda_k \frac{\mu_i}{\mu_k}\right) P_i, \quad \sum_{k=0}^{k-1} \left(\lambda_i - \lambda_k \frac{\mu_i}{\mu_k}\right) = 1,$$

$$\left(\lambda_i - \lambda_k \frac{\mu_i}{\mu_k}\right) \geqslant 0, \quad i = 0, \ldots, k-1.$$

De este modo, existen $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_{k-1}^* \geqslant 0$, $\lambda_i^* = \lambda_i - \lambda_k \mu_i/\mu_k$ tales que $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i^* = 1$, $M = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i^* P_i$ El procedimiento lo continuamos hasta que k se haga igual a n.

4.135. $C = \| c_{ij} \|_1^n$, $A = \| a_{ij} \|_1^n$, $B = \| b_{ij} \|_1^n$, $AB = C$, $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \geqslant 0$,

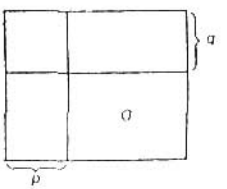
$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \sum_{j=1}^{n} b_{lj} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} c_{ij} = 1.$$

4.136. $\operatorname{per} A = \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in S_n} a_{1i_1} \ldots a_{ni_n} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$

4.137. $\operatorname{per}(A + B) = \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in S_n} (a_{1i_1} + b_{1i_1}) \ldots (a_{ni_n} + b_{ni_n}) \geqslant$

$\geqslant \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in S_n} a_{1i_1} \ldots a_{ni_n} + \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in S_n} b_{i_1} \ldots b_{i_n} = \operatorname{per} A + \operatorname{per} B.$

4.138. Sea $A = \| a_{ij} \|_1^n$ una matriz dos veces estocástica. Está claro que $\operatorname{per} A \geqslant 0$. Señalemos que $\operatorname{per} A \neq 0$. Encerremos todos los elementos no nulos de la matriz A en p columnas y q filas de un modo tal que la suma $p + q$ adquiera el valor mínimo posible:



De acuerdo con el teorema de König ([1]), el número máximo de elementos no nulos de la matriz A, de los cuales cualesquiera dos no se encuentran en una *fila o en una columna, es igual a* $p + q$. *Si demostramos que* $p + q = n$, entonces, por definición del permanente, $\operatorname{per} A > 0$. Por cuanto todos los elementos no nulos de A pueden ser encerrados en n filas, entonces $p + q \leqslant n$. Y, ya que $n = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \geqslant p + q$, tenemos $p + q = n$. La afirmación está demostrada.

4.139. Llamemos *transversal* un juego de n elementos de la matriz A de orden n, de los cuales cualesquiera dos no se disponen en una misma fila o en *una misma columna*.

Por cuanto $\operatorname{per} A > 0$ (véase el problema 4.138), existe una transversal compuesta por elementos no nulos. Supongamos que el elemento mínimo de dichos elementos es $\lambda_1 > 0$, y sea P_1 una matriz conmutable que corresponde a la transversal. Ya que la matriz $(A - \lambda_1 P_1)/(1 - \lambda_1)$ es dos veces estocástica, entonces $\operatorname{per}(A - \lambda_1 P_1) > 0$ y existe una transversal que se compone de los elementos no nulos. Denotemos con λ_2 el mínimo de estos elementos, etc. Por *cuanto la matriz* $A - \sum_{i=1}^{j} \lambda_i P_i$ *contiene no menos de* j *elementos nulos, el proceso que se aplica es finito y se dará por terminado no más tarde de que llegue el* $(n^2 - n + 1)$-*ésimo paso* (tras el $(n^2 - n + 1)$-ésimo paso de la matriz $A - \sum_{i=1}^{n^2-n+1} \lambda_i P_i$, que tiene sumas iguales de elementos en las filas y en las columnas, contendría no más de $n - 1$ elementos no nulos y, por consiguiente, *todos los elementos de esta matriz son nulos*).

4.140. Las operaciones de $\oplus$ y $*$ por un número se introducen de conformidad con las siguientes reglas:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{para } i < n,\ j < n,$$

$$c_{in} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} \quad \text{para } i < n,$$

$A \oplus B = C \Leftrightarrow$

$$c_{nj} = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_{ij} \quad \text{para } j < n,$$

$$c_{nn} = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_{in} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} = \sum_{i,\,j=1}^{n-1} c_{ij} - (n-2);$$

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \text{para } i < n,\ j < n,$$

$$b_{in} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \quad \text{para } i < n,$$

$B = \lambda * A \Leftrightarrow$

$$b_{nj} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \quad \text{para } j < n,$$

$$b_{nn} = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_{in} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_{jn} = \sum_{i,\,j=1}^{n-1} b_{ij} - (n-2).$$

No es difícil ver que en una matriz de orden $n-1$, complementaria al elemento con índices n, n, estas operaciones coinciden con las operaciones ordinarias de adición y multiplicación. Por consiguiente, un conjunto de matrices cuadradas de orden n, en las cuales la suma de elementos en cualquier fila y en cualquier columna es igual a uno, es isomorfo al espacio de matrices cuadradas de orden $(n-1)^2$.

4.141. Sea A una matriz dos veces *estocástica y supongamos que las* operaciones $*$ y $\oplus$ están introducidas en la solución del problema 4.140. Observemos que, hablando en general, $\lambda A \neq \lambda * A$, $A + B \neq A \oplus B$, sin embargo, para los números

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, se cumple la igualdad $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i = \oplus \sum_{i=1}^{k} \lambda_i * P_i$, donde P_i son matrices conmutables. Puesto que $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ (véase el problema 4.139), $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$, entonces $A = \oplus \sum_{i=1}^{k} \lambda_i * P_i$. *Existen los números* enteros $0 \leqslant i_0 < i_1 < \ldots i_{(n-1)^2}$ y los números no negativos μ_{ij} $(j = 0, \ldots$ $\ldots, (n-1)^2)$ tales que $\sum_{j=0}^{(n-1)^2} \mu_{ij} = 1$, $A = \oplus \sum_{j=0}^{(n-1)^2} \mu_{i_j} * P_{i_j}$. Por consiguiente, $A = \sum_{j=0}^{(n-1)^2} \mu_{i_j} P_{i_j}$. *La afirmación está demostrada.*

4.142. Debido a los resultados obtenidos en los problemas 4.141 y 4.137, tenemos

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \ \lambda_i > 0,$$

$$k \leqslant n^2 - 2n + 2,$$

donde P_i son matrices conmutables. Obtenemos

$$\text{per } A \geqslant \sum_{i=1}^{h} \lambda_i^n \text{ per } P_i = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i^n \geqslant \text{máx } \lambda_i^n \geqslant (n^2 - 2n + 2)^{1-n}.$$

4.143. Observemos que un conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, en los cuales el polinomio $S(x_1, \ldots, x_n)$ alcanza su valor mínimo, es compacto: él está acotado (como un subconjunto de Ω) y cerrado (por ser S continuo). Por consiguiente, la función $\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|$ sobre dicho conjunto tiene un mínimo que se consigue en cierto punto x^0. Mostremos que si $x_i^0 \neq 0$ y $x_j^0 \neq 0$, tendremos $x_i^0 = x_j^0$. Supongamos que esta afirmación no es cierta. En tal caso el polinomio $y(t) = S(x(t))$, donde $x_l(t) = tx_i^0 + (1-t)x_j^0$, $x_j(t) = tx_j^0 + (1-t)x_i^0$, $x_l(t) = x_l^0$, para $l \neq i, j$ tiene un grado que no es superior a dos, y cuenta con mínimos locales cuando $t = 0$ y $t = 1$. Por consiguiente $y(t) \equiv \text{const}$. Pero entonces $S(x)$ también adquiere su valor mínimo en el punto $x(1/2)$ y $\varphi(x^0) > \varphi(x(1/2))$. La contradicción obtenida demuestra nuestra afirmación.

4.144. $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = (x+y+z)((x+y+z)^2 - 3(xy+xz+yz)) + 6xyz = 1 - 3(xy+xz+yz) + 6xyz$. Haciendo uso del resultado del problema 4.155, llegamos a que el valor mínimo buscado es igual a 2/9. Se consigue dicho valor cuando $x = y = z = 1/3$.

4.145. Sea $A = \|a_{ij}\|_1^3$ una matriz dos veces estocástica. Denotemos

$$\Delta = \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} a_{ij}a_{kl}, \qquad \delta = \sum_{\substack{j \neq k \\ p \neq i \\ q \neq j,\ k}} a_{ij}a_{ik}a_{pq}.$$

Son obvias las relaciones $\Delta = 2\delta + 3$ per A, $3 = \Delta + \sum_{j=1}^{3} (a_{1j}a_{1j} + a_{2j}a_{3j} + a_{3j}a_{1j})$, per $A + \delta + \sum_{j=1}^{3} a_{1j}a_{2j}a_{3j} = 1$. Por consiguiente, per $A = 1 - \sum_{j=1}^{3} (a_{1j}a_{1j} + a_{2j}a_{3j} + a_{3j}a_{1j}) + 2\sum_{j=1}^{3} a_{1j}a_{2j}a_{3j}$. Para demostrar la afirmación nos queda solamente aprovechar los resultados del problema 4.155.

Observemos que se podría obtener también otra fórmula para per A y hacer uso del resultado del problema 4.156:

$$\text{per } A = \sum_{i=1}^{3} \left[\left(\frac{1}{6} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^3 + \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{3} a_{ij} \right) + \left(\frac{1}{6} \sum_{j=1}^{3} a_{ji}^3 + \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{3} a_{ji} \right) \right].$$

4.146. Sea $\text{per } A = f(\varphi_1(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, \varphi_n(a_{n1}, \ldots, a_{nn}))$, donde φ_i son funciones simétricas de sus argumentos. Entonces los permanentes de las matrices A_1 y A_2:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ & & & \\ 0 & & A_2^{(n-2)} & \end{bmatrix}, \qquad A_2^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & 0 & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & 0 & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

deben ser iguales (puesto que las funciones φ_j son simétricas). No obstante, esto no es así: per $A_1 \neq$ per A_2. La contradicción obtenida muestra que el permanente de una matriz dos veces estocástica no puede ser representado en forma de una función simétrica con relación a los elementos de cualquier fila de la matriz.

4.147. a) Supongamos que la matriz $A = \| a_{ij} \|_1^n$, $a_{ij} > 0$, es de tal género que su permanente tiene el valor mínimo entre los permanentes de todas las matrices dos veces estocásticas de orden n. Si tal matriz no es única, elijamos A de un modo tal que la suma $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$ sea tan pequeña como se pueda. Puesto que el conjunto de matrices dos veces estocásticas está acotado en $\mathbb{R}^{n^2}$ respecto de la métrica $\alpha(A, A') = \left(\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - a'_{ij})^2 \right)^{1/2}$ y la función del permanente es continua en esta métrica, entonces el conjunto de todas las matrices dos veces estocásticas de orden n, que tienen el valor mínimo del permanente, es compacto y la suma $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$ alcanza en éste su mínimo.

Pongamos $a_{ij}(t) = a_{ij}$ para $i \neq i_1, i_2$,

$$a_{i_1 j}(t) = (1-t)\, a_{i_1 j} + t a_{i_2 j},$$

$$a_{i_2 j}(t) = t a_{i_1 j} + (1-t)\, a_{i_2 j}.$$

Por cuanto la función per $A(t)$ alcanza su mínimo cuando $t = 0$, 1 sobre el intervalo $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ para cierto $\varepsilon > 0$, y como per $A(t)$ es un polinomio de t *cuyo grado no es superior a dos, entonces* per $A(t) \equiv$ *const*, per $A =$ per $A(0) =$ $=$ per $A(t)$.

Al hacer uso de la desigualdad $x^2 + y^2 \geqslant 2((x+y)/2)^2$, obtendremos $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(1/2)$, con la particularidad de que el signo de igualdad subsiste cuando y sólo cuando para cualesquiera i, j se cumple la igualdad $a_{ij} = a_{ij}(1/2)$. Por cuanto $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(1/2)$ en virtud de la elección de la matriz A, el signo de igualdad realmente tiene lugar y $a_{i_1 j} = (a_{i_1 j} + a_{i_2 j})/2$. Por consiguiente, $a_{i_1 j} = a_{i_2 j}$. Dado que i_1 y i_2 se han elegido de una manera arbitraria, todos los a_{ij} son iguales entre sí y su valor vale $1/n$. Por *consiguiente, per* $A = n!/n^n$. *La afirmación queda demostrada.*

b) Véase el lema 6 del § 4, capítulo 4 [1].

4.148. Tenemos

$$\operatorname{per}^2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \operatorname{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} \operatorname{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= (a_{11} \det A_{11} + a_{21} \det A_{21} - a_{31} \det A_{31})^2 + 4a_{21}a_{31} \det A_{21} \det A_{31} \geqslant 0,$$

donde $A_{a_{ij}}$ *es una matriz obtenida de la matriz* A *por supresión de la fila y la* columna que contienen el elemento a_{ij}. Por conmutación de las filas de la matriz A logremos que se verifique la desigualdad $a_{12}/a_{13} \geqslant a_{22}/a_{23} \geqslant a_{32}/a_{33}$, donde se supone que el valor de la fracción es igual a $+\infty$, siempre que su denominador es igual a cero. Por cuanto los números a_{i2} son no negativos, de las citadas desigualdades se deducen las siguientes: $\det A_{a_{i1}} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Por consiguiente, el signo de igualdad es posible cuando y sólo cuando $\det A_{a_{i1}} = 0$, $a_{in-1} = \lambda a_{in}$, lo que se trataba de demostrar.

MÉTODOS GEOMÉTRICOS

§ 1. Interpretaciones y problemas referentes a los grafos

5.1. Los grafos en las figuras 5.1 y 5.2 son isomorfos entre sí. En la fig. 5.5 son isomorfos solamente los grafos *a*) y *d*), mientras que en la fig. 5.3, los grafos *a*) y *b*). Todos los bosques en la fig. 5.6 son no isomorfos.

5.3. La afirmación inversa es errónea. Por ejemplo, los grafos en la fig. 5.1′ tienen valores propios iguales (± 2, 0, 0, 0) en la matriz de adyacencia, pero los propios grafos son no isomorfos entre sí.

Fig. 5.1′.

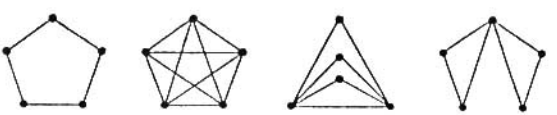


Fig. 5.2′.

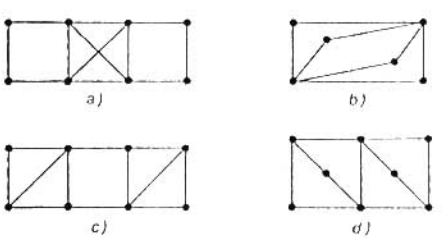


Fig. 5.3′.

5.8. En la fig. 5.2′ están representados cuatro grafos eulerianos sobre 5 vértices.

5.11. Los grafos buscados para los puntos a), b), c) y d) del problema están representados en la fig. 5.3′ *a*), *b*), *c*) y *d*), respectivamente.

5.12. Todos los $(n-1)$ vértices se unirán dos a dos por medio de aristas. Obtendremos $(n-1)(n-2)/2$ aristas. La adición de una arista hace el grafo conexo.

5.13. Véase la fig. 5.4'.

5.14. Véase la fig. 5.5': $6t + 16 = 6t + 12 + 4 = 6(t+2) + 4$.

5.15. Supongamos que tal grafo existe. Sean $x_1, \ldots, x_n$ sus vértices numerados según el crecimiento de los grados. Denotemos $k_i = \deg x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Tenemos $k_1 + \ldots + k_n \geqslant 0 + 1 + \ldots + (n-1) = n(n-1)/2$

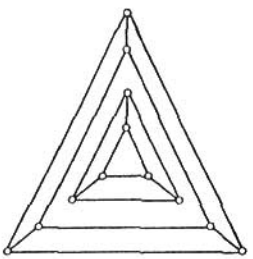


Fig. 5.4'.

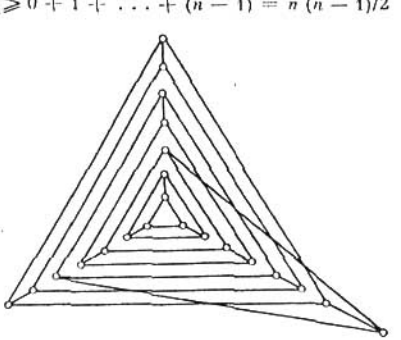


Fig. 5.5'.

En el complemento de este grafo los grados de todos los vértices son también diferentes, y $(n-1-k_1) + (n-1-k_2) + \ldots + (n-1-k_n) = n(n-1) - (k_1 + \ldots + k_n) \leqslant n(n-1)/2$, en tanto que, de conformidad con lo anterior, el mismo número debe ser no inferior a $n(n-1)/2$. Por consiguiente, $k_1 + \ldots + k_n = n(n-1)/2$. De este modo, $k_1 = 0$, $k_2 = 1, \ldots, k_n = n-1$. Cuando $n > 1$, desechemos el vértice x_1; obtendremos un grafo con diferentes grados de los vértices iguales a $1, 2, \ldots, n-1$, lo que es imposible, de acuerdo con lo demostrado más arriba. Así pues, la suposición no es cierta. El caso de $n = 1$ es el único en que el grafo está privado de dos vértices de grados iguales.

5.16. a) existe; b) no existe.

5.17. $(3^2 4^4 6^2)$.

5.18. El grafo $G_1 \times G_2$ es regular, puesto que $\deg G_1 \times G_2 (x, y) = \deg_{G_1} x + \deg_{G_2} y$. El grafo $G_1 + G_2$ es regular cuando y sólo cuando $k_1 + n_2 = k_2 + n_1$, donde n_1 y n_2 son órdenes de los grafos G_1 y G_2, respectivamente.

5.22. $(3^{10} 4^5)$ (fig. 5.6').

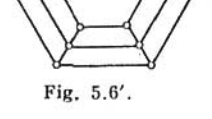


Fig. 5.6'.

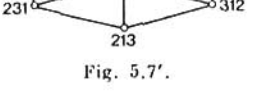


Fig. 5.7'.

5.24. Tales son, por ejemplo, $C_4 - e$ y C_5.

5.25. **Indicaciones.** Un grafo homogéneo de grado impar contiene un número par de vértices.

5.26. El orden es $n!$; la dimensión es $\frac{n!}{2}\left(\frac{n}{2}\right)$; el grado de cada vértice es $\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right)$. El grafo es regular. Véase la fig. 5.7'.

5.30. El orden del clique para a) es igual a 5, para b), a 4. Ejemplos de particiones:

a)	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6		
	3	4	2	5	2	6	2	4	2	3		
	5	6	4	6	3	5	3	6	4	5		
b)	1	2	3	1	4	7	1	9	11	1	8	10
	4	5	6	2	5	10	2	6	8	2	4	12
	7	8	9	3	8	11	3	4	10	3	5	9
	10	11	12	6	9	12	5	7	12	6	7	11

5.34. El grafo de Ferrers establece una correspondencia biunívoca entre las particiones de este género.

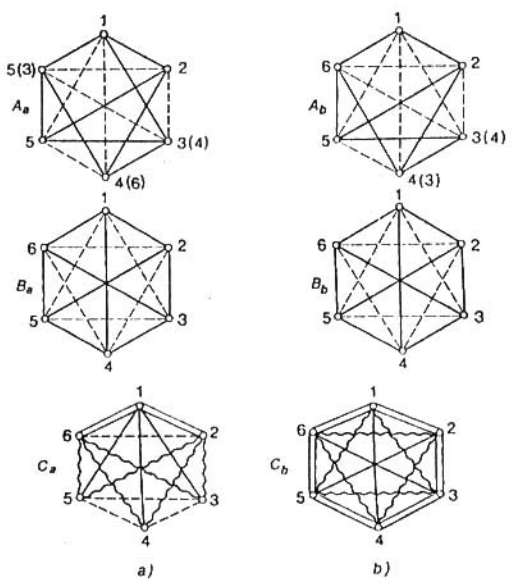


Fig. 5.8'.

5.35. Véase la figura 5.8'.

5.36. El grafo A_a se reduce al grafo B_a (véase fig. 5.8') por medio de la permutación (3 6 4). En este caso el cuadrado A se transforma (efectuamos la

permutación de las filas (3 6 4)) en cuadrado latino C:

	C		D		B
	1 2 3 4 5 6		1 2 4 3 5 6		1 2 3 6 5 4
	2 1 4 3 6 5		2 1 3 4 6 5		2 1 6 3 4 5
filas	4 6 2 5 1 3	columnas	4 6 5 2 1 3	elemen.	3 4 5 2 1 6
(3 6 4)	6 4 5 2 3 1	(3 4)	6 4 2 5 3 1	(3 6 4)	4 3 2 5 6 1
⟶	5 3 6 1 4 2	⟶	5 3 1 6 4 2	⟶	5 6 1 4 3 2
	3 5 1 6 2 4		3 5 6 1 2 4		6 5 4 1 2 3

El grafo A_b se reduce al grafo B_b con ayuda de la permutación (3 4). En este caso el cuadrado que acabamos de obtener se convierte en el siguiente cuadrado latino D (véase más arriba; efectuamos la permutación de las columnas (3 4)). Los cuadrados latinos D y C tienen grafos iguales tanto para las filas como para las columnas. En definitiva, el cuadrado D se reduce al cuadrado B por permutación de los elementos (3 6 4).

Así pues, las permutaciones que convierten el cuadrado latino A en el cuadrado latino B son las siguientes para las filas, las columnas y los elementos: (3 6 4); (3 4); (3 6 4).

5.38. a) S_n; c) el grupo de automorfismos es de orden 12; se compone de $31 = 6$ permutaciones de los elementos 1 4 2 y de la multiplicación de éstos por la permutación (3 5);

d) Las permutaciones que conservan el grafo son:

(2 4 6) (1 3 5); (2 4 6) (1 5 3); (1 4) (2 3) (5 6);
(1 3) (4 6); (1 2 3 4 5 6); (1 6 5 4 3 2);
(1 2) (3 6) (4 5); (1 6) (2 5) (3 4); (1 5) (2 4);
(1 4) (2 5) (3 6); (1) (2) (3) (4) (5) (6); (2 6) (3 5).

El grupo de automorfismos es de orden 12.

5.39. Véase la fig. 5.9'.

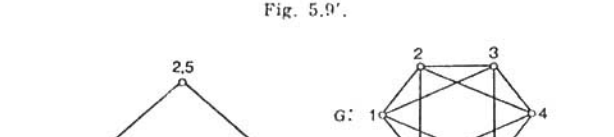


Fig. 5.9'.

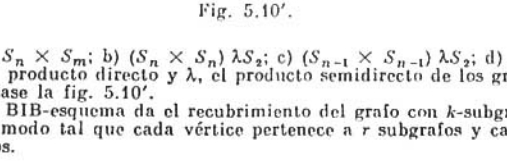


Fig. 5.10'.

5.40. a) $S_n \times S_m$; b) $(S_n \times S_n)\,\lambda S_2$; c) $(S_{n-1} \times S_{n-1})\,\lambda S_2$; d) $S_n \times S_2$, donde x es el producto directo y λ, el producto semidirecto de los grupos.

5.41. Véase la fig. 5.10'.

5.42. El BIB-esquema da el recubrimiento del grafo con k-subgrafos completos de un modo tal que cada vértice pertenece a r subgrafos y cada arista, a λ subgrafos.

5.43. $v = 6$, $b = 8$, $r = 4$, $k = 3$, $\lambda = 2$. Sí.

5.44. Véase la fig. 5.11'.

5.45. Sea Γ un subgrafo de cierto grafo G. Sean Γ_1, Γ_2, . . ., Γ_B una totalidad de subgrafos del grafo G, cada uno de los cuales es isomorfo a Γ. La totalidad de estos subgrafos forma en G un BIB-esquema generalizado, si

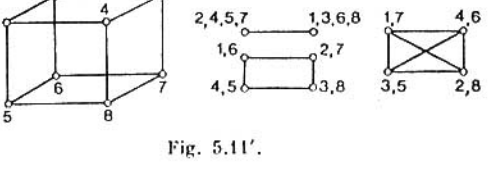


Fig. 5.11'.

a) cada vértice de G pertenece a un mismo número r de grafos del sistema Γ_i: $i = i_1, i_2, \ldots, i_r$;

b) cada arista de G pertenece a un mismo número r de grafos del sistema Γ_i: $i = i_1, i_2, \ldots, i_r$.

5.46. Sí.

5.47.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

En la tabla están integrados dos cuadrados latinos de orden 5.

5.48. No es difícil poner parquet de placas hexagonales de tres colores (fig. 5.12'). Los colores se disponen de tal modo que en la célula de la n-ésima fila figure un color distinto de los colores de las células que están por encima de la misma en la $(n - 1)$-ésima fila.

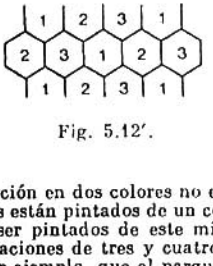


Fig. 5.12'.

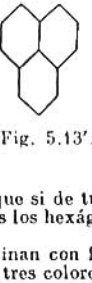


Fig. 5.13'.

La coloración en dos colores no es posible, puesto que si de tres hexágonos (fig. 5.13') dos están pintados de un color, entonces todos los hexágonos del parquet han de ser pintados de este mismo color.

Las coloraciones de tres y cuatro colores se determinan con facilidad. Supongamos, por ejemplo, que el parquet está pintado de tres colores, uno de los cuales es blanco. Pintando las células blancas en tres colores de la misma manera que hemos pintado todo el parquet, se puede aumentar el número de colores en dos, a continuación, en dos más, etc.

5.49. El orden del grafo es igual a $\binom{n}{k}$. El grafo de cada vértice es $\binom{n-k}{k-l}\binom{k}{l}$; el grafo es regular, de dimensión $\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{k}{l}\binom{n-k}{k-l}$.

5.50. $\chi(K_n)=n$; $\chi(C_n)=\begin{cases}2, \text{ si } n \text{ es par}\\ 3, \text{ si } n \text{ es impar},\end{cases}$

el número cromático de todos los demás grafos es igual a 2.

5.51. a) $n-1$; b) $n-1$, si quedan eliminadas las aristas adyacentes, de lo contrario, $n-2$; c) $n-2$.

5.52. Si la distancia entre los extremos de la arista introducida en el grafo O_m era par, entonces el número cromático es igual a 2; si no, a 3.

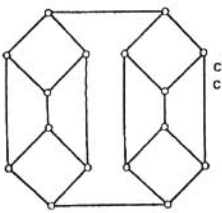


Fig. 5.14'.

5.54. $251 \cdot K_4$.

5.55. Véase la fig. 5.14'.

5.56. No, no se puede.

5.58. *II*

5.61. La igualdad requerida se desprende directamente del hecho de que el conjunto de λ-coloraciones regulares del grafo $G-e$ puede ser dividido en dos subconjuntos: coloraciones, donde los vértices terminales de la arista e están pintados de colores diferentes, y coloraciones donde dichos vértices están pintados de un mismo color. La potencia del primer conjunto es igual, evidentemente, al número de λ-coloraciones del grafo G, es decir, a $P(G;\lambda)$, mientras que la potencia del segundo subconjunto, al número de λ-coloraciones del grafo G/e, es decir, a $P(G/e,\lambda)$, lo que se trataba de demostrar.

5.62. Hágase uso del problema 5.61

$$P(K_n;\lambda)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda-k+1).$$

Para calcular $P(G;\lambda)$ aprovechemos la fórmula. Entonces

$$P(G;\lambda)=\lambda^5-7\lambda^4+18\lambda^3-20\lambda^2+8\lambda.$$

Además, $P(G;2)=0$ y $P(G;3)=6>0$. Por consiguiente, los vértices del grafo G pueden pintarse correctamente en tres colores.

5.63. Hágase uso de la fórmula del problema 5.61. El polinomio $f(\lambda)=\lambda^4+3\lambda^3+3\lambda^2$ posee todas las propiedades de un polinomio cromático pero no es cromático. En efecto, si existiera un grafo G con tal polinomio cromático, debería tener 4 vértices, 3 aristas y 2 componentes conexos, es decir, un componente conexo sería K_2 y el otro, K_1. Mas el polinomio cromático de tal grafo es igual, en virtud de la propiedad d), a

$$\lambda\cdot(\lambda-1)(\lambda-2)\cdot\lambda=\lambda^4-3\lambda^3+2\lambda^2\neq f(\lambda).$$

5.64. Hágase uso del problema 7.222. Entonces, a) es un corolario inmediato del problema 7.212 c), mientras que b) y c) se deducen de la fórmula de Ph. Hall (problema 7.203) para las funciones de Moebius en el retículo geométrico $L(G)$ del grafo G y de las propiedades de este retículo (véase también capítulo VIII).

5.65. Mostremos por inducción según el número de vértices, que el polinomio cromático de cualquier árbol marcado con n vértices es igual a $\lambda(\lambda-1)^{n-1}$. Para $n=1$ y $n=2$ el resultado es evidente. Supongamos que el polinomio cromático de todos los árboles con $n-1$ vértices tiene la forma $\lambda(\lambda-1)^{n-2}$. Sea x un vértice pendiente del árbol T, y e, la arista de éste que es incidente con

relación al vértice x. Por suposición de inducción, el polinomio cromático del árbol $T - e$ es $\lambda (\lambda - 1)^{n-2}$. El vértice x puede ser pintado de cualquier color, distinto del color de otro vértice terminal de la arista e, de suerte que x puede pintarse empleando $\lambda - 1$ procedimientos. De este modo, $P(T, \lambda) = (\lambda - 1) \times P(T - e; \lambda) = \lambda \cdot (\lambda - 1)^{n-1}$.

Viceversa, sea G un grafo en el cual $P(G; \lambda) = \lambda (\lambda - 1)^{n-1}$. Por cuanto el coeficiente de λ en $P(G; \lambda)$ no es igual a 0, y para λ^{n-1} es igual a $(n - 1)$, entonces, en virtud del problema 5.63, el grafo G es conexo y tiene $(n - 1)$ aristas, es decir, es en una unidad inferior al número de vértices. Por consiguiente, G es un árbol.

§ 2. Problemas enumerativos en los grafos

5.66. Observemos que el número de $(\alpha, 0, \gamma)$-grafos con n vértices y k aristas es igual al número de k-subconjuntos del conjunto correspondiente de todas las aristas posibles, de suerte que para poder escribir las fórmulas hace falta sólo conocer la potencia del conjunto de aristas. Si se trata de los grafos no orientados, dicha potencia es igual a $n(n - 1)/2$, siempre que los bucles se excluyan y es igual a $n(n + 1)/2$, si los bucles se admiten. En el caso de los grafos orientados, la potencia es igual a $n(n - 1)$ y $n(n + 1)$, respectivamente. Ilustremos el método de obtención de fórmulas para $g_{\alpha,1,\gamma}$ con un ejemplo del $(0, 1, 0)$-grafo. Reenumeremos los pares posibles de vértices de tal grafo con n vértices. Sea $x_i \geqslant 0$ el número de aristas que unen el i-ésimo par de vértices en el $(0, 1, 0)$-grafo con n vértices y k aristas. Tenemos una ecuación en números enteros no negativos:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n(n-1)/2} = k.$$

El número de diferentes soluciones de esta ecuación es igual, como se sabe, a

$$\binom{n(n-1)/2 + k - 1}{k} = g_{0,1,0}(n, k),$$

puesto que todo $(0, 1, 0)$-grafo se define unívocamente por el juego de magnitudes $(x_1, x_2, \ldots, x_{n(n-1)/2})$. La demostración de los demás casos es análoga. De lo obtenido se deduce que el número máximo posible de aristas en el $(\alpha, 0, \gamma)$-grafo con n vértices es igual a

$n(n-1)/2$ para $\alpha = 0$, $\gamma = 0$; $n(n+1)/2$ para $\alpha = 1$, $\gamma = 0$;

$n(n-1)$ para $\alpha = 0$, $\gamma = 1$; n^2 para $\alpha = 1$, $\gamma = 1$.

El número máximo posible de aristas en el $(\alpha, 1, \gamma)$-grafo es igual a ∞.

5.67. En el caso de $\beta = 0$ se deben aprovechar las fórmulas correspondientes para los $(\alpha, 0, \gamma)$-grafos del problema 5.66 y del teorema binomial. Demostremos ahora, por ejemplo, la representación para la función generatriz $G^{(n)}_{0,1,0}(y)$. De la definición de la función generatriz $G^{(n)}_{0,1,0}(y)$, con ayuda de la fórmula para $g_{0,1,0}(n, k)$ del problema antecedente obtenemos:

$$G^{(n)}_{0,1,0}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n(n-1)/2 + k - 1}{k} y^k.$$

De un modo análogo se demuestran las fórmulas restantes.

5.68. En el caso de $n = 0$ la correlación (5.1) se reduce, en virtud de las condiciones iniciales, a la igualdad $g(1, k) = c(1, k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, la cual se verifica con toda la evidencia, puesto que todos los (α, β, γ)-grafos con un vértice son conexos. Con el fin de obtener la relación recurrente (5.1) para $n \geqslant 1$, observemos que en el grafo H con $n + 1$ vértices $P_1, \ldots, P_{n+1}$ y k aristas el vértice P_{n+1} pertenece a cierto componente conexo K que tiene l

($l = 0, 1, \ldots, n$) otros vértices y m ($0 \leqslant m \leqslant k$) aristas. Una parte J del grafo H que se obtiene por supresión del componente K tiene $n - l$ vértices y $k - m$ aristas. Existen $\binom{n}{l}$ métodos para elegir los vértices que integran, a la par con P_{n+1}, el componente K; existen $c\,(l+1, m)$ procedimientos de elección de K para una composición fija de vértices, y hay $g\,(n-1, k-m)$ procedimientos de elección de J.

De los razonamientos aducidos se deduce precisamente la validez de la fórmula (5.1).

5.69. Multipliquemos ambos miembros de (5.1) por y^k y sumemos respecto de todos los valores posibles de k. Entonces para cualesquiera α, β y γ obtendremos en el primer miembro

$$\sum_{k \geqslant 0} g_{\alpha, \beta, \gamma}\,(n+1, k)\, y^k = G^{(n+1)}_{\alpha, \beta, \gamma}\,(y), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

y en el segundo miembro

$$\sum_{k \geqslant 0} y^k \sum_{l=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \binom{n}{l} c_{\alpha, \beta, \gamma}\,(l+1, m)\, g_{\alpha\ \beta\ \gamma}\,(n-l, k-m), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Alternando el orden de sumación, obtenemos

$$\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \sum_{m \geqslant 0} c_{\alpha, \beta, \gamma}\,(l+1, m)\, y^m \sum_{k \geqslant m} g_{\alpha, \beta, \gamma}\,(n-l, k-m)\, y^{k-m} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \sum_{m \geqslant 0} c_{\alpha, \beta, \gamma}\,(l+1, m)\, y^m \sum_{h \geqslant 0} g_{\alpha, \beta, \gamma}\,(n-l, h)\, y^h =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} G^{(n-l)}_{\alpha, \beta, \gamma}\,(y) \sum_{m \geqslant 0} c_{\alpha, \beta\ \gamma}\,(l+1, m)\, y^m =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} C^{(l+1)}_{\alpha, \beta, \gamma}\,(y)\, G^{(n-l)}_{\alpha, \beta, \gamma}\,(y), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

lo que, obviamente, conduce a la solución del problema.

5.70. Multipliquemos ambos miembros de (5.2) por $z^n/n!$ y sumemos respecto de n desde 0 hasta ∞. Obtendremos en el primer miembro

$$\sum_{n=0}^{\infty} G^{(n+1)}_{\alpha, \beta, \gamma}\,(y)\, \frac{z^n}{n!} = \frac{d}{dz}\, G_{\alpha, \beta, \gamma}\,(z, y),$$

y en el segundo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n!}{l!\,(n-l)!}\, G^{(l+1)}_{\alpha, \beta, \gamma}\,(y)\, G^{(n-l)}_{\alpha, \beta, \gamma}\,(y) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} C^{(l+1)}_{\alpha, \beta, \gamma}\,(y)\, \frac{z^l}{l!} \sum_{n=l}^{\infty} G^{(n-l)}_{\alpha, \beta, \gamma}\,(y)\, \frac{z^{n-l}}{(n-l)!} =$$

$$= G_{\alpha, \beta\ \gamma}\,(z, y) \sum_{l=0}^{\infty} C^{(l+1)}_{\alpha, \beta, \gamma}\,(y)\, \frac{z^l}{l!} = G_{\alpha, \beta, \gamma}\,(z, y)\, \frac{d}{dz}\, C_{\alpha, \beta, \gamma}\,(z, y).$$

De este modo, $\frac{d}{dz} G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) = G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) \frac{d}{dz} C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y)$. De aquí, $\ln G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) = C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) + K(y)$, donde $K(y)$ es una función arbitraria de y. A continuación obtenemos

$$G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) = \exp\{C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) + K(y)\}.$$

Suponiendo $z = 0$ y teniendo presente que $G_{\alpha, \beta, \gamma}(0, y) = 1$ y $C_{\alpha, \beta, \gamma}(0, y) = 0$, obtenemos $K(y) = 0$. Esto demuestra el resultado requerido.

5.71. Para enumerar los grafos requeridos basta unir con una arista los vértices de cada parte de la partición del $2n$-conjunto de vértices en n partes, cada una de las cuales contiene 2 elementos. Por consiguiente, el número buscado (designémoslo por μ_{2n}) es igual a $\mu_{2n} = B_{2n}(0, n, 0, \ldots, 0)$ y la respuesta a la pregunta planteada será

$$\mu_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} = \prod_{i=1}^{n} (2n - 2i + 1).$$

Indiquemos que la magnitud μ_{2n} coincide con el $(2n)$-ésimo momento de una magnitud aleatoria normal cuyos parámetros son (0, 1). [Véase **Kendall M., Stuart D.** Distribution Theory (2nd ed.), Charles Griggin and Company Limited, London, 1966.]

5.72. Tenemos $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Haciendo uso de la fórmula del problema antecedente, podemos escribir

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n n!} = e^{z^2/2}.$$

Así pues, la función generatriz exponencial de los números μ_n es $e^{z^2/2}$.

5.73. Veamos un conjunto de todos los (0, 0, 0)-grafos conexos con vértices marcados $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Sea $N(P_{j_1}, P_{j_2}, \ldots, P_{j_i})$ $(i = 1, \ldots, n)$ el número de los grafos, en los cuales los vértices $P_{j_1}, P_{j_2}, \ldots, P_{j_i}$ son terminales, mientras que los otros $n - i$ vértices pueden ser cualesquiera. De conformidad con el método de inclusión y exclusión tenemos

$$F(n, k) = G(n, k) - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^j S_j \ldots + (-1)^n S_n, \quad (5.1')$$

donde

$$S_i = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_i \leqslant n} N(P_{j_1}, \ldots, P_{j_i}). \quad (5.2')$$

Hallemos $N(P_{j_1}, \ldots, P_{j_i})$ para $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Con este fin indiquemos que si un grafo es conexo y tiene más de dos vértices, cualquiera de sus vértices terminales es adyacente solamente a otro vértice, que no puede ser terminal. Por eso, la supresión de los vértices $P_{j_1}, \ldots, P_{j_i}$ del grafo conexo con n vértices y k aristas nos llevará a un grafo conexo con $n - i$ vértices y $k - i$ aristas. De aquí se desprende que para indicar los grafos cuyo número es igual a $N(P_{j_1}, P_{j_2}, \ldots, P_{j_i})$ hace falta proceder del modo siguiente:

a) elegimos un grafo conexo Γ con $n - i$ vértices marcados y $k - i$ aristas (el conjunto de vértices de Γ lo obtenemos por supresión de los vértices $P_{j_1}, \ldots, P_{j_i}$ de $P_1, P_2, \ldots, P_n$);

b) agregamos a Γ además los i vértices nuevos, a saber, $P_{j_1}, \ldots, P_{j_i}$;

c) unimos cada uno de estos últimos con uno de los vértices del grafo original Γ, lo que puede cumplirse empleando $(n-i)^i$ procedimientos.

Por cuanto en a) el grafo Γ puede elegirse mediante $c\,(n-i,\ k-i)$ procedimientos, de resultas obtenemos:

$$N\,(P_{j_1},\ P_{j_2},\ \ldots,\ P_{j_i}) = c\,(n-i,\ k-i)\,(n-i)^i. \qquad (5.3')$$

Esta fórmula se ha demostrado para $i = 1, \ldots, n-1$. No obstante, queda válida también para $i = n$, puesto que $N\,(P_1, \ldots, P_n)$ es igual, evidentemente, a cero. De (5.3') se ve que el número $N\,(P_{j_1},\ P_{j_2},\ \ldots,\ P_{j_i})$ no depende de $j_1, j_2, \ldots, j_i$. De (5.2') y (5.3') encontramos que $S_i = \binom{n}{i} c\,(n-i,\ k-i) \times (n-i)^i$, y la fórmula (5.1') se reduce a la forma

$$F\,(n,\ k) = c\,(n,\ k) - \binom{n}{1} c\,(n-1,\ k-1)\,(n-1) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^i \binom{n}{i} c\,(n-i,\ k-i)\,(n-i)^i \pm \ldots,\quad n \geqslant 2,$$

y la fórmula que se requería por las condiciones del problema queda demostrada.

5.74. Para $n = 1$ la fórmula (5.4) se comprueba directamente. Supongamos ahora que la fórmula de Cayley es verídica para $n = 1, 2, \ldots, p$, $p \geqslant 2$, y demostremos que es también válida para $n = p+1$. Hagamos uso del problema 5.73 para $k = n+1$. Por cuanto el árbol con $n > 1$ vértices tiene siempre vértices terminales, entonces $F\,(n,\ n-1) = 0$, $n > 1$. Teniendo presente que $c\,(n,\ n-1) = T\,(n)$, del problema 5.73 obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, T\,(n-i)\,(n-i)^i = 0, \quad n > 1. \qquad (5.4')$$

Por hipótesis la fórmula (5.4) es válida para $n = 1, 2, \ldots, p$; por eso, para $n = p+1$ tenemos de (5.4'):

$$T\,(p+1) + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \binom{p+1}{i} (p+1-i)^{p-i-1}\,(p+1-i)^i = 0.$$

De aquí

$$T\,(p+1) = -\sum_{i=1}^{p} (-1)^i \binom{p+1}{i} (p+1-i)^{p-1},$$

o bien

$$T\,(p+1) = (p+1)^{p-1} - \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \binom{p+1}{i} (p+1-i)^{p-1}. \qquad (5.5')$$

La suma en el segundo miembro de la relación (5.5') es igual a cero, por lo cual $T\,(p+1) = (p+1)^{p-1}$ y el paso de la inducción es cierto. El problema está resuelto.

5.75. La expresión explícita para los números $T_n\,(P_{j_1}, \ldots, P_{j_r})$ se halla de un modo análogo al problema 5.73. En efecto, si los vértices $P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}$ son terminales, ellos no son adyacentes entre sí y su supresión junto con las aristas conduce a un árbol con $n-r$ vértices. Por eso, para hallar los números $T_n\,(P_{j_1}, \ldots, P_{j_r})$ procedemos del modo siguiente:

a) construimos en $n-r$ vértices del conjunto $M=\{P_1, \ldots, P_n\} \setminus \{P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}\}$ un árbol que se denotará por Γ; según el problema 5.74, sobre el conjunto Γ pueden construirse $T(n-r)=(n-r)^{n-r-2}$ árboles diferentes;

b) agregamos a M, r elementos más: $P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}$;

c) unimos cada uno de los vértices $P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}$, mediante una arista, con uno de los vértices del árbol Γ, construido en a), lo que se realiza con ayuda de $(n-r)^r$ procedimientos.

Se obtiene de resultas un árbol con n vértices $P_1, \ldots, P_n$, en el cual los vértices $P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}$ son terminales. De este modo pueden obtenerse todos los árboles de tal género. Por consiguiente,

$$T_n(P_{j_1}, \ldots, P_{j_r})=(n-r)^{n-r-2}(n-r)^r=(n-r)^{n-2}.$$

5.76. Cuando $n=1, 2$, la validez de la fórmula (5.5) se establece directamente. Sea, ahora, $n>2$. Haciendo uso del método de inclusión y exclusión y suponiendo $T(0)=1$, obtenemos, por analogía con la resolución del problema 5.73:

$$T(n, r)=(-1)^r \sum_{i=r}^{n} (-1)^i \binom{i}{r} \binom{n}{i} T(n-i)(n-i)^i =$$

$$=(-1)^r \frac{n!}{r!} \sum_{i=r}^{n} (-1)^i \binom{n-r}{n-i} T(n-i)(n-i)^i =$$

$$=(-1)^{2r} \frac{n!}{r!(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} T(n-j-r)(n-j-r)^{j+r}.$$

Recurriendo a la primera fórmula de Cayley, de aquí encontramos

$$T(n, r)=\frac{n!}{r!(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} (n-r-j)^{n-r-j-2+j+r} =$$

$$=\frac{n!}{r!} \frac{1}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} (n-r-j)^{n-2}.$$

Ahora aprovechamos la definición de los números de Stirling de 2° género y obtenemos el resultado requerido.

5.77. Por cuanto $T(n)=\sum_{r=0}^{n} T(n, r)$ y para $n \geqslant 2$ tenemos $T(n, 0)=T(n, 1)=0$, entonces, de acuerdo con la fórmula (5.5),

$$T(n)=\sum_{r=2}^{n} \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r)=\sum_{k=0}^{n-2} S(n-2, k)\, n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

y la última expresión es igual a n^{n-2}.

5.78. Hagamos uso de la relación recurrente para los números de Stirling de 2° género y escribamos $S(n-2,\ n-r) = (n-r)\,S(n-3,\ n-r) + S(n-3,\ n-r-1)$. Como resultado, de la segunda fórmula de Rényi obtendremos

$$T(n,\ r) = \frac{n!}{r!}\left[(n-r)\,S(n-3,\ r-2) + S(n-3,\ n-r-1)\right] =$$

$$= \frac{n(n-r)}{r}\,T(n-1,\ r-1) + nT(n-1,\ r).$$

De aquí se deduce la relación recurrente declarada más arriba.

5.79. Para los números $T(n;\ P_{j_1}, \ldots, P_{j_r})$ podemos escribir la relación

$$\sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant n} T(n;\ P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}) = T(n,\ r),$$

$$r = 1,\ 2,\ \ldots; \quad n = r,\ r+1,\ \ldots,$$

donde la sumación se realiza respecto de todas las combinaciones de $j_1, \ldots, j_r$ tomadas de r a partir de n elementos $1, 2, \ldots, n$. Está claro que los números $T(n; P_{j_1}, \ldots, P_{j_r})$, al igual que los números $T(P_{j_1}, \ldots, P_{j_r})$ examinados en el problema 5.75, no dependen de la elección concreta de los vértices $P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}$. Por eso, en el primer término de la relación escrita figura la suma de $\binom{n}{r}$ sumandos iguales. De aquí obtenemos

$$\binom{n}{r} T(n;\ P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}) = T(n,\ r), \quad r = 1,\ 2,\ \ldots; \quad n = r,\ r+1,\ \ldots$$

Valiéndonos de la fórmula (5.5), obtenemos en definitiva

$$T(n;\ P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \frac{n!}{r!}\,S(n-2,\ n-r) = (n-r)!\,S(n-2,\ n-r).$$

5.80. Los árboles con n vértices $P_1, \ldots, P_n$, que tienen r vértices terminales $P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}$, se subdividen en dos clases disjuntas.

a) Existe en el grafo al menos un vértice terminal, digamos P_{j_r}, que está unido con un vértice de grado 2; llamemos este último vértice X. Existen $(n-r)\,T(n-1;\ P_{j_1}, \ldots, P_{j_{r-1}}, X)$ tales árboles, puesto que el vértice X puede elegirse aplicando $n-r$ procedimientos (de los vértices no terminales), mientras que el grafo con $n-1$ vértices $P_1, \ldots, P_{j_{r-1}}, P_{j_{r+1}}, \ldots, P_n$ (de los cuales r son terminales: $P_{j_1}, \ldots, P_{j_{r-1}}, X$) puede construirse aplicando $T(n-1;\ P_{j_1}, \ldots, P_{j_{r-1}}, X)$ procedimientos.

b) No hay tales vértices. El número de grafos de este tipo es igual a $(n-r)\,T(n-1;\ P_{j_1}, \ldots, P_{j_{r-1}})$, puesto que ellos pueden obtenerse de $T(n-1;\ P_{j_1}, \ldots, P_{j_{r-1}})$ grafos con $n-1$ vértices $P_1, \ldots, P_{j_{r-1}}, P_{j_{r+1}}, \ldots, P_n$ (de los cuales $r-1$ vértices son terminales, a saber, $P_{j_1}, \ldots, P_{j_{r-1}}$), y el vértice P_{j_r} puede ser unido a cualquiera de los $n-r$ vértices no terminales. Así pues,

$$T(n;\ P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}) = (n-r)\,T(n-1;\ P_{j_1}, \ldots, P_{j_{r-1}}, X) +$$

$$+ (n-r)\,T(n-1;\ P_{j_1}, \ldots, P_{j_{r-1}}).$$

Haciendo uso del resultado del problema 5.79, encontramos de aquí

$$T(n, r) = \binom{n}{r} T(n; P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}) =$$

$$= (n-r) \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r}} \binom{n-1}{r} T(n-1; P_{j_1}, \ldots, P_{j_{r-1}}, X) +$$

$$+ (n-r) \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r-1}} \binom{n-1}{r-1} T(n-1; P_{j_1}, \ldots, P_{j_{r-1}}) =$$

$$= (n-r) \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r}} T(n-1, r) + (n-r) \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r-1}} T(n-1, r-1) =$$

$$= nT(n-1, r) + \frac{n(n-r)}{r} T(n-1, r-1)$$

y, de este modo, la fórmula recurrente del problema 5.79 está demostrada otra vez de un modo independiente.

5.81. La condición inicial $T(1) = 1$ está clara y no requiere explicaciones. Supongamos ahora que $n \geqslant 2$, y analicemos un árbol $H = (X; E_1, \ldots, E_{n-1})$, $|X| = n$, donde X es el conjunto de vértices y $E_1, \ldots, E_{n-1}$, el conjunto de aristas del árbol. Borremos en H una arista, por ejemplo, $E = \{P_1, P_2\}$, $P_1, P_2 \in X$. De resultas, H se descompone en dos componentes conexos H_1 y H_2, cada uno de los cuales representa un árbol. Supongamos que el componente H_j tiene con E un vértice común P_j y contiene n_j aristas ($j = 1, 2$, $n_1 + n_2 = n - 2$). Además, uno de los componentes H_j puede estar compuesto por un único vértice aislado. De lo dicho más arriba se deduce que para obtener y calcular el número de árboles con n vértices podemos emplear el siguiente algoritmo:

a) elegimos de X arbitrariamente dos vértices $E_1 = \{P_1, P_2\}$ y los unimos mediante una arista; dicha elección puede ser realizada mediante $\binom{n}{2}$ procedimientos;

b) prefijamos un juego ordenado de números enteros n_1, n_2 tales que se verifique $n_1 + n_2 = n - 2$;

c) representamos el conjunto $X \setminus E_1$ ($|X \setminus E_1| = n - 2$) en forma de una unión de dos subconjuntos disjuntos X_1, X_2 tales que $|X_i| = n_i$, $i = 1, 2$; con este fin se pueden emplear $\frac{(n-2)!}{n_1! n_2!} = \binom{n-2}{n_1}$ procedimientos;

d) para cada $i = 1, 2$ elegimos uno de $T(n_i + 1)$ árboles H_i con el conjunto de vértices $X_i \cup \{P_i\}$; a partir de la arista y de los árboles H_1 y H_2 obtenemos un árbol con el conjunto de vértices X.

Como resultado, cada uno de los árboles que nos interesan se obtendrá exactamente $n - 1$ veces. En efecto, supongamos que, finalizado el trabajo del algoritmo descrito, se ha obtenido un árbol con aristas $E_1, \ldots, E_{n-1}$, donde E_1 está elegido en a). El mismo árbol se obtendrá $n - 2$ veces más al prefijar en a) cada una de las aristas $E_2, \ldots, E_{n-1}$. Del procedimiento descrito proviene una relación

$$(n-1) T(n) = \binom{n}{2} \sum_{n_1 + n_2 = n-2} \frac{(n-2)!}{n_1! n_2!} T(n_1 + 1) T(n_2 + 1)$$

la cual puede reescribirse en la forma requerida, si ponemos $n_1 + 1 = i$, $n_2 + 1 + 1 = n - i$.

5.82. Hagamos uso de la relación recurrente del problema 5.81, teniendo presente que de conformidad con el problema 5.74, $T(i) = i^{i-2}$ y $T(n-i) = (n-i) = (n-1)^{n-i-2}$.

Obtenemos, como resultado:

$$2(n-1)\,n^{n-2} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} i\,(n-i)\,i^{i-2}\,(n-i)^{n-i-2} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} i^{i-1}\,(n-i)^{n-i-1},$$

lo que se trataba de demostrar.

5.83. La raíz P del árbol radical H puede pertenecer a d diferentes aristas $E_1, E_2, \ldots, E_d$ $(1 \leqslant d \leqslant n-1)$. Si en H borramos estas aristas y la raíz, se obtendrá un bosque compuesto de d componentes. (Recordemos que el bosque es un (0, 0, 0)-grafo (véase el problema 5.66), cuyos componentes conexos son todos los árboles.) En este caso pueden haber componentes que tienen un único vértice. El bosque obtenido tiene $n-1$ vértices y $n-1-d$ aristas.

De lo dicho se deduce el siguiente procedimiento para enumerar los diferentes árboles radicales con un mismo conjunto de vértices X, $|X| = n$:

a) Designemos en X un cierto vértice P a título de una raíz; esto puede hacerse empleando n métodos.

b) Prefijamos un número entero $d = 1, 2, \ldots, n-1$.

c) Partimos el conjunto $X \setminus \{P\}$ en d subconjuntos no vacíos $X_1, X_2, \ldots, X_d$ y construimos los árboles radicales $H_1, H_2, \ldots, H_d$, cada uno de los cuales tiene un conjunto correspondiente de vértices. El grafo resultante será un bosque radical (en un bosque radical cada componente es un árbol radical). Está claro que en este caso obtendremos

$$\frac{1}{d!} \sum_{\rho_1 + \ldots + \rho_d = n-1} \frac{(n-1)!}{\rho_1! \ldots \rho_d!}\, \tau(\rho_1) \ldots \tau(\rho_d)$$

diferentes bosques, donde ρ_i es el número de elementos X_i $(i = 1, \ldots, d)$ y *la sumación se realiza respecto de todas las soluciones enteras positivas* $\rho_1, \ldots, \rho_d$ de la ecuación $\rho_1 + \ldots + \rho_d = n-1$.

d) Unimos mediante aristas el vértice P fijo en a), con las raíces de los árboles $H_1, \ldots, H_d$ y obtenemos un árbol radical con el conjunto de vértices X, cuya raíz es de grado d.

Al revisar en cada paso de este algoritmo toda clase de variantes, obtendremos todo el conjunto de árboles radicales. De aquí se desprende, además, la siguiente relación recurrente

$$\tau(n) = n \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d!} \sum_{\substack{\rho_1 + \ldots + \rho_d = n-1 \\ \rho_i > 0}} \frac{(n-1)!}{\rho_1! \ldots \rho_d!}\, \tau(\rho_1) \ldots \tau(\rho_d),$$

la cual puede reescribirse en la forma

$$\frac{\tau(n)}{n!} = \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d!} \sum_{\substack{\rho_1 + \ldots + \rho_d = n-1 \\ \rho_i > 0}} \prod_{i=1}^{d} \frac{\tau(\rho_i)}{\rho_i!}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

De aquí obtenemos

$$\theta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n!}z^n=z+\sum_{n=2}^{\infty}z^n\sum_{d=1}^{n-1}\frac{1}{d!}\sum_{\substack{\rho_1+\ldots+\rho_d=n-1\\ \rho_i>0}}\prod_{i=1}^{d}\frac{\tau(\rho_i)}{\rho_i!}=$$

$$=z\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{d=1}^{n-1}\frac{1}{d!}\sum_{\substack{\rho_1+\ldots+\rho_d=n-1\\ \rho_i>0}}\prod_{i=1}^{d}\frac{\tau(\rho_i)z^{\rho_i}}{\rho_i!}\right)=$$

$$=z\left(1+\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d!}\sum_{n-1-d}\sum_{\rho_1+\ldots+\rho_d=n-1}\sum_{\substack{\rho_i>0}}\prod_{i=1}^{d}\frac{\tau(\rho_i)z^{\rho_i}}{\rho_i!}\right)=$$

$$=z\left(1+\sum_{d=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\tau(i)}{i!}z^i\right)^d\right)=z\exp\{\theta(z)\},$$

de donde se desprende la ecuación de Polya.

La forma explícita para la función generatriz $\theta(z)$ se deduce del hecho de que, debido a la 1ª fórmula de Cayley y a la relación $\tau(n)=nT(n)$, tiene lugar $\tau(n)=n^{n-1}$.

5.84. Reescribamos la relación recurrente del problema 5.82 en la forma

$$\frac{1}{n!}(\tau(n)-T(n))=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\tau(i)}{i!}\frac{\tau(n-i)}{(n-i)!},$$

o bien

$$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n!}z^n-\sum_{n=1}^{\infty}T(n)\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\tau(i)}{i!}z^i\frac{\tau(n-i)}{(n-i)!}z^{n-i}.$$

De acuerdo con la definición de $\theta(z)$ y $T(z)$, de aquí tenemos

$$\theta(z)-T(z)=\theta^2(z)/2,$$

lo que demuestra el resultado requerido.

5.85. Por cuanto $\theta(z)$ es una función inversa a $z=\theta^*(w)=we^{-w}$, será regular en el entorno del punto $z=0$. Por eso, valiéndonos de la fórmula de Cauchy para los coeficientes de una serie de potencias, de la definición de $\theta(z)$ encontramos

$$\tau(n)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{\theta(z)}{z^{n+1}}dz,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

donde la integración se realiza respecto de un contorno cerrado dispuesto en el círculo de convergencia de $\theta(z)$. Realicemos en la integral la sustitución $z=\theta^*(w)$. Por cuanto $dz=(1-w)e^{-w}dw$ y para w suficientemente pequeños tiene lugar la identidad $\theta(\theta^*(w))=w$, obtendremos

$$\tau(n)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{w(1-w)e^{-w}dw}{w^{n+1}e^{-(n+1)w}}=\frac{n!}{2\pi i}\oint(1-w)e^{nw}\frac{dw}{w^n},\quad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Conforme al teorema de residuos, de aquí se deduce

$$\tau(n) = n!\,\mathrm{Coef}_{w^{n-1}}[(1-w)\,e^{nw}] = n!\,\mathrm{Coef}_{w^{n-1}}\left[(1-w)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k w^k}{k!}\right] =$$

$$= n!\left[\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{n^{n-2}}{(n-2)!}\right] = n^n - (n-1)\,n^{n-1} = n^{n-1}.$$

De este modo, $\tau(n) = n^{n-1}$. Por cuanto $\tau(n) = nT(n)$, entonces $T(n) = n^{n-2}$, lo que se trataba de demostrar.

5.86. Está claro que

$$A_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{A_{nk}z^k}{k!} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^{j-1}}{j!}z^j\right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

De acuerdo con el problema 5.80 hallamos de aquí $A_k(z) = [0(z)]^k$. Con ayuda de la fórmula integral de Cauchy obtenemos

$$A_{nk} = \frac{n!}{2\pi i}\oint [0(z)]^k\,\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Al realizar el cambio de la variable (véase problema 5.85), tendremos

$$A_{nk} = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{w^k(1-w)\,e^{nw}}{w^{n+1}}\,dw = n!\,\mathrm{Coef}_{w^n}[w^k(1-w)\,e^{nw}] =$$

$$= n!\left[\frac{n^{n-k}}{(n-k)!} - \frac{n^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\right] = \frac{n^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\,n!\left[\frac{n}{n-k} - 1\right],$$

de donde se deduce la identidad que se demuestra.

5.87. Si $n = 1$, $k = 1$, entonces, según el sentido de este número, $L_1(1) = 1$, lo que concuerda con la 2ª fórmula de Cayley. Supongamos ahora que $n \geqslant 2$ y $1 \leqslant k \leqslant n$. Mostremos ante todo que

$$l_k(n) = \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_k=n-1 \\ j_l>0}} \frac{(n-1)!}{j_1!\ldots j_k!}\,T(j_1+1)\,T(j_2+1)\ldots T(j_k+1). \quad (5.6')$$

En efecto, para obtener los bosques que se requieren en las condiciones del problema, hace falta:

a) prefijar un juego ordenado de números enteros no negativos $j_1, \ldots, j_k$ que dan en suma $n-1$;

b) representar para cada juego de este género el conjunto de $n-1$ vértices $P_{k+1}, P_{k+2}, \ldots, P_{n+k-1}$ en forma de una unión de k subconjuntos disjuntos $X_1, \ldots, X_k$ tales que $|X_1| = j_1, \ldots, |X_k| = j_k$;

c) construir para $j = 1, \ldots, k$ un bosque con el conjunto de vértices $\{P_j\} \cup X_j$.

De aquí precisamente se desprende (5.6'), puesto que en b) resultan posibles $(n-1)!/(j_1!\ldots j_k!)$ métodos de representación.

Al demostrar (5.6'), hagamos uso de la 1ª fórmula de Cayley (5.4) y escribamos la igualdad (5.6') en la forma

$$l_k(n) = \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_k=n-1 \\ j_i\geqslant 0}} \frac{(n-1)!}{j_1!\ \ldots\ j_n!}(j_1+1)^{j_1-1}\ \ldots\ (j_k+1)^{j_k-1} =$$

$$= \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_k=n-1 \\ j_i\geqslant 0}} \frac{(n-1)!}{(j_1+1)!\ \ldots\ (j_k+1)!}(j_1+1)^{j_1}\ \ldots\ (j_k+1)^{j_k} =$$

$$= \sum_{\substack{h_1+\ldots+h_k=n+k-1 \\ h_i>0}} \frac{(n-1)!}{h_1!\ \ldots\ h_k!}h_1^{h_1-1}\ \ldots\ h_k^{h_k-1} =$$

$$= \frac{1}{n(n+1)\ \ldots\ (n+k-1)} \sum_{\substack{h_1+\ldots+h_k=n+k-1 \\ h_i>0}} \frac{(n+k-1)!}{h_1!\ \ldots\ h_k!}h_1^{h_1-1}\ \ldots\ h_k^{h_k-1} =$$

$$= \frac{A_{n+k-1,\,k}}{n(n+1)\ \ldots\ (n+k-1)}, \qquad (5.7')$$

donde, de acuerdo con el problema 5.86,

$$A_{n+k-1,\,k} = k(n+k-1)^{n-1}\prod_{h=1}^{k-1}(n+k-1-h) =$$

$$= k(n+k-1)^{n-1}\,n(n+1)\ \ldots\ (n+k-2). \qquad (5.8')$$

De (5.7') y (5.8') se deduce el resultado requerido.

5.88. Sea $\{P_1, \ldots, P_n\}$ un conjunto de vértices y $1 \leqslant k \leqslant n$. Elegimos del conjunto de vértices k diferentes raíces $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$, lo que puede hacerse empleando $\binom{n}{k}$ procedimientos. A continuación construimos tal bosque con n vértices que las raíces $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ pertenezcan a los diferentes componentes. Acorde al problema 5.87, esto puede realizarse empleando $l_k(n-k+1) = kn^{n-k-1}$ procedimientos. De este modo

$$l_k(n) = \binom{n}{k} l_k(n-k+1) = \binom{n}{k} kn^{n-k-1} = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}$$

y el problema queda resuelto.

5.89. Elijamos un bosque radical con $n-1$ vértices $P_2, \ldots, P_n$ y k componentes conexos. De acuerdo con el problema 5.88, dicha elección puede ser efectuada empleando $l_k(n-1)$ métodos. A continuación unamos el vértice P_1 mediante aristas con todas las raíces del bosque elegido y obtendremos un árbol con n vértices, en el cual el vértice P_1 es de grado k. De este modo, $T_k(n) = l_k(n-1)$ y, haciendo uso del resultado del problema 5.88, obtendremos la fórmula de Clark.

5.90. En cada árbol con $n \geqslant 2$ vértices $P_1, \ldots, P_n$, el vértice P_1 tiene un y sólo un grado $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Por consiguiente, el número total de árboles con n vértices será

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T_k(n).$$

De aquí, aprovechando la fórmula de Clark del problema 5.89, obtenemos

$$T(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}=$$

$$=\sum_{l=0}^{n-2}\binom{n-2}{l}(n-1)^{n-l-2}=[1+(n-1)]^{n-2}=n^{n-2},$$

lo que se trataba de demostrar.

5.91. Todos los árboles con $n+1$ vértices $P_1, \ldots, P_{n+1}$, donde el vértice P_i *es de grado* $k+1$, pueden obtenerse y, además, cada uno de ellos, $k+1$ veces, valiéndose del modo siguiente:

a) prefijamos $p = k, k+1, \ldots, n-1$;

b) *elegimos* en el conjunto $\{P_2, \ldots, P_{n+1}\}$ p vértices $P_{i_1}, \ldots, P_{i_p}$;

c) construimos un árbol con los vértices $P_1, P_{i_1}, \ldots, P_{i_p}$ de tal índole que el vértice P_1 sea de grado k;

d) construimos el árbol con $n-p$ vértices restantes $\{P_1, \ldots, P_{n+1}\} \setminus \{P_1, P_{i_1}, \ldots, P_{i_p}\}$. Elegimos en éste un vértice arbitrario y lo unimos mediante una arista con P_1.

En b) la elección se realiza empleando $\binom{n}{p}$ procedimientos y, en virtud de la fórmula de Clark (problema 5.89), la construcción se realiza aplicando $\binom{p-1}{k-1}\, p^{p-k}$ procedimientos; en d) la construcción se realiza por $(n-p)^{n-p-1}$ procedimientos. En total esto nos da el primer miembro de la identidad que se demuestra. El segundo miembro se encuentra con ayuda de la fórmula de Clark (problema (5.89)), si la multiplicamos por $k+1$.

5.92. Mostremos al principio que

$$G_k(n)=\frac{1}{k!}\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_k=n\\ j_l>0}}\frac{n!}{j_1!\ldots j_k!}\,j_1^{j_1-2}\ldots j_k^{j_k-2}. \qquad (5.9')$$

Con este fin aprovechemos el siguiente método de enumerar los bosques:

a) prefijamos un juego ordenado de k números positivos $j_1, \ldots, j_k$ tales que se verifique $j_1+\ldots+j_k=n$;

b) *representamos el conjunto de vértices del bosque en forma de una unión* de k subconjuntos disjuntos $X_1, \ldots, X_k$ tales que $|X_i| = j_i\ (i=1, \ldots, k)$;

c) construimos k árboles con los conjuntos de vértices $X_1, \ldots, X_k$, respectivamente;

d) notamos que como resultado de la enumeración cada bosque se obtendrá $k!$ veces.

De estos razonamientos proviene precisamente la fórmula (5.9').

Hagamos uso ahora de $T(z)$ obtenido en el problema 5.84. De (5.9') se deduce

$$\sum_{n=1}^{\infty}L_k(n)\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}[T(z)]^k. \qquad (5.10')$$

Según la fórmula integral de Cauchy, de aquí obtenemos

$$L_k(n)=\frac{n!}{k!\,2\pi i}\oint\frac{T^k(z)\,dz}{z^{n+1}}.$$

Haciendo uso de la relación para $T(z)$, obtenida en el problema 5.84, escribamos la última expresión en la forma

$$L_k(n) = \frac{n!}{k!\,2\pi i} \oint \left[0(z) - \frac{1}{2} 0^2(z) \right]^k \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Con ayuda del cambio de la variable (véase el problema 5.85), hallamos

$$L_k(n) = \frac{n!}{2\pi i k!} \oint \left[w - \frac{1}{2} w^2 \right]^k \frac{(1-w)\, e^{nw}\, dw}{w^{n+1}} =$$

$$= \frac{n!}{k!} \operatorname{Coef}_{w^n} \left[(w^k - w^{k+1}) \left(1 - \frac{1}{2} w \right)^k e^{nw} \right] =$$

$$= \frac{n!}{k!} \left[\sum_{j=0}^{\min(n-k,\, k)} \left(-\frac{1}{2} \right)^j \binom{k}{j} \frac{n^{n-k-j}}{(n-k-j)!} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{\min(n-k-1,\, k)} \left(-\frac{1}{2} \right)^j \binom{k}{j} \frac{n^{n-k-j-1}}{(n-k-j-1)!} \right] =$$

$$= \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^{\min(n-k,\, k)} \left(-\frac{1}{2} \right)^j \binom{k}{j} (k+j) \frac{n^{n-k-j-1}}{(n-k-j)!},$$

de donde se deduce la 3ª fórmula de Rényi.

5.93. Existen $(n-2)(n-3)\ldots(n-k)$ métodos para construir un camino de P_1 a P_2 que pase por $k-2$ de los $n-2$ vértices restantes (digamos, por $P_3, \ldots, P_k$). Al suprimir en el árbol el camino de P_1 a P_2 de longitud k, obtendremos un bosque con n vértices marcados y k componentes, en el cual los vértices $P_1, \ldots, P_k$ pertenecen a distintos componentes. En las designaciones del problema 5.87 el número de tales bosques es igual a $\overline{l}_k(n-k+1)$. Así pues, $\gamma_k(n) = (n-2)(n-3)\ldots(n-k)\,\overline{l}_k(n)$. De aquí hallamos, de acuerdo con la 2ª fórmula de Cayley, $\gamma_k(n) = (n-2)(n-3)\ldots(n-k) \times \times k n^{n-k-1}$.

5.94. Para $n=2$ se tiene un único árbol con los vértices P_1, P_2 unidos mediante una arista. Por eso, $v_1 = v_2 = 1$, y la fórmula de Moon es cierta.

Supongamos que la fórmula de Moon es cierta para todos los árboles que tienen $k = 2, \ldots, n-1$ vértices y demostrémosla para todos los árboles con $k = n$ vértices. Examinemos toda clase de árboles, en los cuales los vértices P_n son de grado $v_n = 1$ (vértice terminal), y para $i = 1, \ldots, n-1$ el vértice P_i es de grado v_i. El número de tales árboles es igual a $t(n; v_1, \ldots, v_{n-1}, 1)$. Por cuanto el vértice P_n puede ser unido por una arista con cualquiera de los vértices $P_1, \ldots, P_{n-1}$, entonces

$$t(n; v_1, \ldots, v_{n-1}, 1) = \sum_{i=1}^{n-1} t(n-1; v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i - 1, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}).$$

Supuesta la inducción, tenemos

$$t(n-1; v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i - 1, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}) =$$

$$= \frac{(n-3)!}{(v_1-1)! \ldots (v_{i-1}-1)!\,(v_i-2)!\,(v_{i+1}-1)! \ldots (v_{n-1}-1)!},$$

por eso

$$t(n;\ v_1,\ \ldots,\ v_{n-1},\ 1) =$$

$$= (n-3)! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(v_1-1)!\ \ldots\ (v_{i-1}-1)!\ (v_i-2)!\ (v_{i+1}-1)!\ \ldots\ (v_{n-1}-1)!} =$$

$$= (n-3)! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{v_i-1}{(v_1-1)!\ \ldots\ (v_i-1)!\ \ldots\ (v_{n-1}-1)!} =$$

$$= \frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^{n-1}(v_i-1)!} \sum_{i=1}^{n-1} (v_i-1) = \frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^{n}(v_i-1)!} \sum_{i=1}^{n} (v_i-1),$$

puesto que $v_n = 1$. Teniendo presente la condición impuesta en la suma de grados de los vértices, de aquí obtenemos

$$t_n(v_1,\ \ldots,\ v_{n-1},\ 1) = \frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^{n}(v_i-1)!}\,[2(n-1)-n] = \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}(v_i-1)!}.$$

Así pues, para el caso particular en consideración, cuando $v_n = 1$, la fórmula de Moon queda demostrada. Indiquemos ahora que cualquier árbol con $n \geqslant 2$ vértices tiene al menos un vértice terminal (no obligatoriamente P_n, como se examinaba más arriba). Por eso la fórmula de Moon es válida también en el caso general.

5.95. a) En virtud de la fórmula de Moon del problema 5.94, tenemos

$$t(n) = \sum_{v_1+\ldots+v_n=2(n-1)} \frac{(n-2)!}{(v_1-1)!\ \ldots\ (v_n-1)!} =$$

$$= \sum_{\substack{(v_1-1)+\ldots+(v_n-1)=n-2 \\ v_i \geqslant 1}} \frac{(n-2)!}{(v_1-1)!\ \ldots\ (v_n-1)!}.$$

Haciendo uso ahora del teorema polinomial, obtenemos de aquí el resultado que se quería.

b) Se debe demostrar la fórmula para el número $T(n, r)$ de árboles con n vértices marcados $P_1, \ldots, P_n$, de los cuales r vértices son terminales. Supongamos al principio, que son terminales los vértices $P_{n-r+1}, \ldots, P_n$, y sólo ellos. Por consiguiente, $v_i \geqslant 2$, si $1 \leqslant i \leqslant n-r$, y $v_i = 1$, si $i \geqslant n-r+1$, donde v_i es el grado del vértice P_i. El número de árboles de este tipo (véase el problema 5.94) es igual a

$$\sum_{\substack{(v_1-1)+\ldots+(v_{n-r}-1)=n-2 \\ v_i>1}} \frac{(n-2)!}{(v_1-1)!\ \ldots\ (v_{n-r}-1)!}. \qquad (5.11')$$

Observemos que la suma (5.11') es igual a $(n-r)!\,S(n-2,\ n-r)$ (véase el problema 5.79). Por cuanto de vértices terminales pueden servir los vértices de cualquier r-subconjunto del conjunto $P_1, \ldots, P_n$, obtenemos

$$T(n, r) = \binom{n}{r} (n-r)!\,S(n-2,\ n-r) = \frac{n!}{r!}\,S(n-2,\ n-r),$$

lo que se trataba de demostrar.

c) Teniendo presente la fórmula de Moon y suponiendo que el grado del vértice P_1 es igual a $v_1 = k$, mientras que los grados v_i ($i \neq 1$) de otros vértices son arbitrarios, llegamos a que

$$T_k(n) = \sum_{\substack{k-1+(v_2-1)+\ldots+(v_n-1)=n-2 \\ v_i \geqslant 1}} \frac{(n-2)!}{(k-1)!\,(v_2-1)!\,\ldots\,(v_n-1)!} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \sum_{\substack{(v_2-1)+\ldots+(v_n-1)=n-k-1 \\ v_i \geqslant 1}} \frac{(n-k-1)!}{(v_2-1)!\,\ldots\,(v_n-1)!}.$$

De acuerdo con el teorema polinomial, la suma en la última expresión es igual a $(n-1)^{n-k-1}$. Por eso

$$T_k(n) = \frac{(n-2)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\,(n-1)^{n-k-1} = \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

lo que se trataba de demostrar.

5.96. Sea p el grado del vértice P_1 ($1 \leqslant p \leqslant n-1$) y sean $P_{i_1}, \ldots, P_{i_p}$ los vértices adyacentes a P_1. Los vértices $P_{i_1}, \ldots, P_{i_p}$ pueden elegirse empleando $\binom{n-1}{p}$ procedimientos. Los $n-1-p$ vértices restantes P_m ($m \neq 1, i_1, \ldots, i_p$) pueden ser divididos en p clases definidas del modo siguiente: P_m pertenece a la j-ésima clase ($j = 1, \ldots, p$), si el único camino de P_1 a P_m pasa por P_{ij}. Supongamos que la j-ésima clase contiene m_j vértices ($m_j \geqslant 0$), $m_1 + \ldots + m_p = n-1$. Los vértices de la j-ésima clase forman junto con P_{ij} un árbol con $m_j \geqslant 1$ vértices de altura $k-1$ sobre el vértice P_{ij}.

Por cuanto el número de particiones en clases es igual al número $(m_1 - 1, \ldots, m_p - 1)$-muestras y el número de árboles con vértices de la j-ésima clase es igual a $d_{k-1}(m_j - 1)$, el problema queda resuelto.

5.97. La solución se obtiene directamente de la fórmula recurrente del problema 5.87. Teniendo en cuenta la definición de la función generatriz $D_k(z)$ y empleando dicha fórmula, al igual que el hecho de que $d_k(1) = 1$ para $k \geqslant 1$, obtenemos

$$D_k(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p} \times$$

$$\times \sum_{\substack{m_2+\ldots+m_p=n-1 \\ m_i>0}} \frac{(n-1-p)!}{(m_1-1)!\,\ldots\,(m_p-1)!}\, d_{k-1}(m_1)\,\ldots\,d_{k-1}(m_p) =$$

$$= z + z \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{n-1=p} \sum_{m_1+\ldots+m_p=n-1} \prod_{i=1}^{p} z^{m_i} \frac{d_{k-1}(m_i)}{(m_i-1)!} =$$

$$= z + z \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} d_{k-1}(m) \frac{z^m}{(m-1)!} \right)^p =$$

$$= z \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D_{k-1}^p(z) = z \exp\{D_{k-1}(z)\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

y la fórmula requerida queda demostrada, puesto que $D_0(z) = z$.

5.98. Veamos un árbol, en el cual la altura de todos los $n \geqslant 2$ vértices por encima del vértice P_1 no sobrepasa de k $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Todos los vértices del árbol, distintos de P_1, pueden dividirse en k clases, con la particularidad de que en la j-ésima clase se incluyen todos aquellos vértices, cuya altura por encima de P_1 es igual a j $(1 \leqslant j \leqslant k)$. Designemos por $m_j \geqslant 0$ el número de vértices en la j-ésima clase. Entonces $\sum_{j=1}^{k} m_j = n - 1$. Si los números m_j están fijados, la distribución de $n - 1$ vértices en clases puede realizarse empleando $(n - 1)!/(m_1! \ldots m_k!)$ procedimientos. Es evidente que cada uno de m_1 vértices de la primera clase es adyacente a P_1; cada uno de los m_2 vértices de la segunda clase es adyacente a cierto vértice de la primera clase, etc.; por fin, cada uno de los m_k vértices de la k-ésima clase es adyacente a uno de los m_{k-1} vértices de la $(k - 1)$-ésima clase.

Por cuanto la adyacencia de los vértices de la j-ésima y $(j + 1)$-ésima clases puede ser establecida con ayuda de $m_j m_{j+1}$ procedimientos, el número de métodos de construcción de los árboles para una partición dada de los vértices en clases será igual a $m_1^{m_1} m_2^{m_2} \ldots m_{k-1}^{m_k}$.

Llegamos pues, como resultado de nuestros razonamientos, a la fórmula buscada. Notemos que si $m_j = 0$, entonces $m_{j+1} = \ldots = m_k = 0$, de suerte que en realidad se deben tomar no todas las particiones en clases posibles, sino sólo aquellas para las cuales se cumple la condición que acabamos de indicar. Sin embargo, la fórmula para $d_k(n)$ muestra que este requisito no es esencial: para las particiones que no satisfacen la condición mencionada el segundo miembro se anula.

5.99. La primera igualdad está clara. La segunda igualdad se demuestra igual que la fórmula para los números $d_k(n)$ del problema antecedente; la diferencia consiste en que la sumación en la fórmula para $\overline{d}_k(n)$ se realiza respecto de los sumandos positivos.

Las condiciones $n \geqslant 3$, $3 \leqslant k \leqslant n$ se deben a que el (0, 0, 0)-grafo (véase el problema 5.66) no tiene bucles (lazos) y aristas paralelas y, por consiguiente, ciclos (circuitos) de longitud 1 y 2.

5.100. Con el fin de enumerar los grafos, de los cuales se trata en las condiciones del problema, hagamos uso del procedimiento siguiente:

a) partimos el n-conjunto de vértices en partes de un modo tal que $n - k$ partes se compongan de un solo elemento y una parte contenga k elementos; esta partición puede ser realizada empleando $B_n(n - k, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = \frac{n!}{(1!)^{n-k}\,(k!)^1\,(n-k)!\,1!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ métodos;

b) unimos los elementos del k-conjunto elegido en a), mediante las aristas, de tal manera que se obtenga un ciclo; es obvio que esta operación puede ser realizada empleando $(k - 1)!/2$ métodos diferentes.

De resultas tenemos

$$S_k(n) = \frac{(k-1)!}{2} \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!}$$

y el problema queda resuelto.

5.101. Véase el problema anterior en lo que se refiere a las condiciones $n \geqslant 3$, $3 \leqslant k \leqslant n$. Si de la familia de aristas de un grafo conexo que tiene el conjunto de vértices X, $|X| = n$, y un único ciclo de longitud k, eliminamos las aristas que forman el ciclo, se obtendrá un bosque que contiene k componentes. (Los últimos pueden estar compuestos, en particular, de un solo vértice aislado.) Por eso, para enumerar los grafos en consideración podemos proceder del modo siguiente:

a) Supongamos que al principio tenemos n vértices aislados. Construimos un grafo que tiene un único ciclo de longitud k y $n - k$ vértices aislados. De

acuerdo con el problema 5.100, podemos construir

$$S_k(n) = \frac{1}{2k} \frac{n!}{(n-k)!} \tag{5.12'}$$

grafos de este género. Los vértices del ciclo se designarán por $P_1, \ldots, P_k$.

b) Prefijamos un juego ordenado de k números enteros no negativos $n_1, \ldots, n_k$ que en la suma son iguales a $n - k$.

c) Representamos el conjunto $X \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$ compuesto de $n - k$ elementos en forma de una unión de k subconjuntos disjuntos, entre los cuales pueden haber también vacíos, de un modo tal que $|X_j| = n_j$ $(j = 1, \ldots, k)$. El número de tales representaciones es igual al número de $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$-particiones y equivale a $(n-k)!/(n_1! \ldots n_k!)$.

d) Para cada $j = 1, \ldots, k$ elegimos uno de $T(n_j+1) = (n_j+1)^{n_j-1}$ árboles con el conjunto de vértices $\{P_j\} \cup X_j$.

e) Por fin, construimos el grafo final suspendiendo de los vértices $P_1, \ldots, P_k$ del ciclo, construido en a), los árboles elegidos en e).

Seleccionando en cada punto del algoritmo descrito toda clase de variantes, obtendremos todo el conjunto de (0, 0, 0)-grafos conexos con n vértices y un único ciclo de longitud k. De aquí obtenemos

$$P_k(n) = S_k(n) \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_k=n-k \\ n_i \geqslant 0}} \frac{(n-k)!}{n_1! \ldots n_k!} \prod_{j=1}^{k} (n_j+1)^{n_j-1}. \tag{5.13'}$$

De (5.12') y (5.13') llegamos a la primera fórmula citada en las condiciones del problema.

5.102. Al multiplicar ambos miembros de la primera fórmula del problema 5.101 por $y^k z^n/n!$ y al sumar respecto de n desde 3 hasta ∞, y respecto de k desde 3 hasta n, obtenemos

$$P(z, y) = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{y^k}{n!} z^n \frac{n!}{2k} \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_k=n-k \\ n_i \geqslant 0}} \prod_{j=1}^{k} \frac{(n_j+1)^{n_j-1}}{n_j} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{y^k}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_k=n-k \\ n_i \geqslant 0}} \prod_{j=1}^{k} (n_j+1)^{n_j} \frac{z^{n_j+1}}{(n_j+1)!} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{y^k}{k} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right]^k = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{y^k}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{y^k \theta^k(z)}{k} = -\frac{1}{2} \left[\ln(1 - \theta(z)\, y) + y\theta(z) + \frac{y^2\theta^2(z)}{2} \right];$$

la fórmula para $P(z)$ se deduce de aquí, si $y = 1$, al tomar en consideración que $P(z) = P(z, 1)$.

5.103. Para obtener todos los (0, 0, 0)-grafos conexos que tengan n vértices y un único ciclo de longitud k $(n \geqslant k \geqslant 3)$, es suficiente construir en cada bosque radical con n vértices y k componentes diferentes ciclos sobre el conjunto de raíces. Por cuanto el número de bosques radicales con n vértices y k compo-

nentes es igual a $\binom{n-1}{k-1} n^{n-k}$ (véase el problema 5.88) y el número de ciclos de longitud k es igual a $(k-1)!/2$, tenemos

$$P_k(n) = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} \frac{1}{2} (k-1)!,$$

de donde se desprende, precisamente, el resultado que se busca.

La fórmula también se puede obtener haciendo uso de la representación $P(z, y)$ del problema 5.102, de manera análoga al problema 5.91.

§ 3. Planos finitos

5.104. Hagamos uso del teorema de Desargues (fig. 5.15'). Construimos bajo un ángulo suficientemente estrecho las rectas AD, AF, BD y BF. Trazamos la recta DF y elegimos en ella el punto O. Las construcciones ulteriores se ven en el dibujo. Hallamos el punto C. De acuerdo con el teorema de Desargues, el

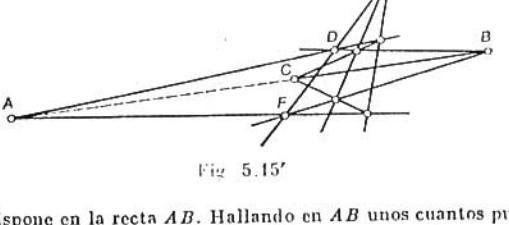


Fig. 5.15'

punto C se dispone en la recta AB. Hallando en AB unos cuantos puntos intermedios más podremos trazar toda la recta.

5.105. Método I. Si fijamos un punto, el segundo se elegirá empleando $(n^2 + n + 1) - 1 = n^2 + n$ procedimientos: a continuación, el tercer punto puede encontrarse empleando $(n^2 + n + 1) - (n + 1) = n^2$ procedimientos, donde $(n + 1)$ es el número de puntos de la recta que pasa por el par de puntos obtenido. El cuarto punto puede elegirse por $(n^2 + n + 1) - (n - 1)\,3 + 3 = (n - 1)^2$ procedimientos, donde $((n - 1)\,3 + 3)$ es el número de puntos dispuestos en los lados del triángulo (polígono de tres vértices) obtenido. El quinto punto puede elegirse empleando $(n^2 + n + 1) - (6n - 5) = n^2 - 5n + 6 = (n - 2)(n - 3)$ procedimientos, donde $(6n - 5)$ es el número de puntos situados en los lados del cuadrilátero obtenido. Mas cada recta en este caso se encuentra tantas veces, cuantas cuaternas ordenadas puedan obtenerse de n puntos de la curva, distintos del punto dado. Por eso, el número de curvas que se busca es igual a

$$(n^2 + n)\, n^2\, (n - 1)^2\, (n - 2)\, (n - 3)/A_n^4 = n^2\, (n^2 - 1).$$

Método II. Designemos por x el número de curvas que pasan por un punto dado. El producto del número x por el número de todos los puntos en el plano $(n^2 + n + 1)$ es igual al producto del número de puntos de la curva $n + 1$ por el número de todas las curvas en el plano, es decir, por $n^2\,(n - 1)\,(n^2 + n + 1)$. Así pues, tenemos una igualdad $x\,(n^2 + n + 1) = (n + 1)\, n^2 \times (n - 1)\,(n^2 + n + 1)$, de donde $x = n^2\,(n^2 - 1)$.

5.106. Si fijamos un par de puntos, el punto tercero puede elegirse empleando $(n^2 + n + 1) - (n + 1) = n^2$ procedimientos, donde $(n + 1)$ es el número de puntos de la recta que pasa por el par de puntos dado. A continuación,

el cuarto punto puede ser elegido empleando $(n^2 + n + 1) - ((n - 1) 3 + 3) = (n - 1)^2$ procedimientos. El quinto punto puede elegirse empleando $(n^2 + n + 1) - (6n - 5) = (n - 2)(n - 3)$ procedimientos; aquí $(6n - 5)$ representa el número de puntos prohibidos por la elección de la cuaterna dada. Mas en este caso cada curva se encuentra tantas veces, cuantas ternas ordenadas pueden obtenerse a partir de $n - 1$ puntos de la curva, distintos de los dos iniciales. Por eso el número total de curvas que pasan por el par dado de puntos será igual a

$$n^2 (n - 1)^2 (n - 2)(n - 3)/A^3_{n-1} = n^2 (n - 1).$$

5.107. La curva de segundo orden en un plano proyectivo finito de orden n es un $(n + 1)$-arco, es decir, un conjunto compuesto de $n + 1$ puntos que no son colineales tomados tres a tres.

Si fijamos un par de puntos y dos rectas cualesquiera que pasan por un punto de dicho par, el tercer punto puede elegirse empleando $(n^2 + n + 1) - ((n - 1) 3 + 3) = (n - 1)^2$ procedimientos, donde $(n^2 + n + 1)$ es el número de puntos del plano proyectivo finito de orden n. Por cuanto en cada recta yacen $n + 1$ puntos, entonces $((n - 1) 3 + 3)$ es el número de puntos situados en dos tangentes dadas y en la recta que pasa por el par dado de puntos. Además, cada curva se cuenta $(n + 1) - 2 = n - 1$ veces, puesto que a título de tercer punto puede ser elegido cualquiera de los $n + 1$ puntos, a excepción de los dos puntos dados.

El número total de curvas es igual a $(n - 1)^2/(n - 1) = n - 1$.

5.108. Un par de puntos de intersección de la curva hiperbólica con la recta impropia puede ser elegido entre $(n + 1) - 1 = n$ puntos impropios no colineales respecto de los dos puntos dados, empleando $C^2_n = n(n - 1)/2$ procedimientos. El quinto punto puede ser añadido empleando $(n^2 + n + 1) - (((n - 2) 2 + 1) 3 + 4) = n^2 - 5n + 6$ procedimientos; aquí $(((n - 2) 2 + 1) 3 + 4)$ es el número de puntos prohibidos por la elección de la cuaterna dada. En este caso cada curva se cuenta $(n + 1) - 4 = n - 3$ veces. Por eso el número de curvas buscadas es igual a

$$n (n - 1)(n - 2)(n - 3)/(2 (n - 3)) = n (n - 1)(n - 2)/2.$$

5.109. Una curva de segundo orden se define unívocamente por cuatro puntos y una tangente en uno de ellos. Para un par inicial de puntos ordinarios un punto impropio, que no sea colineal con ellos, puede elegirse empleando n métodos. Se tienen $(n^2 + n + 1) - ((n - 1) 3 + 3) = (n - 1)^2$ puntos que no están situados en los lados del triángulo obtenido. De la cantidad mencionada de puntos están prohibidos, además, para la elección del cuarto punto, todos los puntos impropios distintos del punto impropio de tangencia y del punto impropio de la recta que pasa por el par inicial de puntos: hay en total $n - 1$ tales puntos. Por eso, para la elección del cuarto punto tenemos $(n - 1)^2 - (n - 1) = (n - 1)(n - 2)$ métodos. En este caso cada recta se cuenta $(n + 1) - 3 = n - 2$ veces. Por consiguiente, el número buscado de curvas parabólicas es igual a

$$n (n - 1)(n - 2)/(n - 2) = n (n - 1).$$

5.110. El número de todas las curvas que pasan por un par dado de puntos es igual a $n^2 (n - 1)$ (véase el problema 5.106). Al restar de este número el número de curvas parabólicas y el número de curvas hiperbólicas, encontramos el número de las elípticas:

$$n^2 (n - 1) - n (n - 1)(n - 2)/2 - n (n - 1) = n^2 (n - 1)/2.$$

5.111. En un plano hay en total $n^2 + n + 1$ puntos; de ellos pueden formarse $C^2_{n^2+n+1} = (n^2 + n + 1)(n^2 + n)/2$ pares de puntos. Por cuanto a través

de un par de puntos pasan $n^2(n-1)$ curvas y cada curva figura en el cálculo C_{n+1}^2 veces, el número de todas las curvas será igual a

$$(1/2)(n^2+n+1)(n^2+n)n^2(n-1))/C_{n+1}^2 = n^2(n-1)(n^2+n+1).$$

5.112. Por un punto de un arco pasan $n+1$ rectas, en las cuales yacen todos los puntos del plano, incluidos todos los puntos del arco. En cada una de dichas rectas yace no más de un punto del arco, distinto del dado. Por eso, el valor máximo de k es $(n+1)+1 = n+2$. El resultado se precisa para los planos proyectivos de orden impar. Supongamos que el arco del plano proyectivo de orden impar n contiene $n+2$ puntos. En cada recta que pasa por uno de los puntos del arco yace exactamente un solo punto del arco, distinto del dado. Por eso, en cada una de las $n+1$ rectas que pasan por cierto punto del plano, distinto de los puntos del arco, se disponen o un cero o bien dos puntos del arco. Por consiguiente, el número de puntos k del arco resulta ser par, mientras que $n+2$ es impar cuando n es impar. La suposición de este modo queda rechazada y el valor máximo de k para un plano de orden impar n es igual a $n+1$.

5.113. En un plano de orden impar n el $(n+1)$-arco será un óvalo. Por cada punto del arco pasa una tangente. En todas las secantes y tangentes, que pasan por el punto P no perteneciente al óvalo, está situado un número par de $n+1$ puntos del óvalo. Por cuanto en cada secante se disponen dos puntos del óvalo, en todas las tangentes que pasan por el punto P yace un número par de puntos del óvalo, por lo cual el número de tales tangentes es par.

En la tangente se disponen n puntos, distintos del punto de tangencia. Por cada uno de estos puntos pasa la tangente dada y, de acuerdo con lo demostrado más arriba, por lo menos una tangente más. Pero, además de la tangente dada hay exactamente n tangentes. Por eso, por cada punto fuera del óvalo que está situado fuera de la tangente en consideración, pasa exactamente una otra tangente. El número x de todos los puntos, externos con relación al óvalo, que se disponen en todas las tangentes se hallará mediante el cálculo del número de incidencias. En cada una de las $n+1$ tangentes yacen n puntos del tipo requerido, y por cada uno de estos puntos pasan dos tangentes, razón por la cual $(n+1)n = 2x$, $x = n(n+1)/2$.

5.114. Cada 4-arco cuenta con seis secantes; seis secantes del arco se cortan de dos en dos en tres puntos (diagonales). En cada secante se disponen $(n-2)$ puntos, además de dos puntos del arco y un punto diagonal. En seis secantes tenemos $4+3+6(n-2) = 6n-5$ puntos.

El número de puntos del plano, que no yacen en las secantes del arco, es igual a

$$n^2+n+1-(6n-5) = (n-2)(n-3),$$

$$(n-2)(n-3) = 0 \Leftrightarrow n = 2, \quad \text{o bien} \quad n = 3.$$

Por consiguiente, en los planos de órdenes $n = 2$ y $n = 3$ existen 4-arcos completos.

5.115. Cada secante del 5-arco se interseca con tres secantes que pasan por los puntos del arco (no situados en la secante de que se trata) en tres puntos distintos. En diez secantes se encuentran $3 \cdot 10/2 = 15$ tales puntos. Hay $n+1-2-3 = n-4$ puntos de la secante que no yacen en otras secantes. En las diez secantes están situados $5+15+10(n-4) = 10n-20$ puntos. Por consiguiente, fuera de las secantes se encuentran $n^2+n+1-(10n-20) = n^2-9n+21$ puntos.

5.116. Un 5-arco es completo, si $n^2-9n+21 = 0$ (véase el problema 5.115). El discriminante es $D = 81-84 < 0$. La afirmación está demostrada.

5.117. Tomemos un cuadrilátero completo. En cada uno de sus lados (es decir, en la secante) se encuentran 2 vértices, 1 punto diagonal y 2 puntos más $5-(2+1) = 2$. En 6 lados yacen 4 vértices, tres puntos diagonales y, además, $6 \cdot 2 = 12$ puntos, es decir, 19 en total. Fuera de los lados tenemos $21-19 = 2$ puntos. Tres puntos diagonales se disponen en una misma recta; además de ellos en dicha recta están situados los dos puntos fuera de los lados,

que fueron mencionados. La adición de cada uno de ellos a los cuatro vértices da un 5-arco; por cuanto la recta que pasa por los puntos mencionados no contiene vértices, la adición de ambos puntos a los vértices nos da un 6-arco. De estos razonamientos se ve que un 6-arco se define estricta y unívocamente por un cuadrilátero. El número de cuadriláteros ordenados en un plano de orden 4 es igual a $21 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9$; en una sexterna de puntos del arco el número de tales cuadriláteros es igual a $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$; tal número de veces figura en el cálculo cada 6-arco. De aquí, el número de todos los 6-arcos es igual a $(21 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9)/(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) = 168$.

5.118. Por cada punto de un $(n+1)$-arco pasan (según el número de los puntos restantes del arco) n secantes y una tangente. En total (según el número de puntos del arco) hay $n+1$ tangentes. En todas las tangentes y secantes que pasan por el punto P no perteneciente al arco, yace un número impar $n+1$ de puntos del arco. Por cuanto en las secantes de este haz está situado un número par de puntos del arco, entonces por lo menos un punto debe encontrarse en la tangente. Con esto queda demostrado que por cada punto, no perteneciente al arco, pasa por lo menos una tangente de este arco. Hay $n^2+n+1-(n+1)=n^2$ puntos que no pertenecen al $(n+1)$-arco. En cada tangente yacen n tales puntos. Destaquemos una de las tangentes; cada una de las n tangentes restantes corta la destacada y por eso lleva $n-1$ puntos que no pertenecen al arco y a la tangente destacada. Ya que $n+n(n-1)=n^2$, todos los puntos de las tangentes considerados más arriba han de ser distintos. Esto significa, que las tangentes, diferentes de la destacada, se cortan en cierto punto de la tangente destacada. Así pues, todas las $n+1$ tangentes pasan por un mismo punto 0 y no hay otras rectas que pasen por 0. En particular, por 0 no pasa ninguna secante y por consiguiente el $(n+1)$-arco en consideración es no completo.

5.119. Véase la resolución del problema 5.118.

5.120. Analicemos el caso de $n=2m$ par. Los puntos del plano de orden par n se dividen respecto del óvalo, que tiene aquí $n+2$ puntos, en dos clases: los puntos del óvalo y los exteriores. Por un punto exterior pasan $(n+2)/2 = m+1$ secantes, en cada secante se disponen $n-1$ puntos exteriores, y a través de los puntos exteriores de la secante pasan todas las $m(n-1)=C_n^2$ secantes que se definen por n puntos del óvalo, que no yacen en la secante dada. Por eso, con el haz de m secantes que pasan por el punto externo y son distintas de la secante dada está relacionada la partición de $n=2m$ puntos restantes del óvalo en m pares. Con todos los $n-1$ puntos de la secante está ligado el juego de $n-1$ tales particiones de los n puntos citados; en este caso cada par de puntos del óvalo fuera de la secante dada figura una y sólo una vez.

Veamos el caso en que $n=2m+1$ es impar. Aquí por el punto exterior pasará $(n-1)/2$ ó $(n+1)/2$ secantes. Al designar por r y l los números de tipos de los puntos que contienen $(n-1)/2$ y $(n+1)/2$ secantes, respectivamente, obtenemos las siguientes ecuaciones para la secante dada:

$$r+l=n-1, \quad \frac{n-3}{2}r+\frac{n-1}{2}l=C_{n-1}^2, \text{ de donde } r=l=(n-1)/2.$$

Por consiguiente, con todos los $n-1$ puntos de cada secante del óvalo, distintos de los puntos del mismo, están relacionados dos juegos de $(n-1)/2$ particiones, a $(n-1)/2$ pares en cada una, y de $(n-1)/2$ particiones, a $(n-3)/2$ pares en cada una, sin pares comunes.

5.121. Para los puntos del k-arco tenemos $i=k-1$, y para los puntos restantes del plano tenemos $0 \leqslant i \leqslant k/2$.

De las definiciones de plano proyectivo de orden n y de k-arco obtenemos las ecuaciones $K_{k-1}=k$, $K_{k-1}+\sum\limits_i K_i = n^2+n+1$. El cálculo del número de

incidencias de los puntos de tipo diferente con secantes del k-arco ofrece la ecuación

$$(k-1)\,K_{k-1}+\sum_i iK_i=\frac{k\,(k-1)}{2}\,(n+1).$$

El cálculo del número de pares de secantes que pasan por todos los puntos del plano da la siguiente ecuación

$$\frac{(k-1)\,(k-2)}{2}\,K_{k-1}+\sum_i\frac{i\,(i-1)}{2}\,K_i=\frac{(k-2)\,(k-1)\,(k+1)\,k}{8}.$$

El cálculo del número de incidencias de los puntos respecto de otras rectas y del número de pares de otras rectas no presta nuevas dependencias.

De solución del sistema en el caso que se analiza sirven las fórmulas

$$K_0=n^2+n+1-k-k\,(k-1)\,(4n+5k-k^2-10)/8,$$
$$K_1=k\,(k-1)\,(2n+5k-k^2+8)/4,$$
$$K_2=k\,(k-1)\,(k-2)\,(k-3)/8.$$

5.122. El sistema de ecuaciones para determinar el número de puntos K_i será en este caso como sigue

$$K_0+K_1+K_2+K_3=n^2+n-5,$$
$$K_1+2K_2+3K_3=15\,(n-1),$$
$$K_2+3K_3=45.$$

De aquí

$$n^2-14n+40\leqslant K_0\leqslant n^2-14n+55,$$
$$15\,(n-7)\leqslant K_1\leqslant 15\,(n-4).$$

5.123. El sistema de ecuaciones para determinar el número de puntos K_i según el número i de secantes del arco, que pasan por los puntos del plano, tendrá por expresión:

$$\sum_{i=0}^{(n-1)/2}K_i=n^2+1,\qquad\sum_{i=0}^{(n-1)/2}iK_i=\frac{n\,(n-1)^2}{2},$$
$$\sum_{i=0}^{(n-1)/2}\frac{i\,(i-1)}{2}\,K_i=\frac{(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n}{8}.$$

Resolviendo el sistema respecto de K_0, K_1, K_2, obtenemos

$$K_2=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{8}-\sum_{i=3}^{(n-1)/2}\frac{i\,(i-1)}{2}\,K_i,$$

$$K_1=\frac{n\,(n-1)\,(7n-n^2+8)}{4}+\sum_{i=3}^{(n-1)/2}i\,(i-2)\,K_i,$$

$$K_0=-n^3+3n^2-n+1-\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{(n-1)/2}(i-1)\,(i-2)\,K_i.$$

Admitamos que el arco en consideración es completo, es decir, $K_0 = 0$. Entonces, suponiendo que $n = 2m + 1$, de la última condición obtenemos:

$$\sum_{i=3}^{m} (i-1)(i-2) K_i = -4(4m^3 - 2m - 1).$$

Aquí $\sum_{i=3}^{m} (i-1)(i-2) K_i \geqslant 0$, puesto que los números K_i de puntos son no negativos, mientras que el segundo miembro de la ecuación, para $m \geqslant 1$, es negativo. La contradicción obtenida rechaza la suposición de que el n-arco en un plano proyectivo de orden impar n es completo.

5.124. El cuadrilátero completo tiene 4 vértices, 6 lados (secantes) y 3 puntos diagonales, es decir, puntos de intersección de los lados que no son vértices. Si estos puntos no son colineales, entonces definen de dos en dos 3 diagonales. Cada diagonal corta 2 lados, que pasan por el punto diagonal que no está situado en ella, en distintos puntos; hay en total 6 tales puntos. Los puntos citados y las rectas forman una figura que incluye 13 puntos y 9 rectas, con la particularidad de que en cada una de estas rectas se disponen 4 puntos de la figura y los demás $(n+1) - 4 = n - 3$ puntos de la recta no integran la figura. En las rectas de la figura se disponen en total $13 + 9(n-3) = 9n - 14$ puntos. El número de puntos restantes es igual a

$$(n^2 + n + 1) - (9n - 14) = n^2 - 8n + 15 = (n-3)(n-5).$$

5.125. Véase el problema 5.124.

5.126. Admitiendo lo contrario, llegamos a que el número de puntos no situados en las secantes del cuadrilátero es igual (véase el problema 5.124) a $(4-3)\cdot(4-5) = -1$, lo que es imposible.

5.127. Procedimiento I. En toda recta de un subplano baeriano se encuentran $m+1$ puntos de este subplano y $(n+1) - (m+1) = n - m$ otros puntos. En las rectas mencionadas yacen en total $(m^2 + m + 1)$ puntos del subplano y $(m^2 + m + 1)(n - m)$ otros puntos; la suma de estos números es igual al número de todos los puntos del plano. De aquí

$$(m^2 + m + 1) + (m^2 + m + 1)(n - m) = n^2 + n + 1,$$

$$n^2 - (m^2 + m)\, n + m^3 = 0.$$

Resolviendo la ecuación respecto de n, hallamos: $n_1 = m^2$, $n_2 = m$. Por cuanto $n > m$, entonces $n = m^2$.

Procedimiento II. Por un punto P de un plano no perteneciente al subplano pasa una recta del subplano; sobre ella yacen $m+1$ puntos del subplano. Cada una de las n rectas restantes que pasan por P contiene un punto del subplano; el número de estos puntos es igual a $(m^2 + m + 1) - (m + 1) = m^2$; de aquí, $n = m^2$.

5.128. Por hipótesis existe un punto P del plano que no se encuentra en las rectas del subplano. La unión de P con los puntos del subplano da $m^2 + m + 1$ diferentes rectas. Por cuanto el número de todas las rectas que pasan por P es igual a $n+1$, entonces $n + 1 \geqslant m^2 + m + 1$, $n \geqslant m^2 + m$.

5.130. Indicaciones. Muéstrese que el bloque-esquema generalizado (no todo par del v-conjunto participa en la construcción del esquema) con los parámetros $v = n^2$, $b = 3n$, $r = 3$, $k = n$, $\lambda = 1$ es equivalente al cuadrado latino.

5.131. Se sabe que un plano proyectivo finito es equivalente al conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de dos en dos. Lo mismo es cierto (véase el problema 5.130) para un plano afín.

5.132. No existen dos cuadrados latinos de orden 6 (problema de Euler sobre **36 oficiales**).

5.133. La respuesta es: 1 2 4, 2 3 5, 3 4 6, 4 5 7, 5 6 1, 1 3 7, 3 4 6, **2 6 7.**

5.134. a) Por dos puntos cualesquiera pasa una única recta. Sean (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) dos puntos distintos. Entonces el sistema

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0, \quad ux_2 + vy_2 + wz_2 = 0$$

tiene una única solución (con una exactitud de hasta un factor) respecto de (u, v, w).

b) De un modo análogo se comprueba que cualesquiera dos rectas se intersecan en un único punto.

c) Si $a \neq 0$, $a \in GF(q)$, entonces los puntos $(0, 0, a)$, $(0, a, 0)$, $(a, 0, 0)$, (a, a, a) son todos diferentes y cualesquiera tres de ellos no están situados en una misma recta.

5.135. Si los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) satisfacen la ecuación $ux + by + wz = 0$, entonces la satisfacen también los puntos $(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$, donde λ y μ son cualesquiera elementos de $GF(q)$.

5.136. La ecuación $\lambda + \mu = 1$ tiene exactamente $q + 1$ soluciones (véase el problema antecedente).

5.137. Los puntos buscados son: $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$. Las rectas: $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, $y + z = 0$, $x + z = 0$, $x + y = 0$, $x + y + z = 0$.

5.138. Cerciórese previamente de la validez de las propiedades siguientes de los campos de Galois $GF(p^h)$:

a) $(a + b)^p = a^p + b^p$, $(a + b)^{p^r} = a^{p^r} + b^{p^r}$, donde r es un número natural cualquiera;

b) cada elemento del campo de Galois $GF(q)$ satisface la ecuación $x^q - x = 0$.

Hágase uso también de la segunda definición de recta (problema 5.135).

Se necesita demostrar que un punto y una recta conservan su incidencia en las transformaciones proyectivas. Tenemos dos puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$. Por dichos puntos pasa la recta $(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$, donde $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, $\lambda, \mu \in GF(p^h)$. Hallemos la imagen de esta recta en la transformación proyectiva. Tenemos una colineación

$$s = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{p^r} \\ y^{p^r} \\ z^{p^r} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo aquí los puntos de la recta y haciendo uso de la propiedad a), tenemos un conjunto de imágenes de los puntos de la recta dada

$$\{\lambda^{p^r}(a_{11}x_1^{p^r} + a_{12}y_1^{p^r} + a_{13}z_1^{p^r}) + \mu^{p^r}(a_{11}x_2^{p^r} + a_{12}y_2^{p^r} + a_{13}z_2^{p^r}),\ \ldots,\ \ldots\}.$$

Ahora, con el fin de demostrar que este conjunto de imágenes es una recta, incidente con relación a los puntos A y B, basta demostrar que los conjuntos $\{(\lambda, \mu)\}$ y $\{(\lambda^{p^r}, \mu^{p^r})\}$ son equipotentes, donde $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ y $\lambda, \mu \in GF(p^h)$; r es fijo. Esto es evidente.

Demostremos a continuación que en el sistema

$$\begin{aligned} sx' &= a_{11}x^{p^r} + a_{12}y^{p^r} + a_{13}z^{p^r}, \\ sy' &= a_{21}x^{p^r} + a_{22}y^{p^r} + a_{23}z^{p^r}, \\ sz' &= a_{31}x^{p^r} + a_{32}y^{p^r} + a_{33}z^{p^r} \end{aligned}$$

podemos limitarnos a los valores de $r = 0, 1, \ldots, h - 1$, es decir, cualquiera que sea $m \geqslant h$, llegamos a uno de los h tipos de colineaciones. Basta demostrar que

$$\begin{pmatrix} x^{p^m} \\ y^{p^m} \\ z^{p^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{p^r} \\ y^{p^r} \\ z^{p^r} \end{pmatrix}, \quad m \geqslant h, \qquad r = 0, 1, \ldots, h-1.$$

Tenemos $m = ch + r$, donde $r = 0, 1, \ldots, h-1$. Luego, $x^{p^m} = x^{p^{ch+r}} = x^{p^{ch}p^r} = (x^{p^{ch}})^{p^r} = x^{p^r}$, puesto que $x^{p^{ch}} = x$.

Análogamente procedemos para y y z. Todo está demostrado.

5.139. En el plano $P(2, q)$ se tienen en total $q^2 + q + 1$ puntos y $q^2 + q + 1$ rectas. Mientras tanto, el número de puntos en cualquier recta es igual a

$$(q^2 - 1)/(q - 1) = q + 1.$$

El triángulo es una terna de puntos que no yace en su totalidad en una misma recta. Calculemos su número. A título del primer punto podemos tomar cualquiera de los $q^2 + q + 1$ puntos; a título del segundo, cualquiera de los $(q^2 + q + 1) - 1 = q^2 + q$. A título del tercer punto elegimos cualquiera, salvo los puntos de la recta que pasa por los dos primeros. Este número es igual a $(q^2 + q + 1) - (q + 1) = q^2$. De acuerdo con la regla del producto, el número buscado de triángulos es igual a $(q^2 + q + 1)(q^2 + q)\, q^2$.

5.140. En el plano $P(2, q)$ se tienen $q^2 + q + 1$ puntos. Supongamos que los vértices del cuadrilátero son M_1, M_2, M_3, M_4. A título de M_1 tomamos cualquiera de los $q^2 + q + 1$ puntos. A título de M_2, cualquiera de los $(q^2 + q + 1) - 1 = q^2 + q$ puntos. A título de M_3, cualquiera de los $(q^2 + q + 1) - (q + 1) = q^2$ puntos; a título de M_4, cualquiera de los puntos que no yacen en M_2M_3, M_1M_2, M_3M_1, es decir, cualquiera de los $(q^2 + q + 1) - (q + 1 + q + 1 + q + 1 - 3) = (q - 1)^2$ puntos. De acuerdo con la regla del producto, el número buscado de cuadriláteros es igual a $(q^2 + q + 1)(q^2 + q) \times q^2 (q - 1)^2$.

5.141. Se tienen h tipos de transformaciones proyectivas. Hallemos el número de colineaciones para cualquier tipo. Toda colineación se define unívocamente por la clase de matrices regulares asociadas. En toda clase de asociatividad hay $q - 1$ matrices. Hallemos el número de matrices regulares en un espacio euclídeo $(n+1)$-dimensional V sobre el campo $GF(q)$. Supongamos que $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ es la base del espacio V; σ es la matriz de la transformación lineal regular: $B_i = \sigma A_i$; $\{B_i\}$ es un sistema linealmente independiente. A todo sistema linealmente independiente $\{B_i\}$ le corresponde unívocamente una matriz regular σ y viceversa. Calculemos, por inducción, el número de elecciones de $\{B_i\}$ del espacio V.

El número $|\{B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_{n+1}\}| = (q^{n+1} - 1)(q^{n+1} - q) \ldots (q^{n+1} - q) \ldots (q^{n+1} - q^n)$ da la cantidad de matrices regulares. Al dividir este número por $q - 1$, obtendremos el número de colineaciones para el tipo dado de la transformación proyectiva n-dimensional. En nuestro caso $n = 2$. Entonces, el número de colineaciones del tipo i es igual a

$$(q^3 - 1)(q^3 - q)(q^3 - q^2)/(q - 1) = (q^2 + q + 1)(q^2 + 1)\, q^3 (q - 1)^2.$$

El grupo proyectivo general de transformación es de orden $h(q^2 + q + 1) \times (q^2 + 1)\, q^2 (q - 1)^2$.

5.142. Examínese la colineación con la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.145. Cada fila de la matriz puede elegirse empleando siete procedimientos y, al combinarlos, se obtiene $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$. Es obvio que las matrices degeneradas serán aquellas que se obtienen con ayuda de los puntos de una recta, pues en este último caso las filas matriciales son linealmente dependientes. Con ayuda de tres puntos de una recta obtendremos $3^3 = 27$ matrices, y para todas las 7 rectas, un total de 189 matrices de este tipo. Sin embargo, entre ellas hay

las que se repiten, por ejemplo, las matrices que se obtienen sólo de un punto. Por cuanto cada punto pertenece a tres rectas, el número de tales matrices será igual a 21. Por consiguiente, cada tal matriz se cuenta tres veces. Hay, pues, 14 matrices superfluas. Obtenemos finalmente 175 matrices degeneradas y 168 regulares.

5.146. Hágase uso de la forma canónica de la cónica

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 0, \quad a_1,\ a_2,\ a_3 \neq 0$$

y analícense dos casos: la recta $z = 0$ corta la cónica dada y no la corta.

SISTEMAS DE CONJUNTOS

§ 1. Problemas extremales en los grafos e hipergrafos

6.1. $[n^2/4]$; un grafo extremal es único y tiene forma de un grafo bipartido completo con partes que son, en lo posible, iguales: $K_{[n/2],]n/2[}$. Sea a_1 un vértice de grado máximo d; los extremos de las aristas que tienen por origen a_1 son los vértices $a_{n_1}, \ldots, a_{n-d+1}$, los cuales, estando ausentes los triángulos, forman un conjunto independiente; esto quiere decir que $|G| \leqslant d(a_1) + \ldots + d(a_{n-d}) \leqslant (n-d)\,d \leqslant n^2/4$.

Entre los problemas extremales éste es de un significado especial. Siendo en el aspecto histórico uno de los primeros resultados extremales, sirve al mismo tiempo de modelo para varios tipos de problemas extremales sobre grafos e hipergrafos. Mantel W. [Wiskundige Opgaven, 1907, 10, S, 60] fue el primero en obtener este resultado; a continuación el resultado se volvió a demostrar y descubrir reiteradamente. La primera ampliación cualitativa de él, junto con la demostración de la unicidad de la construcción extremal, fue obtenida por P. Turán [Mat. Fiz. Lapok., 1941, 48, p. 436—453; véase el problema 6.13, 1]. Una solución absolutamente no constructiva se deduce de 6.61. Véase la solución aducida aquí en [Jadjiivanov N., Nenov N. — Ilreportes de la Academia de Ciencias de Bulgaria, 1976, 25, No 11, p. 1575—1578].

6.2. $\binom{n}{[n/2]}$; la construcción extremal se representa por el l-grafo completo $C^l(S_n)$ con l que realiza el valor extremal. Si el hipergrafo $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ es una anticadena (es decir, se compone de las hiperaristas que no pueden ser encajadas de dos en dos), se verifica para él la desigualdad de Lubel — Meshalkin — Yamamoto $\sum_{e \in F} \binom{n}{|e|}^{-1} \leqslant 1$, de la cual obtenemos en seguida la desigualdad requerida $1 \geqslant \sum_{e \in F} \binom{n}{|e|}^{-1} \geqslant |F| \leqslant \binom{n}{[n/2]}^{-1} \Rightarrow |F| \leqslant \binom{n}{[n/2]}$. El resultado recibe el nombre de *teorema de Sperner* [Sperner E. — Math. Z., 1928, 27, p. 544—548], y las familias de conjuntos que no encajan uno en otro, se llaman a veces *spernerianas*. Históricamente este resultado representa el primer problema extremal sobre $\mathcal{P}(S_n)$ como sobre un conjunto parcialmente ordenado por inclusión ($\subseteq$); este problema está estrechamente vinculado con los fenómenos estructurales del tipo de teoremas de Dilworth [véase Frank A. — J. Comb. Th., 1980, 29, p. 176—184]; con respecto a la desigualdad de Lubel — Meshalkin — Yamamoto véanse los problemas 6.62, 6.63, 6.65.

6.3. 2^{n-1}; las construcciones extremales pueden ser de naturaleza dual:

$$F = C^1(a)\,\mathcal{P}(S_n \setminus a) \qquad (a \in S_n);$$

$$F = \begin{cases} C^n(S_n) + \ldots + C^{(n+1)/2}(S_n), & n \equiv 1 \pmod 2; \\ C^n(S_n) + \ldots + C^{(n+2)/2}(S_n) + C(a)\,C^{n/2-1}(S_n \setminus a), & n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Su carácter extremal es casi obvio: F puede contener o bien $X \subset S_n$, o bien $S_n \setminus X$, por consiguiente, no más de la mitad de todos los subconjuntos, es decir, $|F| \leqslant 2^{n-1}$. La condición extremal puede ser debilitada, al sustituirla por la condición $\forall A, B \in F \quad A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A| + |B| \leqslant t \leqslant n$; la respuesta quedará invariable.

El problema puede servir de prototipo de los problemas sobre intersecciones: ¿cuántas hiperaristas puede tener un hipergrafo, en el cual está especificada la estructura (el volumen) de las intersecciones de ciertas totalidades de sus hiperaristas? [Erdös P., Chao Ko. Rado R. — Quart. J. Math. (2), 1961, No 12, p. 313—320].

6.4. El número mínimo n_0 se determina a partir de las desigualdades $\binom{n_0-1}{k} < m \leqslant \binom{n_0}{k}$. El k-grafo extremal se representa por $C^k(S_n)$, siempre que $m = \binom{n}{k}$. Si, en cambio, $\binom{n-1}{k} < m < \binom{n}{k}$, entonces se trata de $C^k(S_{n-1})$ y, además, de $m - \binom{n-1}{k}$ cualesquiera k-aristas en los vértices de $S_{n-1} + \{a\}$, donde $a \notin S_{n-1}$. El carácter extremal de tal construcción está claro: para $n < n_0$ el número de k-aristas sobre n vértices sería inferior a m, puesto que $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n_0-1}{k} < m$.

Este problema es un prototipo de los problemas sobre las uniones: ¿cuántas l-aristas puede tener un l-grafo $G^l = \bigcup_{S \in F} H^l(S)$, si en el l-grafo H^l y en el hipergrafo F están impuestas ciertas restricciones [Kruskal F. B. — In: Math. Opt. Techn./Ed. R. Bellman, 1963, p. 251—278: Katona Gy. — In: Theory of graphs, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968, p. 187—207].

6.5. $\binom{k+l}{l}$; los hipergrafos extremales son $\mathcal{A}^k = C^k(S_{k+l})$ y $\mathcal{B}^l = C^l(S_{k+l})$. Sobre $S_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ hagamos fija la numeración de los vértices y definamos $C_i, D_i \subset S_n : C_i \cap D_i = \varnothing$, $|C_i| = k$ $|D_i| = l$, $1 \leqslant i \leqslant t \binom{n}{k+l}$, con la particularidad de que $\forall c \in C_i \forall d \in D_i \; c < d$. Pongamos $\mathcal{F}_i = \{C_i, D_i\}$. Está claro que $\forall i, j$ o bien $C_i \cap D_j = \varnothing$, o bien $C_j \cap D_i = \varnothing$. Supongamos ahora que $\mathcal{F}_1^\pi, \ldots, \mathcal{F}_t^\pi$ son todos sistemas de este tipo (según el número de numeraciones posibles de π), $\mathcal{F}_i^\pi = \{C_i^\pi, D_i^\pi\}$. Para ellos también $\forall i, j$ o bien $C_i^\pi \cap D_j^\pi = \varnothing$, o bien $C_j^\pi \cap D_i^\pi = \varnothing$. Empleando dos métodos, estimemos el número de pares $(\mathcal{F}_i^\pi, (A_v, B_v))$, donde $A_v = C_i^\pi$, $B_v = D_i^\pi$, A y B son aristas de los hipergrafos iniciales. El número de pares $(\mathcal{F}_i^\pi, (A_v, B_v))$ no sobrepasa nl, en virtud de la no intersección disyuntiva mencionada más arriba. Por otra parte, fijando (A_v, B_v), vemos que el número de $\mathcal{F}_i^\pi$ convenientes es igual a $\binom{n}{k+l} k!l! (n-k-l)!$, o sea, el número de pares $(\mathcal{F}_i^\pi, (A_v, B_v))$ es exactamente igual a $m \binom{n}{k+l} k!l!(n-k-l)!$. Por consiguiente, $m \times \binom{n}{k+l} k!l!(n-k-l)! \leqslant n!$ [Katona Gy. — J. Comb. Th., 1974, No 2, p. 256—266].

Este problema puede servir de prototipo de los problemas de los pares o sistemas de hipergrafos.

6.6. Una familia $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ se llamará *p-inseparada*, si la intersección de cualesquiera p términos suyos es no vacía, y se llamará *q-separada*, si la intersección de cualesquiera q términos suyos es vacía. Si el volumen de la familia

mayor $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, 2-inseparada y 3-separada, lo designamos por m_n (2, 3), entonces m_n (2, 3) = $[(1 + \sqrt{8n + 1})/2]$.

Estimación superior. Sea $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ una familia arbitraria de m términos 2-inseparada y 3-separada. Examinemos en los elementos de S_n una nueva familia D compuesta por todas las intersecciones posibles de diferentes términos de la familia $F = \{e_i\}$, es decir, $D = \{e_i \cap e_j\}$ $(i \neq j)$. Por ser F 2-inseparada, la familia D contiene exactamente $\binom{m}{2}$ términos no nulos, pero, por otro lado, esta familia es 2-separada, puesto que la presencia de dos términos de la familia D que se intersecan tendría por resultado la presencia de por lo menos tres términos de la familia F que se intersecan, y de este modo contradiría la 3-separación de la familia F. Finalmente, por la misma razón, la familia D no puede tener términos múltiples. Debido a que el volumen máximo posible de una familia 2-separada es igual a n, obtenemos la estimación $\binom{m}{2} = |D| \leqslant n$, la cual tras las transformaciones elementales y tomando en consideración que m es un número entero, adquiere la forma $m \leqslant [(1 + \sqrt{8n + 1})/2]$.

Construcción. Sea n_Δ un número máximo triangular que no sobrepasa n. Coloquemos en un plano n_Δ puntos tal como se muestra en la fig 6.1'. Tracemos a partir de cada punto de la fila superior una línea hasta alcanzar la diagonal y luego a la izquierda hasta la última columna vertical; tales líneas contienen un número igual de puntos. Además, desde el punto que está más a la derecha de la fila superior trazamos una línea más que va a lo largo de la diagonal. Las líneas obtenidas se entenderán como términos de la familia F_n (S_{n_Δ}) la cual es, lo que no es difícil de ver, 2-inseparada y 3-separada y contiene exactamente $[(1+\sqrt{8n_\Delta+1})/2]$ términos. Los demás $n - n_\Delta$ puntos se disponen formando una fila superior adicional; ellos no figuran en ningún término. La familia obtenida F_n (S_{n_Δ}) contiene $[(1+\sqrt{8n_\Delta+1})/2] = [(1+\sqrt{8n+1})/2]$ términos y constituye una construcción suficiente.

Si $m = m(p, p+1)$ es el volumen de la familia mayor $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ p-inseparada y $(p+1)$-separada, entonces m se define como una raíz entera máxima de la desigualdad $\binom{m}{p} \leqslant n$ [Stechkin B. S. — Notas matemáticas, 1967, 19, No 1, p. 155—160, en ruso].

En adelante $d_G(a)$ denota siempre el grado del vértice a en el grafo G; $\Delta(G)$, el grado máximo en G; $t(G)$, el número máximo de aristas independientes en G; $\chi'(G)$, el número cromático de arista; G_n, el grafo de n vértices; $G(S)$, un grafo en el conjunto de vértices S. Si $S \subset S_n$, la notación $G_n(S)$ significa un subgrafo propio del grafo $G_n \subset C^2(S_n)$ inducido por los vértices de S, es decir, $G_n(S) = G_n \cap C^2(S)$.

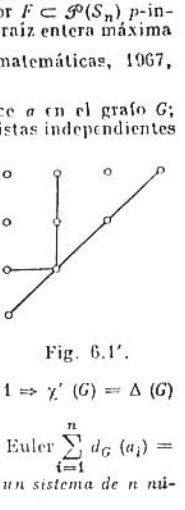


Fig. 6.1'.

6.7. Teorema de Wizing [Wizing V. G. — Análisis discreto, 1965, No 3, p. 25—30, en ruso]: si $\chi'(G)$ es el número cromático de arista buscado del grafo G, entonces para todo G tenemos $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

En una serie de casos se logra precisar este teorema. Es fácil mostrar que $|G| > \Delta(G)\, t(G) \Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G) + 1$, en particular, $|G| > \Delta(G)\, t(G) \Rightarrow \Delta(G) < 2t(G) + 1$. El caso alternativo de $\Delta(G)$ «grandes» está estudiado por completo: $\Delta(G) \geqslant 2t(G) + 1 \Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$ [(A. V. Kóstochka].

6.8. [$nd/2$]. La estimación se deduce de la identidad de Euler $\sum_{i=1}^{n} d_G(a_i) = 2|G|$, y su realización, del teorema de Erdös—Gallai: *un sistema de n números no negativos* $d_1, \ldots, d_n$, $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$, $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ *se realiza*

por los grados de cierto grafo de n vértices cuando y sólo cuando para cualquier r natural, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, se verifica la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \leqslant r(r-1) + \sum_{i=r+1}^{n} \min(r,\ d_i)$$

[Erdös P., Gallai T. — Mat. Lapok, 1960, 11, p. 264—274].

6.9. Designemos el máximo que se busca por $E(n,\ t)$, entonces

$$E(n,\ t) = \begin{cases} \binom{n}{2}, & n \leqslant 2t+1, \\ \text{máx}\left\{\binom{2t+1}{2}, \binom{n}{2} - \binom{n-t}{2}\right\}, & n \geqslant 2t+1 \end{cases}$$

[Erdös P., Gallai T. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1959, 10, p. 337—357].

6.10. Designemos el máximo que se busca por $f(d,\ t)$, entonces

$$f(d,\ t) = \begin{cases} dt, & d \geqslant 2t+1 \\ dt + \left[\frac{d}{2}\right]\left[\frac{t}{[(d+1)/2]}\right], & d \leqslant 2t. \end{cases}$$

Según la definición de $\chi'(G)$, $\forall G \mid G \mid \leqslant \chi'(G)\, t(G)$; esto quiere decir que del teorema de Wizing (véase la resolución del problema 6.7) tenemos $\forall G \mid G \mid \leqslant \leqslant \chi'(G)\, t(G) \leqslant t(G)\,(\Delta(G)+1)$, lo que lleva consigo la estimación superior general: $f(d,\ t) \leqslant t(d+1)$.

Si $d \geqslant 2t+1$, entonces, conforme al resultado de Kóstochka (véase la *solución del problema 6.7*), *tenemos* $\mid G \mid \leqslant \chi'(G)\, t(G) = t(G)\,\Delta(G)$, lo que lleva consigo la estimación: $d \geqslant 2t+1 \Rightarrow f(d,\ t) \leqslant dt$; esta estimación se realiza por el grafo completo bipartido $K_{t,d}$.

Si $d \leqslant 2t$, $d \equiv 0 \pmod 2$, $d \mid 2t$, entonces el valor requerido coincide con la estimación superior general, la que se realiza por el sistema de $2t/d$ grafos completos K_{d+1}.

El caso de $d \leqslant 2t$, $d \equiv 1 \pmod 2$ se realiza por una construcción propuesta por Sauer: el grafo se compone de $a = [2t/(d+1)]$ componentes conexos $S_1, \ldots \ldots, S_a$, donde cada *componente* S_i, $1 \leqslant i \leqslant a$ es tal que *todos los puntos* en S_i, salvo uno, son de grado d, y un punto es de grado $d-1$; todos los S_i, $1 \leqslant i \leqslant a-1$, tienen $d+r$ vértices, y S_i contiene $d+2+2t-(d+1) \times [2t/(d+1)]$ vértices [Sauer N. — In: Comb. Math. and its Appl./Ed. D.J.A. Welsh, A. P. London, 1971, p. 253—257].

La construcción para el caso alternativo de $d \leqslant 2t$, $d \equiv 0 \pmod 2$, $d \nmid 2t$, se construye de un modo recurrente: como un sistema de $[2t/d]$ grafos completos K_{d+1} y una construcción más que realiza el valor de $f(d,\ t - [2t/d] \times d/2)$.

6.11. Denotemos el máximo que se busca por $g(n,\ d,\ t)$. Si $d \geqslant t-1$, *entonces tendremos las condiciones del problema* 6.9: $g(n,\ d,\ t) = g(n,\ n-1,\ t) = E(n,\ t)$. Si $n \leqslant 2t+1$, tendremos las condiciones del problema 6.8: $g(n,\ d,\ t) = [nd/2]$.

Sea $n \geqslant 2t+1$. Entonces, si $d \leqslant 2t$, $n \leqslant 2t + [t/[(d+1)/2]]$, tendremos

$$g(n,\ d,\ t) = \begin{cases} \min\left\{\left[\frac{nd}{2}\right],\ dt + \left[\frac{2(n-t)}{d+3}\right]\frac{d-1}{2}\right\}, & d \equiv 1 \pmod 2 \\ nd/2, & d \equiv 0 \pmod 2; \end{cases}$$

si $d \leqslant 2t$, $n \geqslant 2t + [t/[(d+1)/2]]$, entonces

$$g(n,\ d,\ t) = dt + \left[\frac{t}{[(d+1)/2]}\right]\left[\frac{d}{2}\right];$$

si $d \geqslant 2t+1$, entonces

$$g(n, d, t) = \begin{cases} \text{máx} \left\{ \binom{2t+1}{2}, \left[\frac{t(n+d-t)}{2} \right] \right\}, & n \leqslant t+d, \\ dt, & n \geqslant t+d \end{cases}$$

[**Chvatal V., Hanson D.** — J. Comb. Th. (B), 1976, 20, p. 128—138].

Es obvio que si $f(d, t)$ es la función del problema 6.10, entonces $f(d, t) = \max\limits_{n} g(n, d, t)$.

El estudio de los sistemas de aristas independientes en los grafos está vinculado en muchos aspectos con el **teorema de Berge:**

$$t(G(S_n)) = \min_{S \subset S_n} \frac{1}{2}(n + |S| - k_0(G(S_n \setminus S)),$$

donde $k_0(G(S_n \setminus S))$ *es el número de componentes conexos impares (según el número de vértices) del grafo* $G(S_n \setminus S)$ [Berge C. — R. Acad. Sci. Paris, 1958, No 247, p. 258—259].

6.12. Denotemos el máximo buscado por $E(n, t, k)$. Con motivo de $E(n, t, k)$ se conoce que existe tal constante C_k (dependiente solamente de k) que, para $n > C_k$, $E(n, t, k) = \binom{n}{k} - \binom{n-t}{k}$; existe también la hipótesis general de Erdös

$$E(n, t, k) = \text{máx} \left\{ \binom{kt+k-1}{k}, \binom{n}{k} - \binom{n-t}{k} \right\}, \quad n \geqslant kt+k-1.$$

[**Erdös P.** — Ann Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math., 1965, 8, p. 93—96].

6.13. Si $\mu(n; H_k)$ es el número máximo de aristas en el grafo $G_n \subset C^2(S_n)$ tal que $\forall S_k \subset S_n$ $(C^2(S_k) \cap G_n) \subseteq H_k$, entonces es válida la igualdad $m(n; H_k) + \mu(n; \overline{H}_k) = \binom{n}{2}$, donde, como siempre, $\overline{H}_k = K_k - H_k$. Por eso en adelante vamos a referirnos en los casos adecuados al μ-planteamiento de este problema, empleando la designación estándar $F_k = \overline{H}_k$.

1) Designamos el máximo buscado $m(n; H_k)$ por $T(n, k, 2)$, entonces

$$T(n, k, 2) = \sum_{i=0}^{k-2} \binom{\left[\frac{n+i}{k-1} \right]}{2}.$$

La construcción extremal es única y tiene forma de un grafo compuesto de $(k-1)$ grafos completos y a ser posible iguales:

$$\sum_{i=0}^{k-2} C^2\left(S_{\left[\frac{n+i}{k-1}\right]}\right), \quad S_{\left[\frac{n+i}{k-1}\right]} \cap S_{\left[\frac{n+j}{k-1}\right]} = \varnothing, \quad \sum_{i=0}^{k-2} S_{\left[\frac{n+i}{k-1}\right]} \equiv S_n.$$

En particular, si $n \leqslant 2(k-1)$, entonces $T(n, k, 2) = n - k + 1$; en este caso como construcción extremal interviene el sistema de $n - k + 1$ aristas independientes.

La afirmación concerniente a la unicidad de la construcción extremal y al número de sus aristas lleva el nombre de *teorema de Turán*; véase la literatura referente al problema 6.1, y también **Turán P.** — Colloq. Math., 1954, No 3, p. 13—30.

2) Denotemos el mínimo buscado por $m(n, k, q, 2)$. Para este problema la construcción extremal también tiene forma de un bloque: r vértices aislados y t grafos completos, a ser posible iguales, sobre los demás vértices, con la particularidad de que los parámetros r y t se eligen de un modo tal que el número

total de aristas se minimiza:

$$m(n,\ k,\ q,\ 2)=\min_{k-q\geqslant r\geqslant r_1}\sum_{i=0}^{t_r-1}\left(\begin{bmatrix}\frac{n-r+i}{t_r}\end{bmatrix}\right).$$

$$t_r=\left[\frac{k-r-1}{q-1}\right],\quad r_2=\begin{cases}(k-1)\,q-n\,(q-1),\ n\leqslant(k-1)\,q/(q-1),\\(k-1)-(q-1)\,t_0,\ n\geqslant(k-1)\,q/(q-1).\end{cases}$$

En particular, si n es suficientemente grande, entonces

$$m(n,\ k,\ q,\ 2)=\sum_{i=0}^{[(k-1)/(q-1)]-1}\left(\begin{bmatrix}\frac{n-k+1+t}{(k-1)/(q-1)}\end{bmatrix}+q-1\right).$$

Está completamente resuelto el caso en que $q=3$:

$$m(n,\ k,\ 3,\ 2)=\begin{cases}3\,(n-k+1), & n\leqslant 3\,(k-1)/2,\\ \sum\limits_{i=0}^{(k-3)/2}\left(\left[2\,\frac{n+i}{k-1}\right]\right), & n\geqslant 3\,(k-1)/2,\ k\equiv 1\pmod 2,\\ \sum\limits_{i=0}^{(k-4)/2}\left(\left[2\,\frac{n-1+i}{k-2}\right]\right), & n\geqslant 3\,(k-1)/2,\ k\equiv 0\pmod 2.\end{cases}$$

Además, se sabe que $k\leqslant 2\,(q-1)\Rightarrow m(n,\ k,\ q,\ 2)=\binom{n-k+q}{2}$.

Demostremos la última fórmula. Realicemos la inducción según q. Cuando $q\geqslant 2$, esto es evidente. Supongamos que $q\geqslant 3$. Analicemos un grafo arbitrario G_n que posee la propiedad requerida y destaquemos en él un conjunto máximo S_r de r vértices. Está claro que $r\leqslant p-q+1$. Además, siendo G_n suficiente y S_r independiente llegamos inmediatamente a que el subgrafo $G_n\,(S_n\setminus S_r)$ posee la misma propiedad con los parámetros $n-r$, $p-r$, $q-1$; esto significa que de acuerdo con la suposición de inducción,

$$|G_n\,(S_n\setminus S_r)|\geqslant\binom{n-r-(p-r)+(q-1)}{2}=\binom{n-p+q-1}{2}.$$

Por cuanto el conjunto S_r es máximo, cada vértice de $S_n\setminus S_r$ es adyacente por lo menos a un vértice de S_r. Por consiguiente,

$$|G_r|\geqslant(n-r)+|G_n\,(S_n\setminus S_r)|\geqslant n-r+\binom{n-p+q-1}{2}\geqslant$$

$$\geqslant n-p+q-1+\binom{n-p+q-1}{2}=\binom{n-p+q}{2}.$$

De construcción que realiza esta estimación puede servir un grafo completo sobre el conjunto de $(n-p+q)$ vértices, completado con $(p-q)$ vértices aislados [Kopilov G. N. — Notas matemáticas, 1979, 26, No 4, p. 593—602; **Stechkin B. S. Frankl P.** — Notas matemáticas, 1981, 29, No 1, p. 83—94, en ruso].

3) Pongamos $m(n;\ H_k)=m(n,\ k)$, entonces

$$m(n,\ k)=\begin{cases}\binom{n}{2}-\binom{k-1}{2}, & k\equiv 0\pmod 2,\\ \binom{n}{2}-\text{máx}\left\{\left[\frac{n}{2}\right],\ \binom{k-1}{2}\right\}, & k\equiv 1\pmod 2.\end{cases}$$

La construcción extremal representa o bien $K_n - \mathcal{F}_n$, o bien $K_n - K_{k-1}$ (en función del valor numérico de $m\ (n,\ k)$).

Si G_n posee la propiedad requerida, el grafo complementario $\overline{G}_n$ poseerá, evidentemente, la propiedad de que todo su subgrafo propio de k vértices tiene un vértice aislado.

Sea $k \equiv 0 \pmod 2$. Elijamos en $\overline{G}_n$ un sistema máximo F de las aristas independientes; está claro que $|\ F\ | \leqslant k/2$, puesto que de lo contrario, al tomar $k/2$ aristas independientes, se obtendría un subgrafo propio de k vértices sin vértices aislados. Por ser F máximo, todas las demás aristas de $\overline{G}_n$ son adyacentes a las aristas de F, por lo que todo subgrafo propio de k vértices que comprende los vértices del grafo F tiene no más de $(k-1)$ vértices aislados y, por tanto, también $\overline{G}_n$ tiene no más de $(k-1)$ vértices no aislados, es decir, $|\ \overline{G}_n\ | \leqslant \leqslant \binom{k-1}{2}$.

Sea $k \equiv 1 \pmod 2$. Si $t\ (\overline{G}_n) \leqslant (k+1)/2$, los razonamientos son los mismos que para $k \equiv 0 \pmod 2$. Si en $\overline{G}_n$ se tienen $(k+1)/2$ aristas independientes, entonces toda arista que se corta con ellas llevaría a una contradicción, por consiguiente, en $\overline{G}_n$ todas las aristas son independientes, es decir, $|\ \overline{G}_n\ | \leqslant \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ [D. Katona].

4) $m\ (n;\ H_h) = m\ (n,\ k)$;

$$m\ (n,\ k) = \begin{cases} \binom{n}{2} - \binom{k-1}{2} + (k-1), & k \equiv 0 \pmod 2, \\ \binom{n}{2} - \text{máx}\left\{\left[\frac{n}{2}\right],\ \binom{k-1}{2} - (k-1)\right\}, & k \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

La construcción extremal tiene la forma o bien de $K_n - \mathcal{F}_n$, o bien de $K_n - (K_{k-1} - C_{k-1})$, donde C_{k-1} es un ciclo en $k-1$ vértices (en función del valor de $m\ (n,\ k)$).

Si $m_1\ (n,\ k)$ es una función extremal de 6.13.3), entonces $m_1\ (n,\ k) \leqslant \leqslant m\ (n,\ k)$ y, por consiguiente

$$m\ (n,\ k) = \binom{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right], \quad k \equiv 1 \pmod 2, \quad \left[\frac{n}{2}\right] \geqslant \binom{k-1}{2}.$$

Supongamos primero que $k \equiv 0 \pmod 2$; la demostración la realizamos por inducción respecto de $n \geqslant k$, apoyándonos en el siguiente lema.

Lema. *Si $n \geqslant k \geqslant 2$ y $k \equiv 0 \pmod 2$, entonces en todo grafo de n vértices sin vértices aislados existe un subgrafo propio de k vértices sin vértices aislados.*

La demostración de este lema se realiza por inducción respecto de $k \leqslant n$. Si $n = k$, será evidente que $m\ (n,\ k) = 2\ (k-1)$. Admitamos que lo requerido es cierto incluso hasta $n-1$; mostremos que es cierto también para n. Supongamos lo contrario: $m\ (n,\ k) = \binom{n}{k} - \binom{k-1}{2} + (k-1) - \lambda \quad (\lambda \geqslant 1)$. Examinemos en nuestro grafo un vértice a de grado $n-1$. Si k es par, tal vértice siempre existe en toda construcción suficiente; en efecto, suponiendo lo contrario, vemos que el grafo complementario $\overline{G}_n$ no tiene vértices aislados y de acuerdo con el lema, contiene un subgrafo de k vértices sin vértices aislados. Esto quiere decir que el grafo inicial ni siquiera puede contener una estrella en estos k vértices, lo que contradice la condición de suficiencia de la construcción. Así pues, al eliminar el vértice de grado $n-1$, obtenemos en los $n-1$ vértices restantes una construcción suficiente que contiene $\binom{n}{2} - \binom{k-1}{2} + (k-1) - \lambda - (n-1) < \binom{n-1}{2} + \binom{k-1}{2} + (k-1) = m\ (n-1,\ k)$ aristas, lo que contradice nuestra suposición de inducción. Está claro que esta demostración conduce también a la solución de 6.13.3) para $k \equiv 0 \pmod 2$.

Sea ahora $k \equiv 1 \pmod 2$; siguiendo los razonamientos de 6.13.3), examinemos en $\overline{G}_n$ un conjunto máximo F de las aristas independientes. Si $|F| \geqslant (k+1)/2$, entonces no puede haber una arista que no se corte con las aristas de F, esto significa que en tal caso $\overline{G}_n$ está compuesto de aristas que no se intersecan, es decir, $|\overline{G}_n| \leqslant [n/2]$. Si $|F| \leqslant (k-1)/2$, cada arista de $\overline{G}_n$ se interseca con las aristas de F, razón por la cual el número de vértices aislados en $\overline{G}_n$ no es superior a $k-1$, más, por cuanto en todo subgrafo propio $\overline{G}_n$ debe haber, además de un vértice aislado, un ciclo vacío en $k-1$ vértices, entonces $|\overline{G}_n| \leqslant \leqslant \binom{k-1}{2} - (k-1)$ [A. V. Kóstochka, B. S. Stéchkin].

5) Demostremos una afirmación un tanto más fuerte.

Teorema. *Sea H_k un grafo arbitrario fijo de k vértices que posee un vértice de grado $k-1$. Entonces, el grafo G_n poseerá la propiedad de que $\forall S_k \subset S_n$ $G_n(S_k) = (C^2(S_k) \cap G_n) \supset H_k$ cuando y sólo cuando $G_n \supset (K_n - \overline{H}_k)$ para $\overline{H}_k \not\supset \mathcal{F}_k$ y $G_n \supset (K_n - \overline{H}_k) \vee G_n \supset (K_n - \mathcal{F}_n) = \mathcal{F}_n$ para $H_k \supset \mathcal{F}_k$.*

Demostración. La suficiencia de esta afirmación es evidente. Demostremos su necesidad. Supongamos que G_n posee la citada propiedad. Vamos a estudiar el grafo $\overline{G}_n$ y destaquemos en él un sistema máximo $\mathcal{F}_{2t} \subset \overline{G}_n$ de $t = t(\overline{G}_n)$ aristas independientes.

La desigualdad $t > t(\overline{H}_k)$ puede cumplirse sólo cuando $\overline{H}_k \supset \mathcal{F}_k$, mas en este caso tendremos necesariamente $\overline{G}_n = \mathcal{F}_{2t} \subset \mathcal{F}_n$, puesto que al agregar cualquier arista e al grafo $\mathcal{F}_{2t}$ (e debe ser adyacente a una de las aristas del grafo $\mathcal{F}_{2t}$, por ser este último máximo), obtendremos un grafo $(\mathcal{F}_{2t} + \{e\})$, en el cual siempre habrá k vértices S_k, sobre los cuales el subgrafo propio $(\mathcal{F}_{2t} + \{e\})(S_k)$ no tendrá vértice aislado prescrito al grafo $\overline{H}_k$ por la condición $H_k \supset K_{1,k-1}$.

Sea ahora $t \leqslant t(\overline{H}_k)$. En este caso el número de vértices no aislados del grafo $\overline{G}_n$ no sobrepasa de $k-1$. En efecto, al elegir en el caso contrario, a título de $S_k \subset S_n$, cualquier conjunto de k vértices no aislados del grafo G_n que incluya $2t$ vértices del grafo $\mathcal{F}_{2t}$, en virtud de que este último es máximo llegamos a que el subgrafo propio $\overline{G}_n(S_k)$ sobre estos k vértices no tiene vértice aislado, lo que contradice la hipótesis del teorema. Está claro que el grafo $\overline{G}_n$ ha de ser un subgrafo del grafo $\overline{H}_k$ sobre los vértices no aislados en una magnitud no superior a $k-1$ de dichos vértices, lo que se trataba de demostrar.

Como corolario, obtenemos la solución de nuestro problema:

$$m(n; H_k) = \begin{cases} \binom{n}{2} - |\overline{H}_k|, & \overline{H}_k \not\supset \mathcal{F}_k \\ \binom{n}{2} - \text{máx}\left\{\left[\frac{n}{2}\right], \ |\overline{H}_k|\right\}, & H_k \supset \mathcal{F}_k, \end{cases}$$

que, evidentemente, lleva consigo también los resultados de los problemas (6.13.3—6.13.5).

6) $m(n; C_k) = m(n, k) =]n(n-k+2)/2[$. Con el objeto de describir las construcciones extremales, numeremos el conjunto de vértices en forma cíclica desde 1 hasta n, considerando que $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$, . . . Introduzcamos una distancia $\rho(a_i, a_j) = \min\{|i-j|, n-|i-j|\}$, donde la diferencia se entiende también cíclicamente, es decir, $\rho(a_1, a_2) = 1$, $\rho(a_1, a_3) = 2$, . . ., $\rho(a_1, a_{n-1}) = 2$, . . ., $\rho(a_1, a_n) = 1$, $n-k \equiv 0 \pmod 2$. Consideramos que los vértices a_i, a_j forman una arista en el grafo extremal cuando y sólo cuando $\rho(a_i, a_j) \leqslant (n-k+2)/2$.

Demostremos la suficiencia de la construcción regular para $n-k \equiv 0 \pmod 2$. Sea $S_k = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, donde $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$.

Caso 1. Existen los vértices a_{i_j}, $a_{i_{j+1}}$, a_{i_l}, $a_{i_{l+1}} \in S_k$, $2 \leqslant j+1 \leqslant l \leqslant n$ tales que $\rho(a_{n_j}, a_{i_{j+1}}) > (n-k+2)/2 < \rho(a_{i_l}, a_{i_{l+1}})$, pero en este caso el número de vértices que no integran S_k y están situados entre a_{i_j} y $a_{i_{j+1}}$, no es menor que $(n-k+2)/2$ (lo mismo es lícito para los vértices dispuestos entre a_{i_l} y $a_{i_{l+1}}$) y por consiguiente, el número total de vértices que no integran S_k no es inferior a $n-k+2$, lo que contradice el volumen de S_k.

Caso 2. $\forall a_{i_j} \in S_k\ \rho(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}) \leqslant (n-k+2)/2$, pero en tal caso, obviamente, el conjunto de aristas (a_{i_1}, a_{i_2}), (a_{i_2}, a_{i_3}) ... (a_{i_k}, a_{i_1}) forma un ciclo sobre los vértices de S_k.

Caso 3. Sea $\rho(a_{i_1}, a_{i_2}) > (n-k+2)/2$ y $\rho(a_{i_j}, a_{i_{j+2}}) > (n-k+2)/2$, pero, en este caso, el número de vértices que no integran S_k y que están situados entre a_{i_1}, a_{i_2} y a_{i_j}, $a_{i_{j+2}}$, no es inferior a $(n-k+2)/2+(n-k+2)/2-1 = n-k+1$, lo que contradice el volumen de S_k. Sea $\rho(a_{i_1}, a_{i_2}) > (n-k+2)/2$, entonces existe un ciclo en S_k, a saber, para k par tenemos $(a_{i_1}, a_{i_k})(a_{i_k}a_{i_{k-2}})$ ... $(a_{i_4}a_{i_2})(a_{i_2}a_{i_3})(a_{i_3}a_{i_4})$ ... $(a_{i_{k-1}}a_{i_1})$ y para k impar tenemos $(a_{i_1}, a_{i_k})(a_{i_k}a_{i_{k-2}})$ ... $(a_{i_4}a_{i_3})(a_{i_3}a_{i_2})(a_{i_2}a_{i_4})$ ... $(a_{i_{k-2}}a_{i_1})$.

Queda demostrada, pues, la suficiencia de la construcción regular; demostremos ahora que la construcción es extremal. Todo vértice de un subgrafo propio de k vértices yace en el ciclo. Esto es indicio de que su grado en el grafo propio no es menor de dos, o sea su grado en el grafo inicial no es menor de $n-k+2$, por consiguiente

$$|G| \geqslant \lfloor n(n-k+2)/2 \rfloor$$

[G. Katona, A. V. Kóstochka, B. S. Stéchkin].

7), 8) Designemos la construcción extremal del problema 6.13.6) por $C(n, k)$; está claro que $|C(n, k+1)| = \lfloor n(n-k+1)/2 \rfloor$, por otra parte, el grafo $C(n, k+1)$ posee, evidentemente, la propiedad de que todo conjunto k de sus vértices es un conjunto de k vértices de cierto ciclo en el vértice $k+1$. Por consiguiente, todo subgrafo propio de k vértices del grafo $C(n, k+1)$ es conexo y contiene el camino P_k y $\mathcal{F}_k^*$. Además, cada uno de los grafos mencionados no contiene vértices aislados y, por lo tanto, para $n > k$, $m(n; P_k) = m(n; \mathcal{F}_k^*) = \lfloor n(n-k+1)/2 \rfloor$.

9), 10) Si $F_k = C_k$ o $F_k = P_k$, entonces, cuando $k \geqslant 4$, en la construcción suficiente no hay vértices de grado $\geqslant 3$, lo que quiere decir que $\mu(n; F_k) \leqslant n$. Por otra parte, la construcción C_n es suficiente, razón por la cual

$$m(n; \overline{C}_k) = n(n-3)/2, \quad k \geqslant 4, \quad m(n; \overline{P}_k) = \begin{cases} \binom{k-1}{2}, & n = k, \\ n(n-3)/2, & n \geqslant k+1, \end{cases} \qquad k \geqslant 4.$$

11) Está claro que

$$k \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow m(n; \overline{\mathcal{F}}_k^*) = \binom{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right], \quad k \geqslant 4.$$

Si, en cambio, $k \equiv 1 \pmod 2$, entonces es fácil ver que

$$m(n; \overline{\mathcal{F}}_k^*) = \binom{n}{2} - 2\left[\frac{n}{3}\right] - \binom{n-3\,[n/3]}{2},$$

$$m(n; \mathcal{F}_k^*) = \binom{n}{2} - \left]\frac{n}{2}\right[, \quad k \geqslant 7.$$

12), 13) Está claro que si $F_k \not\supset K_{1,k-1}$, $F_k \not\supset \mathcal{F}_k$, entonces $|F_k| \leqslant \mu(n; F_k) \leqslant g(n, \Delta(F_k), t(F_k))$, donde g viene del problema 6.11; de los resultados obtenidos en los problemas 6.10 y 6.11 se comprueba con facilidad que en los casos de

$$F_k = K_{t,k-t}\ (k \geqslant 3t+1 \geqslant 7) \text{ y } F_k = \frac{2t}{d} K_{d+1}\ (2 \leqslant d \leqslant 2t,\ d \equiv 0 \pmod 2,$$

$d|2t$, $k = 2t + 2t/d$) estas estimaciones bilaterales coinciden y dan respectivamente $m(n; C^2_*(S_t) + C^2(S_k \setminus S_t)) = \binom{n}{2} - t(k-t)$ y $m\left(n; \underbrace{k_{d+1}, \ldots, d+1}_{2t/d}\right) =$

$$= \binom{n}{2} - t(d+1).$$

En general, si F_k es un grafo de k vértices, extremal respecto a las propiedades del problema 6.10, y tal que $F_k \not\supset K_{1,k-1}$, $F_k \not\supset \mathcal{F}_k$, $|F_k| = f(d, t)$, $d = \Delta(F_k)$, $t = t(F_k)$, *donde la función* f *viene del problema 6.10, entonces* $m(n; K_k - F_k) = \binom{n}{2} - f(\Delta(F_k), t(F_k))$.

14) Si $t = 1$, véase el problema (6.13.1). Si $2t = k$, véase el problema 6.13.8). Para otros t el problema no está resuelto por ahora, no obstante, pueden indicarse construcciones suficientes que, quizás, resultarán extremales.

Una de tales construcciones es la de bloque, compuesta, a ser posible, de $k - 2t + 1$ grafos completos iguales sobre n vértices, de suerte que

$$m(n; H_k) \leqslant \sum_{i=0}^{k-2t} \binom{\left[\frac{n+i}{k-2t+1}\right]}{2}.$$

El número de bloques $(k - 2t + 1)$ de esta construcción especificado aquí *lo da el siguiente problema extremal de números enteros: se maximizará* p *a* condición de que $k \geqslant 2t \geqslant 0$,

$$\sum_{i=1}^{p} k_i = k,\ k \geqslant k_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{p} \left[\frac{k_i}{2}\right] \geqslant t.$$

Está claro que si un grafo posee la propiedad requerida con los parámetros (k, t), la poseerá también con los parámetros $(k-1, t-1)$, como también con los parámetros $(k - t + 1, 1)$, lo que, de acuerdo con 6.13.1), lleva consigo la estimación inferior:

$$m(n; H_k) \geqslant \sum_{i=0}^{k-t-1} \binom{\left[\frac{n+i}{k-t}\right]}{2}.$$

Para n pequeños la estimación superior citada no es exacta, las correspondientes construcciones extremales también tienen forma de un bloque con la única diferencia de que cada bloque en este caso representa o bien una arista independiente, o bien una construcción extremal para los problemas 6.13.6), 7), 8). Así por ejemplo, $n \leqslant 2(k-t) \Rightarrow m(n; H_k) = n - k + t$. Este valor se realiza por un sistema de $n - k + t$ aristas independientes. Como ejemplo de otra construcción de este tipo puede servir el sistema de $k - 2t$ aristas independientes y el grafo $C(n - 2k + 4t, t)$ *del problema 6.13.11) sobre los demás* $n - 2k + 4t$ vértices.

6.14. $m(n, k) = (k-1)n - \binom{k}{2} + \left[\frac{n-k}{2}\right] + 1$. La construcción extremal tiene por expresión $C^2(S_n) - C^2(S_{n-k+1}) + \mathcal{F}^*(S_{n-k+1})$ [Erdös P.,

Moser L., — J. Austral. Math. Soc., 1970, 11, p. 42—47]; véase la aplicación de este resultado en: [Sós V.—In: Comb. Struct. and their appl. Gordon and Breach, 1970, p. 407—410].

6.15. $3n-6$. El grafo extremal aquí es una triangulación. El carácter extremal de esta construcción se deduce inmediatamente de la correlación de Euler: $n - m + \Gamma + 2$, donde Γ es el número de caras del grafo plano y m, el número de sus aristas.

6.18. 4) Véase el problema 6.8. 5) Véase el problema 6.9. 6) Tiene lugar la estimación general $f(n; P_k) = \frac{k-2}{2} n$, la cual es exacta, si k divide n. Véase la resolución completa: [Kopylov G. N.—Informes de la Academia de ciencias de la URSS, 1977, 234, N° 1, p. 19—21, en ruso]. 8) El resultado de Ore afirma que $f(n; C_n) = \binom{n-1}{2} + 1$. La construcción extremal representa $C^2(S_{n-1})$ y una arista más que es incidente con relación al vértice $a = S_n \setminus S_{n-1}$. 9)—14) Pongamos

$$m(n; l) = \max_{G_n^2 \not\supset C_l} |G_n^2|, \quad m(n; l_1, \ldots, l_t) = \max_{\substack{G_n^2 \not\supset C l_i \\ i=1,\ldots,t}} |G_n^2|.$$

Está claro que $m(n; \{\varnothing\}) = \binom{n}{2}$, $m(n; 3, 4, \ldots, n) = n - 1$, $m(n; n) = \binom{n-1}{2} + 1$ (véase 6.18.8)). Se sabe que

$$m(n; l) = \binom{l-1}{2} + \binom{n-l+2}{2}, \quad l \leqslant n \leqslant 2l-3;$$

$$m(n; 2l+1) = \begin{cases} \binom{n}{2}, & n \leqslant 2l, \\ \binom{2l}{2} + \binom{n-2l+1}{2}, & 2l \leqslant n \leqslant 4l-1; \\ [n^2/4], & n \geqslant 4l-1, \end{cases}$$

$$m(n; 4) = \frac{n^{3/2}}{2}(1 + 0(1));$$

$$m(n; l, l+1, \ldots, n) = n(l-1)/2 - r(l-r)/2,$$

$$n = q(l-2) + r, \quad 0 < r \leqslant l-2; \quad m(n; 4, 6, 8, \ldots) = n - 1 + [(n-1)/2],$$

de construcción puede servir el grafo $C^1(a)$ $C^1(S_n \setminus a) + \mathcal{T}(S_n \setminus a)$;

$$m(n; 3, 4, \ldots, 2k) > C_k n^{1+1/(2k-1)}.$$

[Woodall D. R.—Proc. London Math. (3), 1972, 24, p. 739—755; Erdös P.—In: Terie Combinatorie. Roma: Academia Nationale, 1976, p. 3—17; Kopylov G.N.—Informes de la A.C. de la URSS, 1977, 234, N°1, p. 19—21, en ruso].

6.19. El m extremal se determina de la desigualdad $n \leqslant \binom{m}{[m/2]}$. Es suficiente estudiar este problema en un hipergrafo conjugado y cerciorarse de que en tal forma el problema es equivalente al problema 6.2.

6.20. La suma de k coeficientes binomiales máximos. La construcción extremal es $\sum_{i=1}^{h} C^{l_i}(S_n)$, donde $\binom{n}{l_i}$ se realiza por los coeficientes binomiales máximos. Supongamos en el problema 6.62 que G es una cadena máxima y $\mathcal{G}$, el conjunto de todas las cadenas máximas. Entonces, si F tiene como máximo una cadena de k términos, concluimos que $|F \cap G| \leqslant k$, por consiguiente, al tomar en consideración que $|\mathcal{G}| = n!$, $\deg_{\mathcal{G}}(S) = |S|!(n - |S|)!$, obtenemos la desi-

gualdad

$$\sum_{i=0}^{n} f_i \binom{n}{i}^{-1} \leqslant k, \text{ donde } f_i = |F \cap C^i(S_n)|.$$

6.21. Sea $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i$. Si $\mathcal{A}$ contiene una cadena de longitud $k+1$, entonces uno de $\mathcal{A}_i$ contiene una cadena de longitud 2, es decir, $\mathcal{A}_i$ no es anticadena. Del problema 6.20 se desprende que $|\mathcal{A}|$ no es superior a la suma de k coeficientes binomiales máximos; de que $|\mathcal{A}| = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{A}_i|$ se deduce (puesto que $\mathcal{A}_i$ son disjuntos) que de construcción extremal pueden servir $C^{t_i}(S_n)$, donde $\binom{n}{t_i}$ realizan k coeficientes binomiales máximos.

6.22. Si F contuviera la cadena $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_{h+1}$, entonces $A_1 \supset A_{h+1}$, $|A_1 - A_{h+1}| \geqslant h$, es decir, se obtendría una contradicción con la hipótesis del problema. Esto significa que según 6.20, $|F|$ no es superior a la suma de k coeficientes binomiales máximos; la construcción extremal es la misma que en los problemas 6.20 y 6.21 (Erdös P. — Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, p. 898—902].

6.23. 2^{n-1}; las construcciones extremales son

$$F = \sum_{\substack{i=0 \\ i \equiv 0 \pmod 2}}^{n} C^i(S_n), \qquad F = \sum_{\substack{i=0 \\ i \equiv 1 \pmod 2}}^{n} C^i(S_n).$$

En el problema 6.62, c) basta poner $G = \{S\} + \{S + a\}$, donde $S \subset S_n$, $a \notin S$, $\mathcal{G} = \{G\}_{a \in S_n \supset S \not\ni a}$, entonces, evidentemente, $|F \cap G| \leqslant 1$, y es fácil ver que $|\mathcal{G}| = n\,2^{n-1}$, $\deg_{\mathcal{G}}(S) = |S| + (n - |S|) = n$, por consiguiente

$$|F|/2^{n-1} = \sum_{S \in F} n/2^{n-1} \cdot n \leqslant 1.$$

6.24. $\sum_{i \equiv [n/2] \pmod h} \binom{n}{i}$; a título de construcción extremal puede tomarse $F = \sum_{i \equiv [n/2] \pmod h} C^i(S_n)$ [Katona G. — Niew Archief voor Wisknnde (3), 1972, N°20, p. 54-67].

6.27. a) véase el problema 6.3.

b) $\sum_{i=(n+2)/2}^{n} \binom{n}{i}$, $n + r \equiv 0 \pmod 2$, $\sum_{i=(n+r+1)/2}^{n} \binom{n}{i} + \binom{n-1}{(n+r-1)/2}$, $n + r \equiv 1 \pmod 2$.

La construcción extremal es

$$F = \sum_{i=(n+r)/2}^{n} C^i(S_n), \; n + r \equiv 0 \pmod 2,$$

$$F = \sum_{i=(n+r+1)/2}^{n} C^i(S_n) + C^{(n+r-1)/2}(S_n - a), \; n + r \equiv 1 \pmod 2$$

[Katona G. — Acta Math. Soc. Hungar, 1964, 15, p. 329—337].

c) 2^{n-2}; la construcción extremal es $F = C^2(S_2)\ \mathcal{P}(S_n - S_2)$ [**Frankl P.** — Bull. Austral. Math. Soc., 1976, N° 15, p. 73—79].

6.28. Véase la literatura en el problema 6.27 c).

6.29. $\binom{n}{k}$, $k > n/2$; $\binom{n-1}{k-1}$, $k \leqslant n/2$. Las construcciones extremales son: $C^k(S_n)$, $k > n/2$; $C^1(a)\,C^{k-1}(S_n - a)$, $k \leqslant n/2$.

Sea $k \leqslant n/2$. Fijemos la numeración cíclica de los elementos $a_1, \ldots, a_n$. Veamos las k-aristas $B_1, \ldots, B_l$, cuyos elementos son sucesivos con tal numeración, es decir, $B_j = \{a_{j_1}, a_{j_1+1}, a_{j_1+2}, \ldots, a_{j_1+k-1}\}$, con la particularidad de que se supone que $B_i \cap B_j \neq \varnothing$. Está claro que si $k \leqslant n/2$, entonces el número de tales k-aristas no es inferior a k.

Sea $A_1, \ldots, A_m$ una familia de k-aristas de tal índole que $A_i \cap A_j \neq \varnothing$; enumeremos los pares (ζ, A_i), donde ζ es una numeración cíclica, y los vértices A_i son sucesivos en ζ. Para cada A_i existen $k!\,(n-k)!$ tales ζ, lo que quiere decir que en total hay $mk!\,(n-k)!$ de tales pares. Por otra parte, para ζ fijo se tienen no más de k conjuntos A_i, por lo cual el número de pares no sobrepasa de $(n-1)!k$. Obtenemos la desigualdad

$$(n-1)!\,k \geqslant mk!\,(n-k)! \Rightarrow m \leqslant \binom{n-1}{k-1}$$

[**Katona G.** — J. of Comb. Th. 1972, 13, N° 2, p. 183—184]. Este resultado lleva el nombre de teorema de Erdös—Ko-Rado; véase 6.3.

Si complementariamente $\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \varnothing$, entonces

$$m = 1 + \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1}.$$

La construcción extremal es

$$F = C(S_k) + \sum_{i=1}^{k-1} C^1(a)\,C^{i-1}(S_n - S_k - a)\,C^{k-i}(S_k),\ a \notin S_k.$$

[**Hilton A.J.W., Milner E.C.** — Quart. J. Math. Oxford (2), 1967, N° 18, p. 369—384].

6.30. $\binom{n}{k}$, $\frac{tk}{t-1} > n$; $\binom{n-1}{k-1}$, $\frac{tk}{t-1} \leqslant n$. Las construcciones extremales son $C^k(S_n)$ y $C^1(a)\,C^{k-1}(S_n - a)$.

Sea $tk/(t-1) \leqslant n$. Apliquemos el método usado en el problema 6.29. Será suficiente mostrar que, siendo cíclica la numeración de los vértices, el sistema de k-aristas sucesivas $B_1, \ldots, B_l$ en el que cualesquiera t tienen intersección no vacía, puede tener no más de k términos, es decir, que $l \leqslant k$. Estudiemos las $(n-k)$ aristas complementarias de $C_i = S_n - B_i$. Ellas también tienen vértices sucesivos y su unión no coincide con $S_n = \{1, \ldots, n\}$. Supongamos que el último vértice de C_1 es igual a n. Definamos la aplicación f del modo siguiente:

$$f(C_i) = \begin{cases} \text{último vértice de } C_i, & \text{si } i \geqslant 2, \\ \{n,\ n+1,\ \ldots,\ t(n-k)\}, & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

La desigualdad $t(n-k) \geqslant n$ se deduce de la condición $tk/(t-1) \leqslant n$. Está claro que los conjuntos $f(C_i)$ son disjuntos. Es fácil ver que para j fijo $(1 \leqslant j \leqslant n-k)$ todos los números $r \equiv j \pmod{n-k}$, $1 \leqslant r \leqslant t(n-k)$ se encuentran en $\bigcup_{i=1}^{l} f(C_i)$, entonces $\bigcup_{i=1}^{l} C_i = \{1, \ldots, n\}$, lo que contradice la condición. Por

consiguiente, existen por lo menos $n-k$ números dentro del segmento $[1, 2, \ldots, t\ (n-k)]$ y fuera de la $\bigcup_{i=1}^{t} f(C_i)$, es decir,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{t} f(C_i) \right| + n - k = t(n-k) - n + 1 + l - 1 + n - k \leqslant t(n-k),$$

lo que trae consigo el que $l \leqslant k$ [Frankl P. — J. Comb. Th. (A), 1976, Nº 20, p. 1—11].

6.31. Existe $n_0 = n_0(k, l)$ tal que

$$\text{máx } |G_n^k| = \binom{n-l}{k-l}.$$

La construcción extremal es $G_n^k = C^l(S_l)\, C^{k-l}(S_n - S_l)$. Sin embargo, para n pequeños esto no es así: $n = 8$, $k = 4$, $l = 2$, entonces el 4-grafo $\{A : |A| = 4;\ |A \cap \{1, 2, 3, 4\}| = 3\}$ *tiene* $16 > \binom{6}{2}$ *aristas* [**Erdös P., Chao Ko, Rado R.** — Math. Oxford (2), 1961 Nº 12, p. 313—318]. El valor exacto de $n_0(k, l)$ fue hallado por Frankl.

6.32. La demostración se realiza por inducción respecto de k.

Existencia. Si $k = 1$, entonces $m = \binom{m}{1}$. Supongamos la existencia hasta $k-1$. Determinemos a_k de las desigualdades $\binom{a_k}{k} \leqslant m < \binom{a_k+1}{k}$. Si en este caso se realiza la igualdad, queda cumplido lo que se requiere; si no se realiza, el número $m - \binom{a_k}{k}$ tiene la forma canónica

$$m - \binom{a_k}{k} = \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_t}{t};$$

resta demostrar que $a_k > a_{k+1}$; en el caso contrario tendríamos la desigualdad

$$m \geqslant \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} \geqslant \binom{a_k}{k} + \binom{a_k}{k-1} = \binom{a_k+1}{k},$$

que contradice la definición de a_k.

Unicidad. Si $k = 1$, la unicidad es obvia. Supongamos que ella tiene lugar hasta $k-1$, y mostremos que esto es así también para k. Supongamos lo contrario:

$$m = \binom{a_k}{k} + \cdots + \binom{a_t}{t} = \binom{a'_k}{k} + \cdots + \binom{a'_{t'}}{t'}.$$

Si $a_k = a'_k$, tendríamos dos formas para $m - \binom{a_k}{k}$ y, según la suposición de inducción, obtendríamos una contradicción. En cambio, si $a_k < a'_k$, otra vez llegaríamos a una contradicción:

$$m \leqslant \binom{a_k}{k} - \binom{a_k-1}{k-1} + \cdots + \binom{a_k-k+1}{1} =$$

$$= \binom{a_k+1}{k} - 1 < \binom{a_k+1}{k} \leqslant \binom{a'_k}{k} \leqslant m.$$

6.33. *Enumeremos el número de pares* $\langle A, B\rangle : A \supset B$, $A \in F$, $B \in C_{k-1}(F)$. Para cada $A \in F$ hay exactamente k de tales B. Por consiguiente, el núme-

ro de pares es igual a $|F| \cdot k$. Mas, si fijamos $B \in C_{k-1}(F)$, tenemos no más de $n - k + 1$ conjuntos $A \supset B$. Esto quiere decir que el número de pares no sobrepasa de $|C_{k-1}(F)| (n - k + 1)$. Hemos obtenido, pues, la desigualdad requerida $|C_{k-1}(F)| (n - k + 1) \geqslant |F| \cdot k$.

6.34. Mostremos por medio de la inducción que tal k-grafo existe sobre un número de vértices no superior a $a_k + 1$. El caso cuando $k = 1$ es trivial. Supongamos que la afirmación es válida para $k - 1$. Elijamos a_k vértices (conjunto A) y todas las posibles k-aristas sobre ellos: $C^k(A)$. Por cuanto $a_{k-1} + 1 \leqslant a_k$, entonces, según la suposición de inducción, existe un $(k-1)$-grafo $F' \subset C^{k-1}(A)$ tal que $C_{k-2}(F') = f_{k-1}\left(m - \binom{a_k}{k}\right)$. Sea $a \notin A$ un vértice nuevo. Agreguemos a a todas las aristas de F', es decir, supongamos que $F'' = \sum_{e \in F'} C(a + e)$. Es fácil ver que $|C_{k-1}(C^k(A) + F'')| = f_{k-1}\left(m - \binom{a_k}{k}\right) + \binom{a_k}{k-1} = f_k(m)$.

El k-grafo buscado F puede definirse en la forma explícita del modo siguiente: fijemos la numeración de los vértices e introduzcamos la ordenación de las aristas: B es inferior a C, si el primer elemento del conjunto $(C - B) \cup (B - C)$ cae en C. Entonces F se define como un k-grafo de las primeras (en este sentido) m k-aristas.

6.35. Si $m_2 = 0$, la afirmación es trivial. Sea $m_2 > 0$, entonces analicemos dos casos.

Caso 1. $f_k(m_1) \leqslant m_2$. Supongamos que la representación canónica m_2 tiene por expresión

$$m_2 = \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_t}{t}.$$

Sea s un número mínimo, para el cual $a_s > s$. Pongamos

$$M = \begin{cases} 0, & a_k = k, \\ \binom{a_{k-1}}{k} + \cdots + \binom{a_s}{s+1}, & a_k > k. \end{cases}$$

Entonces, $f_k(M) \leqslant m_2$, y para $M' > M$ tenemos $f_k(M') > m_2$, es decir $f_k(m_1) \leqslant m_2 \Rightarrow m_1 \leqslant M$. Por cuanto $f_k(x)$ es monótona, tenemos $f_k(m_1 + m_2) \leqslant f_k(M + m_2)$. Es fácil ver que $f_k(M + m_2) = m_2 + f_{k-1}(m_2)$, de donde obtenemos inmediatamente

$$f_k(m_1 + m_2) \leqslant m_2 + f_{k-1}(m_2).$$

Caso 2. $f_k(m_1) \geqslant m_2$. Hagamos uso de la inducción según m_2. Cuando $m_2 = 0$, la afirmación es, evidentemente, cierta. Sea

$$m_1 = \binom{b_k}{k} + \cdots + \binom{b_q}{q} > 0.$$

Veamos tres casos

(2a) $q \leqslant t + 1$, $a_t = t$, entonces $f_k(m_1 + 1) = f_k(m_1) + q - 1$, $f_{k-1}(m_2 - 1) = f_{k-1}(m_2) - t$.

Por inducción tenemos:

$$f_k(m_1 + m_2) \leqslant f_k(m_1 + 1) + f_{k-1}(m_2 - 1) = f_k(m_1) + f_{k-1}(m_2) + q - t - 1 \leqslant f_k(m_1) + f_{k-1}(m_2).$$

(2b) $q = 1$, $a_t > t$, entonces $f_k(m_1 + 1) = f_k(m_1)$, $f_{k-1}(m_2 - 1) = f_{k-1}(m_2)$, y lo requerido se obtiene igual que en (2a).

(2c) $q > t + 1$, o bien ($a_t > 1$ y $q > 1$). Introduzcamos el concepto de representación semicanónica. Si $a_t = t$, o bien $t = 1$, entonces todo va como antes, si $a_t > t > 1$, entonces

$$m_2 = \binom{a_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{a_{t+1}}{t+1} + \binom{a_t - 1}{t} +$$

$$+ \binom{a_t - 2}{t-1} + \ldots + \binom{a_t - t + 1}{2} + \binom{a_t - t + 1}{1}.$$

Convengamos en escribir brevemente $m_2 = \binom{c_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{c_r}{r}$. Está claro que $t \geqslant r+1$ y $f_{k-1}(m_2) = \binom{c_{k-1}}{k-2} + \ldots + \binom{c_r}{r-1}$.

De $f_k(m_1) > m_2$ se desprende la existencia de tal u mínimo que $b_u > c_{u-1}$. Pongamos

$$M_1 = \binom{b_k}{k} + \ldots + \binom{b_u}{u} + \binom{c_{u-1}}{u-1} + \ldots + \binom{c_r}{r},$$

$$M_2 = \binom{c_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{c_u}{u} + \binom{b_{u-1}}{u-1} + \ldots + \binom{b_q}{q}.$$

Es evidente que $M_1 + M_2 = m_1 + m_2$. Mostremos ahora que $f_k(M_1) + f_{k-1}(M_2) = f_k(m_1) + f_{k-1}(m_2)$. Por cuanto $b_u > c_{u-1}$, la expresión para M_1 es o bien canónica, o bien una representación semicanónica de M_1, por lo que $f_k(M_1)$ puede obtenerse disminuyendo los números inferiores en la representación de M_1. Si $c_u > b_{u-1}$, lo mismo será válido con relación a M_2 y $f_{k-1}(M_2)$. Por fin, la variante $b_{u-1} \geqslant c_u \geqslant c_{u-2}$ contradice la definición de u. La desigualdad $M_2 < m_2$ se obtiene de un modo análogo. Así pues, de las últimas desigualdades y de la suposición de inducción tenemos

$$f_k(m_1 + m_2) = f_k(M_1 + M_2) \leqslant f_k(M_1) + f_{k-1}(M_2) = f_k(m_1) + f_{k-1}(m_2).$$

6.36. $f_k(m)$. Demostrémoslo por inducción según el número de vértices n. Si $n = 1$, esto es evidente. Supongamos que lo requerido está demostrado incluso hasta $n-1$ y mostremos que esto es así también para n. Fijemos un vértice a y veamos la siguiente partición de nuestro k-grafo:

$$F' = \{A: a \notin A,\ A \in F\}, \quad F'' = \{(A - a): a \in A,\ A \in F\}.$$

Es fácil ver que $C_{k-1}(F) \supset C_{k-1}(F') \cup (\{a\} \cup C_{k-2}(F''))$. Aquí $\{a\} \cup C_{k-2}(F'') = \sum_{e \in C_{k-2}(F'')} C(a+e)$. Por otra parte, $C_{k-1}(F') \cap (\{a\} \cup C_{k-2}(F'')) = \varnothing$. De aquí

$$|C_{k-1}(F)| \geqslant |C_{k-1}(F')| + |\{a\} \cup C_{k-2}(F'')| = |C_{k-1}(F')| + |C_{k-2}(F'')|.$$

Pongamos $m_1 = |F'|$, $m_2 = |F''|$, entonces, de acuerdo con la inducción $|C_{k-1}(F')| \geqslant f_k(m_1)$, $|C_{k-2}(F')| \geqslant f_{k-1}(m_2)$, es decir,

$$|C_{k-1}(F)| \geqslant f_k(m_1) + f_{k-1}(m_2).$$

Análogamente

$$C_{k-1}(F) \supseteq F'' \cup (\{a\} \cup C_{k-2}(F'')),$$
$$F'' \cap (\{a\} \cup C_{k-2}(F'')) = \varnothing,$$

y, por consiguiente,

$$| C_{k-1}(F) | \geqslant | F'' | + | \{a\} \cup C_{k-2}(F'') | = \\ = | F'' | + | C_{k-2}(F'') | \geqslant m_2 + f_{k-1}(m_2).$$

Por lo tanto, de acuerdo con 6.35,

$$| C_{k-1}(F) \geqslant \text{máx } \{f_k(m_1) + f_{k-1}(m_2), m_2 + \\ + f_{k-1}(m_2)\} = \text{máx } \{f_k(m_1), m_2\} + f_{k-1}(m_2) \geqslant f_k(m_1 + m_2),$$

es decir, $| C_{k-1}(F) | \geqslant f_k(m_1 + m_2) = f_k(m)$. La construcción extremal se aduce en el problema 6.34. Para la l-sombra $| C_l(F) | = f_{k,l}(m)$, donde $f_{k,l}(m)$ se determina a partir de la representación canónica binomial según la regla

$$f_{k,l}(m) = \binom{a_k}{l} + \ldots + \binom{a_t}{t-k+l}$$

es decir, $f_k(m) = f_{k,k-1}(m)$.

6.37. Sea n grande y supongamos que F' es tal k-grafo con m aristas sobre S_n que $| C_{k-1}(F') | = f_k(m_1)$; sea, ahora, F'' tal k-grafo con m_2 aristas sobre S_n que $| C_{k-1}(F'') | = f_k(m_2)$. Si n es grande, elijamos F' y F'' de tal modo que $C_{k-1}(F') \cap C_{k-1}(F'') = \varnothing$, es decir,

$$| C_{k-1}(F' \cup F'') | = | C_{k-1}(F') \cup C_{k-1}(F'') | = \\ = | C_{k-1}(F') | + | C_{k-1}(F'') | = f_k(m_1) + f_k(m_2).$$

Del problema 6.36 se sabe que $| C_{k-1}(F' \cup F'') | \geqslant f_k(m_1 + m_2)$, de suerte que lo requerido queda demostrado.

6.38. $m = \binom{2k-1}{k} + \binom{2k-3}{k-1} + \ldots + \binom{1}{1}$. Supongamos que el grafo $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ es tal que $| C_{k-1}(\mathcal{A}) | = f_k(m)$. Si, en este caso, $m > \binom{2k-1}{k} + \ldots + \binom{1}{1}$, entonces $f_k(m) < m$, es decir, el número de todos los $(k-1)$-subconjuntos es, en general, menor que lo que se necesita en $\mathcal{B}$. Hagamos uso del teorema de M. Hall, de acuerdo con el cual para $\mathcal{A}$ existe un grafo requerido $\mathcal{B}$, si para cada subfamilia $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\} \subset \mathcal{A}$ tenemos

$$| C_{k-1}(\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}) | \geqslant r.$$

Pero, según 6.36, $| C_{k-1}(\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}\}) | \geqslant f_k(r)$, de modo que para poder aplicar el teorema de Hall es suficiente mostrar que $f_k(r) \geqslant r$, $1 \leqslant r \leqslant m = \binom{2k-1}{k} + \ldots + \binom{1}{1}$ [Katona G.—In: Theory of graphs, Budapest: Akadémiai Kiadó, 1968, p. 187—207]. Para un l-grafo $\mathcal{B}$ la respuesta tiene la forma

$$m = \binom{k+l}{k} + \binom{k+l-2}{k-1} + \ldots + \binom{k-l}{k-l}.$$

6.39. La construcción extremal: tomemos los primeros (en el sentido de la solución del problema 6.34) m subconjuntos a título de $F = \{A_1, \ldots, A_m\}$. De modo que, si $m = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \ldots + 2^{b_r}$ $(b_1 > b_2 > \ldots > b_r \geqslant 0)$, entonces el máximo buscado es igual a $b_1 2^{b_1-1} + (b_2 + 2) 2^{b_2-1} + (b_3 + 4) 2^{b_3-1} + \ldots$ [**Lindsey J.H.**—Amer. Math. Monthly, 1964, 71, p. 508—516; **Clements G.F., Lindström B.** — J. Comb. Th., 1969, 7, p. 230—238; **Clements G.F.** — Proc. Amer. Math. Soc., 1971, 27, Nº 1, p. 13—15; **Ahlswede R., Katona G.** — Discrete Math., 1977, 17, Nº 1, p. 1—21].

6.40. La desigualdad $n \geqslant p_1 + f_2(p_2 + f_3(p_3 + \ldots + f_n(p_n)\ldots))$ es una condición necesaria y suficiente. Necesidad. $F_l = C^l(S_n) \cap \bigcap_{S \in F} F, B_l \cup C^l(S)$. De 6.36 tenemos $|C_{n-1}(F_n)| \geqslant f_n(p_n), B_{n-1} = C_{n-1}(F_n) \cup F_{n-1}$. Además, $C_{n-1}(F_n) \cap F_{n-1} = \varnothing$, por consiguiente, $|B_{n-1}| = |C_{n-1}(F_n)| + |F_{n-1}| \geqslant p_{n-1} + f_n(p_n)$; análogamente, $B_{n-2} = C_{n-2}(B_{n-1}) \cup F_{n-2}$, $C_{n-2}(B_{n-1}) \cap F_{n-2} = \varnothing$, por lo tanto

$$|B_{n-2}| = |C_{n-2}(B_{n-1})| + |F_{n-2}| \geqslant$$
$$\geqslant p_{n-2} + f_{n-1}(|B_{n-1}|) \geqslant p_{n-2} + f_{n-1}(p_{n-1} + f_n(p_n)).$$

Al continuar estas iteraciones, llegamos a que $n \geqslant |B_1| \geqslant p_1 + f_2(p_2 + \ldots + f_n(p_n)\ldots))$.

Suficiencia. Construyamos un F que satisfaga nuestra desigualdad. Fijemos la numeración sobre $\mathcal{P}(S_n)$. Elijamos los primeros p_n subconjuntos de n elementos a título de F_n, a continuación elijamos los primeros p_{n-1} subconjuntos $S_{n-1} \subset S_n$ que se disponen tras los elementos de $C_{n-1}(F_n) = C_{n-1}(B_n)$, etc. Aquí se utiliza el hecho de que si B_l se compone de los primeros $|B_l|$ subconjuntos $S_{l-1} \subset S_n$, también $C_{l-1}(B_l)$ se compone de los primeros subconjuntos $S_{l-1} \subset S_n$. De 6.34 se deduce que $|B_1| = |F_1| + |C_1(B_2)| = p_1 + f_2(|B_2|) = p_1 + f_2(|F_2|) + |C_2(B_3)| = p_1 + f_2(p_2 + f_3(|B_3|)) = \ldots = p_1 + f_2(p_2 + \ldots + f_n(p_n)\ldots))$; esto quiere decir que se han usado no más de n vértices, así que la construcción es correcta.

6.41. La forma general del par extremal es

$$A = C^{\lambda}(S_{\lambda})\, C^{k-\lambda}(S_{k+l-2\lambda}),$$
$$B = C^{\lambda}(S_{\lambda})\, C^{l-\lambda}(S_{k+l-2\lambda}), \quad S_{\lambda} \cap S_{k+l-2\lambda} = \varnothing.$$

Si $\lambda = 0$, véase el problema 6.5. Si $\lambda = l - 1$, $l \leqslant k$, se debe notar que la condición inicial adquiere una forma particularmente simple: $A_i \not\supset B_j \Leftrightarrow i = j$. En 1983 Füredi comprobó por completo esta hipótesis.

6.42. Basta aprovechar el método del problema 6.5.

6.43. Para la condición $|A_i \cap B_i| = \lambda$, $|A_i \cap B_j| \geqslant \lambda$, $i \neq j$, el par extremal es, supuestamente, el mismo que en el problema 6.41; sin embargo, esta cuestión queda por ahora abierta.

6.44. **[Kleitman D.J.** — J. Comb. Th., 1968, 5, p. 153—156].

6.45. Hagamos uso de la inducción respecto de n. Para $n = 1$ la afirmación es trivial. Supongamos que lo requerido tiene lugar incluso hasta $n-1$; demostremos que esto es así también para n. Fijemos un vértice x y pongamos

$$\mathcal{A}_1 = \{(A - x) : A \in \mathcal{A}, A \ni x\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{A : A \in \mathcal{A}, A \not\ni x\},$$
$$\mathcal{B}_1 = \{(B - x) : B \in \mathcal{B}, B \ni x\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{B : B \in \mathcal{B}, B \not\ni x\},$$
$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2|, \quad |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2|.$$

Por cuanto $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ poseen las propiedades de un ideal (véase la hipótesis de problema), entonces

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \Rightarrow a_1 = |\mathcal{A}_1| \leqslant |\mathcal{A}_2| = a_2,$$
$$\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \Rightarrow b_1 = |\mathcal{B}_1| \geqslant |\mathcal{B}_2| = b_2.$$

Estas familias se disponen sobre el $(n-1)$-conjunto de vértices y son, por sí mismas, ideales; por consiguiente, de acuerdo con la suposición de inducción

$$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1| < a_1 b_1 / 2^{n-1},$$
$$|\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{B}_2| < a_2 b_2 / 2^{n-1}.$$

Así pues, aprovechando las desigualdades obtenidas más arriba, tenemos

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| = |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1| + |\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{B}_2| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_1b_2 + a_2b_2}{2^{n-1}} = \frac{a_1b_1 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_2b_2}{2^n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2}{2^n} = \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}{2^n} = \frac{|\mathcal{A}|\,|\mathcal{B}|}{2^n}.$$

La última desigualdad en esta cadena se obtiene del modo siguiente: $a_1 \leqslant a_2$, $b_1 \geqslant b_2 \Rightarrow (a_2 - a_1)(b_1 - b_2) \geqslant 0 \Rightarrow a_1b_2 + b_1a_2 - a_1b_1 - a_2b_2 \geqslant 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_1b_1 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_2b_2 \leqslant a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$.

6.46. b) Si se tienen n-k l-aristas, entonces, al haber eliminado un vértice en cada arista (y las aristas que contienen dichos vértices), obtenemos por lo menos k vértices aislados, razón por la cual $T(n, k, l) \geqslant n - k + 1$. De construcción extremal en el dominio $n \leqslant l(k-1)/(l-1)$ pueden servir $(n - k + 1)$ l-aristas que no se intersecan.

c) $T(n, n-1, l) =]n/(n-l)[$, efectivamente, en este caso a todo vértice ha de corresponder una l-arista S_l que no lo contiene o, en otras palabras, un $(n-1)$-subconjunto $S_n - S_l$ que lo cubre. Está claro que el número mínimo posible de $(n-l)$-subconjuntos S_n que cubren todos los vértices es igual a $]n/(n-l)[$. En lo que se refiere a los números de Turán, se conoce lo siguiente:

$$T(n, n-2, n-3) = \left]\frac{n}{3}\right]\frac{n-1}{2}\left[\left[\right., \text{ [Fort, Hedland]}$$

$$T(n, k, l) \geqslant \left]\frac{n}{n-l}\right]\frac{n-1}{n-l-1}\left]\cdots\right]\frac{k+1}{k-l+1}\left[\cdots\left[\left[\left[\right.\right.\right. \text{[Shencheim]}.$$

Con motivo del compartamiento asintótico de los números de Turán véase [**Kuzurin N.N.** — Notas matemáticas, 1979, 26, Nº 4, p. 603—612, en ruso]. De base de la construcción suficiente servía la llamada «construcción de bloque»; si $t = [(k-1)/(l-1)]$, la construcción representa un sistema de t l-grafos completos e iguales en la medida de lo posible. En particular, existe una hipótesis de Turán que afirma que tal construcción es extremal en toda una serie de casos, a saber, $T(2n, 5, 3) = 2\binom{n}{3}$.

Otro tipo de construcciones representan «torceduras», así, por ejemplo, para $l = 3$, $k = 4$, tal construcción tiene por expresión

$$C^3(A) + C^3(B) + C^3(C) + C^1(A)\,C^2(B) +$$
$$+ C^1(B)\,C^2(C) + C^1(C)\,C^2(A),$$

donde $A + B + C = S_n$ (y son equipotentes en la medida de lo posible). Hay también una hipótesis de que esta construcción es extremal cuando $l = 3$, $k = 4$.

Existen, sin embargo, construcciones diferentes en principio que están relacionadas con

1) las características topológicas de los grafos,

2) las características aritméticas de los parámetros. [H. Ringel, A.F. Sidorenko.]

d) Designemos el máximo buscado por $P(n, k, l)$; se conoce lo siguiente: $P(n, n, l) = 1$, $P(n, k, l) = 1$ $(k \geqslant 2l)$, $P(n, l, l) = \binom{n}{l}$, $P(n, 2l-1, l) = \left[\frac{n}{l}\right]$, $P(n, n-1, l) = \left[\frac{n}{n-l}\right]$. Además, se sabe también el siguiente resultado:

$$P(n, 4, 3) = \begin{cases} [n/3\,[(n-1)/2]], & n \not\equiv 5 \pmod 6 \\ [n/3\,[(n-1)/2]] - 1, & n \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$

(Spencer J. — J. Comb. Th., 1968, 5, p. 1—8]. Se verifica también la siguiente fórmula recurrente: $P(n, k, l) = P(n, n-2l+k, n-l)$, $k \leqslant 2l$. Examinemos esta recurrencia con un ejemplo:

$$P(n, n-2, n-3) = \text{máx}\,\#S_{n-3}:\ \forall S_{n-2}\ \exists_{\leqslant 1} S_{n-3} \subset S_{n-2} =$$
$$= \text{máx}\,\#S_3:\ \forall S_2\ \exists_{\leqslant 1} S_3 \supset S_2 =$$
$$= \text{máx}\,\#S_3:\ \forall S_2^{(1)}, S_2^{(2)} \mid S_3^{(1)} \cap S_3^{(2)} \mid \leqslant 1 =$$
$$= \text{máx}\,\#S_3:\ \forall S_4\ \exists_{\leqslant 1} S_3 \subset S_4 = P(n, 4, 3).$$

6.47. Designemos el número mínimo de aristas en tal l-grafo por $m(n, k, l, r)$ y el número máximo de vértices, por $n(k, l, r)$. Entonces

$$n(k, l, r) = k + l - r. \tag{6.1'}$$

En efecto, si $n \geqslant k + l - r + 1$, tendremos obviamente

$$\forall S_l \subseteq S_n\ \exists\ S_k \subseteq S_n:\ \forall S_l' \subseteq S_k \mid S_l \cap S_l' \mid < r;$$

si, en cambio, $n \leqslant k + l - r$, entonces $C^l(S_{n-k+l})\, C^0(S_n - S_{n-k+l}) \sim TD$ y, por consiguiente,

$$m(n, k, l, r) \leqslant \binom{n-k+l}{l}.$$

Supongamos que $T(n, k, l) = \min\limits_{G_n^l \sim T} \mid G_n^l \mid$, en este caso

$$\binom{n}{l} \Big/ \binom{k}{l} \leqslant T(n, k, l) \leqslant m(n, k, l, r),$$

y, para $k \leqslant n \leqslant 2l - r$ tendremos la igualdad $m(n, k, l, r) = T(n, k, l)$ puesto que en este campo todo l-grafo posee la propiedad D.

Es evidente también la monotonía respecto de r:

$$m(n, k, l, r) \leqslant m(n, k, l, r+1).$$

Supongamos que $2r \geqslant l + 1$, entonces

$$m(k+l-r, k, l, r) = \binom{2l-r}{l}. \tag{6.2'}$$

Demostración. Observemos que la condición $G_n^l \sim T$ es equivalente a que

$$\forall S_{n-h} \subseteq S_n, \quad v(S_{n-h}; 0; G_n^l) \geqslant 1.$$

La demostración se realiza por construcción sucesiva de las construcciones necesarias $G_{(0)}^l \subseteq G_{(1)}^l \subseteq G_{(2)}^l \subseteq \widetilde{G}^l$, es decir, de aquellos l-grafos $G_{(i)}^l$ los cuales se contienen necesariamente en toda construcción suficiente $\widetilde{G}^l$; a partir de este hecho se deduce que la construcción $\hat{G}^l = C^l(S_{2l-r})\, C^0(S_n - S_{2l-r})$ es extremal.

a) Supongamos que $n = k + l - r$, y que $\widetilde{G}^l \sim TD$, entonces $\exists\, e_1, e_2 \in \widetilde{G}^l$: $\mid e_1 \cap e_2 \mid = r$. En efecto, si $\forall\, e_1, e_2 \in \widetilde{G}^l$, $\mid e_1 \cap e_2 \mid \geqslant r + 1$, entonces

$\widetilde{G}^l \sim T$ y $\widetilde{G}^l$ representa un l-grafo $(r+l)$-inseparado de dos en dos, mas esto contradice la condición (6.1'). Para $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2 \in \widetilde{G}^l$, donde $|\widetilde{e}_1 \cap \widetilde{e}_2| = r$, pongamos

$$S = \widetilde{e}_1 \cup \widetilde{e}_2, \quad |S| = 2l - r, \beta = \widetilde{e}_1 \cap \widetilde{e}_2,$$
$$|\beta| = r, \alpha = \widetilde{e}_1 - \beta, \mu = \widetilde{e}_2 - \beta, |\alpha| = |\mu| = l - r.$$

Así pues, se ha obtenido la primera inclusión $\widetilde{G}^l \supseteq C(\widetilde{e}_1) + C(\widetilde{e}_2) = G^l_{(0)}$. Está claro que siempre $G^l_{(0)} \not\sim TD$.

b) supongamos primero que $S_{l-r} \subseteq \beta$ (esto es siempre factible, puesto que la condición $2r \geqslant l+1$ lleva consigo la desigualdad $r \geqslant l-r$), entonces, por ser suficiente $\widetilde{G}^l$,

$$\exists e \in \widetilde{G}^l: e \cap S_{l-r} = \varnothing, \quad |e \cap \widetilde{e}_i| \geqslant r, \ i = 1, 2,$$

y lo último conduce inmediatamente a que $e \equiv S - S_{l-r}$, por lo que tenemos la inclusión

$$\widetilde{G}^l \supseteq G^l_{(0)} + \sum_{S_{l-r} \subseteq \beta} C(S - S_{l-r}) = G^l_{(1)}.$$

Demos a conocer algunas propiedades de esta $G^l_{(1)}$.

(b.1) Está claro que $G^l_{(1)} = G^l_{(0)} + C(\alpha)\, C^{2r-l}(\beta)\, C(\gamma)$, de modo que para $r = l-1$ tenemos $G^l_{(1)} = C^l(S)$ y, por lo tanto, para este caso el teorema queda ya demostrado, mientras que para $r < l-1$ es obvio que $G^l_{(1)} \not\sim TD$.

(b.2) Sea $G^{l-r+1}_{(1)} = \bigcup_{S_l \in G^l_{(1)}} C^{l-r+1}(S_l)$, entonces

$$G^{l-r+1}_{(1)} = C^{l-r+1}(S) - \sum_{S_{l-r+1} \subseteq S} C(S_{l-r+1})\, \chi(|S_{l-r+1} \cap \beta| \geqslant 2r-l+1).$$

Efectivamente, si $S_{l-r+1} \subseteq \widetilde{e}_1$ o $S_{l-r+1} \subseteq \widetilde{e}_2$, entonces, obviamente, $S_{l-r+1} \in G^{l-r+1}_{(1)}$; en cambio, si $S_{l-r+1} \subseteq S$: $|S_{l-r+1} \cap \alpha| \neq 0 \neq |S_{l-r+1} \cap \mu|$, $|S_{l-r+1} \cap \beta| \leqslant 2r-l$, entonces $\exists e \in G^l_{(1)} - G^{(l)}_{(0)}: S_{l-r+1} \subseteq e$ y si, por fin, $S_{l-r+1} \subseteq S$: $|S_{l-r+1} \cap \alpha| \neq 0 \neq |S_{l-r+1} \cap \mu|$, $|S_{l-r+1} \cap \beta| \geqslant 2r-l+1$, entonces es evidente que en $G^l_{(1)}$ no hay aristas que contengan tal S_{l-r+1}; la última variante no es, sin embargo, factible cuando $l-r-1 \leqslant 2r-l$, lo que significa:

Si $3r \geqslant 2l-1$, tenemos

$$G^{l-r+1}_{(1)} = C^{l-r+1}(S). \tag{6.3'}$$

(b.3) Si $3r \geqslant 2l-1$, entonces (6.2') tiene lugar. Sea $S_{l-r} \subseteq S$, $S_{l-r} \not\subseteq \alpha, \beta, \mu$, entonces

$$\exists \widetilde{e} \in \widetilde{G}^l: S_{l-r} \cap \widetilde{e} = \varnothing \quad \forall e \in G^l_{(1)} \ |\widetilde{e} \cap e| \geqslant r.$$

Mostremos que en este caso también $\widetilde{e} \equiv S - S_{l-r}$, para lo que resulta suficiente demostrar que

$$\forall S_l \subseteq S_n: |S_l \cap S| = l-1 \quad \exists e \in G^l_{(1)}: |S_l \cap e| < r.$$

Supongamos que $S_l \subseteq S_n$, $|S_l \cap S| = l-1$, $S_{l-r+1} = S \setminus S_l$, mas en tal caso, de acuerdo con (6.3'), tenemos

$$\forall S_{l-r+1} \subseteq S \quad \exists e \in G^l_{(1)}: S_{l-r+1} \subseteq e.$$

Por consiguiente, para tal e se tiene $|S_l \cap e| = |(S - S_{l-r+1}) \cap e| = r - 1$, lo que quiere decir que en el campo $3r \geqslant 2l - 1$ es válida la inclusión $\widetilde{G}^l \supseteq \hat{G}^l$.

Para demostrar (6.2'), en todo el campo $2r \geqslant l + 1$ aumentamos una vez más el subgrafo necesario.

c) En el campo $2r \geqslant l + 1$, $3r < 2l - 1$ de nuestra fórmula para $G^{l-r+1}_{(1)}$ en (b.2) se deduce la inclusión

$$\widetilde{G}^l \supseteq G^l_{(1)} - G^l_{(0)} + \sum_{\substack{S_{l-r} \subseteq S, \\ |S_{l-r} \cap \beta| \leqslant 2r-l-1}} C(S - S_{l-r}) = G^{(l)}_{(2)},$$

para cuyo segundo miembro se verifica la igualdad

$$G^{l-r+1}_{(2)} = \bigcup_{S_l \in G^l_{(2)}} G^{l-r+1}(S_l) = C^{l-r+1}(S),$$

de la cual a su vez, por analogía con (b.3), se deduce que $\widetilde{G}^l \supseteq \hat{G}^l$, de modo que (6.2') queda demostrada.

En particular, esto lleva a que

$$m(n, k, l, l-1) = \binom{n-k+l}{l}.$$

Aquí, o bien $n = k$, y en este caso la citada igualdad se verifica con toda evidencia, o bien $n = k + 1$, mas en este caso es aplicable (b.3), puesto que la desigualdad $3r \geqslant 2l - 1$ lleva consigo $3(l-1) \geqslant 2l - 1$, o bien $l \geqslant 2$.

Se sabe, además, que si $n = k + 1$, $2k \leqslant l \leqslant 2(k + 1/2)/3$, entonces $m(k + 1, k, l, r) = 3$; en cambio, si $l > 2(k + 1/2)/3$, $r \leqslant$ máx $\{(k + 5)/3, 2l - k + 1\}$, entonces

$$m(k + 1, k, l, r) =](k + 1)/(k - l + 1)[;$$

esta igualdad se deduce de que la última restricción impuesta en r lleva consigo la desigualdad $k + 1 \leqslant 2l - r$ que condiciona el cumplimiento de $m = T$. En particular, si $r = 1, 2, \ldots, 5$, $l \geqslant 2r$, entonces

$$m(k + 1, k, l, r) = \text{máx}\{3,](k + 1)/(k - l + 1)[\}.$$

Sea $l = 2r(n - k)$, $l(l + r - 1) < 2rk$, entonces $m(n, k, l, r) = 2(n - k) + 1$.

Demostración. Si $n = r\binom{l/r+1}{2}$, la construcción extremal tendrá por expresión

$$\sum_{a \in S_{2(n-k)+1}} C(rC(a)\, C^1(S_{2(n-k)+1} - a)),$$

es decir, representa un l-grafo de n vértices, dual (conjugado) respecto del multigrafo $rI^2(S_{2(n-k)+1})$; en cambio, si $n > r\binom{l/r+1}{2}$, entonces se deben añadir a la construción $n - r\binom{l/r+1}{2}$ vértices aislados. La suficiencia de la construcción es evidente y su existencia se deduce de las condiciones. Mostremos que es extremal.

(a) Si $G^l_n \sim TD$ y $|G^l_n| \leqslant 2(n-k)$, entonces G^l_n no contiene vértices cuyo grado sea inferior a 3, puesto que, al suprimir tal vértice (junto con todas las aristas que lo contengan), obtendríamos un l-grafo con un número de aristas no superior a $2(n - k) - 3$, cada par de las cuales tendría una intersección no vacía, por consiguiente, al tachar los vértices en estas intersecciones, eliminamos en el transcurso de los $n - k - 1$ pasos restantes, por lo menos $2(n - k - 1) >$

$> 2(n-k) - 3$ aristas, lo que contradice la condición de que G_n^l es un grafo de Turán.

(b) Si $G_n^l \sim TD$ y $|G_n^l| \leqslant 2(n-k)$, con la particularidad de que todos los grados de G_n^l no sobrepasan de 2, entonces, al suprimir sucesivamente $(n-k)$ vértices en las intersecciones de las aristas de G_n^l, llegamos otra vez a la contradicción con el carácter turaniano de (T), puesto que suprimimos a ciencia cierta todas las aristas del grafo G_n^l.

6.48. Si $p \leqslant (q-1)k/(k-1)$, entonces $\min |G_n^k| = \binom{n-p+q}{k}$; la construcción extremal es $C^k(S_{n-p+q})$, donde $S_{n-p+q} \subset S_n$. Si $n \leqslant (p-1)q/(q-1)$ y $2k \geqslant q+1$, entonces $\min |G_n^k| = (n-p+1)\binom{q}{k}$, mientras que la construcción extremal representa $n-p+1$ k-grafos completos $C^k(S_q)$ que se intersecan [Stechkin B.S., Frankl P. — MIAN, RPH, N° 20, Budapest, 1977].

6.49. [Erdös P. — In: Combinatorial Theory and its Appl. — Coll. Math. Soc. J. Bolyai. Budapest: 1970, N° 4, p. 311—315]. Szemeredi mostró que si $G_{2n+2}^2 \subset C^2(S_{2n+2})$: $\forall S_{2n-1} \subset S_{2n+2}\ \exists S_n \subset S_{2n-1}$: $C^2(S_n) \subset G_{2n+2}^2$, entonces necesariamente $\exists S_{n+1} \subset S_{2n+2} : C^2(S_{n+1}) \subset G_{2n+2}^2$.

6.50. Si el máximo buscado lo designamos con $m(n)$, entonces $m(n) \sim \sqrt{2n}$. Los números $|e_i \cap e_j|$ son todos diferentes y sus valores posibles son los números 0, 1, . . ., $n-1$; esto quiere decir que $\binom{m}{2} \leqslant n$, de donde $m(n) \leqslant [(1+\sqrt{8n+1})/2]$. La construcción tiene por expresión (en términos de las matrices de incidencia):

$$n\left\{\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \underbrace{1}_{2} & 1 & \underbrace{1}_{3} & 1 & 1 & \ldots & 1 & \underbrace{1}_{n-1} & \ldots & 1 \end{array}\right\} n-1$$

[Pach J. 1 Ars Comb. 1980, 9, p. 47—49].

6.51. Supongamos que $m(n, l)$ denota el máximo buscado. De 6.50 está claro que si $n \geqslant 2l$, entonces

$$m(n, l) \leqslant [(1+\sqrt{8l+1})/2]$$

y $m(n, l) = m(n, n-l)$; por eso siempre en adelante $n \geqslant 2l$. Observemos que $m(6, 3) = 3$, este valor se realiza por el 3-grafo de la forma $\{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_4, a_5, a_6\}\}$.

Sea $\binom{k}{2} \leqslant l < \binom{k+1}{2}$ para $k \geqslant 3$ y supongamos que

$$n \geqslant \frac{1}{6}(k-1)(k^2+k+6)+l-\binom{k}{2},$$

entonces $m(n, l) = [(1+\sqrt{8l+1})/2] = k$. Demostremos que para $k \geqslant 3$

$$m((k-1)(k^2+k+6)/6, (k/2)) = k, \qquad (6.4')$$

con la particularidad de que existe siempre una construcción extremal $G \sim \mathcal{A}$, en la cual

$$\exists S_{k-1} : \{|S_{k-1} \cap e|\}_{e \in G} = \{0, 1, \ldots, k-1\}. \qquad (6.5')$$

Realicemos la inducción respecto de $k \geqslant 3$. Para $k = 3$ la validez de (6.4'), (6.5') se desprende de la forma del 3-grafo aducido anteriormente; supongamos que lo requerido se cumple hasta $k-1$; demostremos entonces, que esto es así también para k. Pongamos $n_1 = (k-2)(k^2-k+6)/6$, $n_2 = (k-1)(k^2+k+6)/6$. Es obvio que

$$n_2 - n_1 = (k/2) + 1. \tag{6.6'}$$

Por la suposición de inducción existe tal $\binom{k-1}{2}$-grafo extremal $G_{n_1} \subset C^{\binom{k-1}{2}}(S_{n_1})$ que $|G_{n_1}| = k-1$, y

$$\exists S_{k-2} \subset S_{n_1} : \{|S_{k-2} \cap e|\}_{e \in G_{n_1}} = \{0, 1, \ldots, k-2\}.$$

Elijamos y fijemos uno de tales conjuntos S_{k-2}. Sea, ahora, $S_{n_2} \supset S_{n_1}$ y supongamos que $S_{k-1} + S_{\binom{k}{2}-k+2} = S_{n_2} - S_{n_1}$, lo que siempre es realizable en virtud de (6.6').

Construyamos un $\binom{k}{2}$-grafo $G_{n_2} \subset C^{\binom{k}{2}}(S_{n_2})$, rigiéndonos por la regla

$$G_{n_2} = \{S_{k-1} + e\}_{e \in G_{n_1}} + \{S_{k-2} + S_{\binom{k}{2}-k+2}\};$$

es evidente que $|G_{n_2}| = k$ y $G_{n_2} \sim A$, por consiguiente este $\binom{k}{2}$-grafo es extremal.

Nos resta demostrar si es realizable la propiedad (6.5') en este $\binom{k}{2}$-grafo G_{n_2}. Con este fin elijamos en el conjunto $S_{\binom{k}{2}-k+2}$ un elemento arbitrario a y pongamos $S_{k-1} = S_{k-2} + \{a\}$. Para tal S_{k-1} la propiedad (6.5') en el $\binom{k}{2}$-grafo G_{n_2} se cumple con toda evidencia

Sea ahora $\binom{k}{2} < l < \binom{k+1}{2}$; examinemos el $\binom{k}{2}$-grafo extremal G_{n_2} con k aristas, tomemos un conjunto de $l - \binom{k}{2}$ vértices $S_{l-\binom{k}{2}} : S_{l-\binom{k}{2}} \cap S_{n_2} = \varnothing$ y formemos un grafo nuevo sobre $n_3 = n_2 + l - \binom{k}{2}$ vértices según la regla

$$G_{n_3} = \{S_{l-\binom{k}{2}} + e\}_{e \in G_{n_2}}.$$

El citado l-grafo es, obviamente, una construcción suficiente y contiene el mismo número de aristas que el $\binom{k}{2}$-grafo G_{n_2}, es decir, k aristas; esto nos conduce a lo requerido, si tomamos en consideración la estimación superior.

6.52. El vector $v_i = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ se define según la regla

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in e_i \\ 0, & j \notin e_i \end{cases}, \text{ donde } e_1, \ldots, e_m \text{ son aristas de } G_n^k.$$

Demostremos que $v_1, \ldots, v_m$ son los vectores independientes (en este caso $m \leqslant n$). Sea $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$. Al multiplicar por v_i, obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \lambda_i + k\lambda_j = 0.$$

Si el determinante de este sistema es distinto de cero, entonces tiene solamente solución trivial, es decir, $v_1, \ldots, v_m$ son independientes. En efecto,

$$\begin{vmatrix} k & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & k & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & k \end{vmatrix} = (n-1+k)(k-1)^{n-1} \neq 0 \text{ para } k \geqslant 2.$$

La estimación $m \leqslant n$ no siempre se realiza, por ejemplo, si $k = 2$, $n > 3$, entonces el máximo $m = n - 1$. Cuando $k \geqslant 3$, la frontera se alcanza a menudo por las geometrías finitas, por ejemplo, para $k = 3$, $n = 7$, por el plano de Fano.

6.53. Si designamos por $\widetilde{D}(n)$ el volumen del sistema de conjuntos determinante mínimo en S_n, entonces $\widetilde{D}(n) = n$.

La necesidad de distinguir un subconjunto vacío y n subconjuntos de un solo elemento, cuyas sucesiones A_F no pueden contener números superiores a 1, da la estimación $\widetilde{D}(n) \geqslant n$, la cual se realiza por una cadena de n elementos

$$C(S_n) = \sum_{i=1}^{n} C\left(\sum_{j=1}^{i} C(a_j)\right),$$

La suficiencia de esta construcción es obvia para $|T_1| \neq |T_2|$: si $T_1 = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}\}$ $(i_1 < \ldots < i_l)$; $T_2 = \{a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}\}$ $(j_1 < \ldots < j_l)$, entonces de la igualdad del número de ceros en $A_F(T_1)$ y $A_F(T_2)$ se deduce que $i_1 = j_1$; de la igualdad del número de unidades en las mencionadas sucesiones se deduce que $i_2 = j_2$, etc., es decir, $T_1 = T_2$; dicho de otro modo, está demostrada la suficiencia de $C(S_n)$.

6.54. Sea G un sistema de conjuntos determinante en S_n. Para $T \subseteq S_n$ pongamos $D_G(T) = \{|T \cap e|\}_{e \in G}$ y llamemos tal totalidad de números *espectro*. Introduzcamos una notación convencional $D_G(T) = 0^{\alpha_0}, 1^{\alpha_1}, \ldots, n^{\alpha_n}$ que significa que

$$D_G(T) = \underbrace{0, \ldots, 0}_{\alpha_0}, \quad \underbrace{1, \ldots, 1}_{\alpha_1}, \ldots, \quad \underbrace{n, \ldots, n}_{\alpha_n}$$

Está claro que si $a \in S_n$, entonces $D_G(a) = 1^{\deg_G(a)}, 0^{|G| - \deg_G(a)}$, por consiguiente, si G es un hipergrafo determinante, los grados de todos los vértices suyos serán positivos y diferentes, razón por la cual $m(n) \geqslant n$.

Pasemos a la demostración de la unicidad de la construcción extremal, para lo cual mostremos que si $\widetilde{G}$ es extremal, $|\widetilde{G}| = n$, con la particularidad de que $\deg_{\widetilde{G}}(a_i) = i$ $(i = 1, \ldots, n)$, entonces necesariamente $\widetilde{G} = C(S_n)$ (véase el problema 6.53). Supongamos lo contrario:

$$(a_1, \ldots, a_n) \notin \widetilde{G} \supseteq \{(a_1, \ldots, a_n), (a_2, \ldots, a_n), \ldots, (a_{k-1}, \ldots, a_n)\},$$

y examinemos la única arista $e \in \widetilde{G}$ que contiene el vértice a_h y es diferente de las aristas $(a_1, \ldots, a_n), \ldots, (a_{h-1}, \ldots, a_n)$. Mostremos que necesariamente $e = (a_h, \ldots, a_n)$. En el caso contrario esto será equivalente a que $\exists a_l$ $(k+1 \leqslant l \leqslant n)$: $a_l \notin e$. Indiquemos inmediatamente que $a_l \neq a_n$, puesto que a_n figura en todas las aristas; esto significa que si $k \geqslant n-1$, entonces lo requerido queda demostrado y esto nos conduce, en particular, al mismo teorema para $n \leqslant 3$. Así pues, sea

$$\exists a_l \ (k = 1 \leqslant l \leqslant n-1) : a_l \notin e.$$

Analicemos dos subconjuntos

$$T_1 = (a_h, a_l), \quad T = \begin{cases} (a_{h-1}, a_{l+1}), & k \geqslant 2 \\ (a_{l+1}), & k = 1. \end{cases}$$

Ambos conjuntos mencionados tienen un mismo espectro

$$D_{\widetilde{G}}(T_1) = D_{\widetilde{G}}(T_2) = 2^{h-1}, \quad 1^{i-h+2},$$

lo que contradice el carácter determinante de $\widetilde{G}$ [A.V. Kóstochka, B.S. Stechkin].

6.55. La matriz de incidencia de tal hipergrafo tiene por expresión

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

6.56—6.58. Si $\chi\{\ \}$ es una función indicadora de un suceso encerrado entre llaves, entonces

$$\sum_{S \in F} v(S, q; G) = \sum_{S \in F} \sum_{e \in G} \chi\{|e \cap S| = q\} =$$
$$= \sum_{e \in G} \sum_{S \in F} \chi\{|e \cap S| = q\} = \sum_{e \in G} v(e, q; F).$$

Está claro que si $S_p \subset S_n$, entonces para $G_n^l \subset C^l(S_n)$ tenemos $v(S_p, q; G_n^l) = \binom{p}{q}\binom{n-p}{l-q}$. Además, $v(S, q; G+F) = v(S, p, G) + v(S, q, F)$, de donde se deduce inmediatamente 6.57. b) y c). Si, en cambio, $S \not\subset S_n$, obtenemos de una vez 6.57. d). Para demostrar 6.58, basta examinar a título de G el l-grafo completo. [Stechkin B.S. — Notas matemáticas, 1975, 7, Nº 3, 433—442, en ruso].

6.59. De 6.57, b) encontramos inmediatamente

$$\mathcal{M}(v(S_p, q; G)) = \sum_{i \geqslant q} \frac{\binom{i}{q}\binom{n-i}{p-q}}{\binom{n}{p}} v(S_n; i; G).$$

6.60. $\binom{p}{k-l}\binom{r}{l}$; la construcción extremal es $Fh = C^{h-l}(S_p) C^l(S_r)$, donde $S_r \subset S_{n-p}$.

Está claro que si G_n^k posee la propiedad dada, entonces $G^k \subset$ $\subset C^{k-l}(S_p) C^l(S_{n-p})$, por eso, si $S_{k-l} \subseteq S_p$, entonces, de acuerdo con 6.57,

$$|G^k| = \sum_{S_{k-l} \subset S_p} v(S_p, S_{k-l}; G^k) = v(S_p, k-l; G^k),$$

donde $v(S_p, S_{k-l}; G^k) = |\{e \in G^k : S_p \cap e = S_{k-l}\}|$. Si G^k posee la propiedad dada, entonces $v(S_p, S_{k-l}; G^k) \geqslant \binom{r}{l}$, de donde obtenemos seguidamente

$$|G_k| = \sum_{S_{k-l} \subset S_p} v(S_p, S_{k-l}; G^k) \geqslant \binom{p}{k-l} \binom{r}{l}.$$

6.61. De acuerdo con el problema 6.57,

$$\sum_{S_{n-1} \subset S_n} v(S_{n-1}, l; G^l) = (n-l)\,|G^l|. \qquad (6.7')$$

Sea $G^l \sim \mathcal{A}$, entonces, según (6.1),

$$\forall S_{n-1} \subseteq S_n \; v(S_{n-1}, l; G^l) \leqslant m(n-1, l; \mathcal{A})$$

y, por lo tanto, si G^l es una construcción extremal, entonces de (6.7') obtenemos la desigualdad

$$m(n, l; \mathcal{A}) \leqslant \left[\frac{nm(n-1, l; \mathcal{A})}{n-l}\right].$$

Demostsremos lo requerido por inducción respecto de $n \geqslant n_0$. Para $n = n_0$ esto tiene lugar en virtud de (6.2). Supongamos que la afirmación es válida siempre incluso hasta $n-1$. Mostremos que también es válida para $n > n_0$. Según la suposición de inducción tenemos

$$f(n) \leqslant m(n, l; \mathcal{A}) \leqslant \left[\frac{nm(n-1, l; \mathcal{A})}{n-l}\right] \overset{\text{ind}}{=\!=} \left[\frac{f(n-1)\,n}{n-l}\right] \leqslant f(n). \qquad (6.8')$$

Como ejemplo de función que satisface las condiciones de este problema puede servir $f(n) = [n^2/4]$ (véase el problema 6.1) [Stechkin B.S. — J. Comb. Th. (A), 1980, 29, N° 3, p. 368—369].

6.62. De acuerdo con 6.58 tenemos la identidad

$$\sum_{S \in F} \deg_{\mathcal{G}}(S) = \sum_{G \in \mathcal{G}} |G \cap F|, \qquad (6.9')$$

de modo que si $|G \cap F| \leqslant 1$, se obtiene lo requerido.

Esta desigualdad admite el siguiente principio general de aplicación. Supongamos que se resuelve un problema general de maximización de $|F|$ para $F \subset \mathcal{P}(S_n) : \neg\exists A_i, A_j A_i R A_j$, donde R es una relación binaria sobre $\mathcal{P}(S_n)$ prefijada de antemano. Supongamos que los hipergrafos G son de tales que $\forall B_1, B_2 \in G\; B_1 R B_2$, y a título de $\mathcal{G}$ se toman todos los G tales que $\cup G = \mathcal{P}(S_n)$, entonces, evidentemente, $|F \cap G| \leqslant 1$, y queda aplicable la desigualdad según la cual obtenemos estimaciones superiores para $|F|$. Por ejemplo, examinemos el problema 6.2. A título de G se toma la cadena máxima desde $\{\varnothing\}$ hasta S_n, y a título de $\mathcal{G}$, el conjunto de todas las cadenas de este tipo, entonces, si F es una anticadena, tenemos $|G \cap F| \leqslant 1$. Está claro que $\deg_{\mathcal{G}}(S) = |S|! \times$

$\times (n - |S|)!$, $|\mathcal{G}| = n!$, entonces, de acuerdo con nuestra desigualdad, $\sum_{S \in F} |S|!\,(n - |S|)!\,(n!)^{-1} \leqslant 1$. Por consiguiente,

$$\frac{|F|}{\binom{n}{[n/2]}} = \sum_{S \in F} \frac{1}{\binom{n}{[n/2]}} \leqslant \sum_{S \in F} \frac{1}{(n/|S|)} \leqslant 1, \qquad (6.10')$$

lo que nos lleva a que $|F| \leqslant \binom{n}{[n/2]}$.

6.63. Si $\mathcal{A}$ es una anticadena, entonces, según el problema antecedente,

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} f(|A|) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{f(|A|)\binom{n}{|A|}}{\binom{n}{|A|}} \leqslant f(r)\binom{n}{r} \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{(n/|A|)} \leqslant f(r)\binom{n}{r},$$

donde

$$f(r)\binom{n}{r} = \max_i f(i)\binom{n}{i}.$$

De este modo, $\sum_{A \in \mathcal{A}} f(|A|) \leqslant f(r)\binom{n}{r}$, la estimación se alcanza por el r-grafo completo.

6.64. $\binom{n-1}{[n/2]-1}$; la construcción extremal es $C'(a)\,C^{[n/2]-1}(S_n - a)$. La demostración se desprende de la afirmación del problema 6.65. Por cuanto $|A_i| \leqslant [n/2]$, tenemos $\binom{n-1}{|A_i|-1} \leqslant \binom{n-1}{[n/2]-1}$ de donde y de 6.65 llegamos a que $m\binom{n-1}{[n/2]-1}^{-1} \leqslant 1$ [Bollobas B.—J. Colomb. Th. (A), 1973, 15, p. 363—366].

6.65. Hagamos uso del método aplicado en el problema 6.29. Fijemos la numeración cíclica de los vértices φ. Sea $\mathcal{A}(\varphi)$ una totalidad de aquellos A_i que tienen elementos sucesivos en φ.

Mostremos que si $A_i \in \mathcal{A}(\varphi)$, el número de j, para los cuales $A_i \in \mathcal{A}$, no sobrepasa de $|A_i|$. En efecto, para cada $A_j \in \mathcal{A}(\varphi)$ tenemos $A_j \cap A_i \neq \varnothing$, con la particularidad de que $A_i \neq A_i \cap A_j \neq A_j$, puesto que $A_i \supset A_j \not\subset A_i$. Esto quiere decir que $A_i \cup A_j$ es el conjunto de los primeros o últimos elementos, es decir, para A_i se tienen a lo sumo $2(|A_i| - 1)$ posibilidades para las intersecciones $A_i \cap A_j$. Si $j \neq k$, entonces $A_i \cap A_j \neq A_i \cap A_k$ y $A_i \cap A_j + A_i \cap A_k \neq A_j$, puesto que $|A_j|, |A_k| \leqslant n/2$, por consiguiente, en A_i se contienen o bien $A_i \cap A_j$, o bien $A_i \cap A_k$, es decir, no más de la mitad de todas las intersecciones posibles, a saber, $2(|A_i| - 1 = |A_i| - 1$, lo que nos da, junto con la propia A_i, $|A_i|$.

Definamos ahora la función f según la regla

$$f(\varphi, A_i) = \begin{cases} 1/|A_i|, & \text{si } A_i \in \mathcal{A}(\varphi), \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Calculemos $f = \sum_{\varphi} \sum_{A_i} f(\varphi, A_i)$. Por un lado

$$f = \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \Big(\sum_{A_i \in \mathcal{A}(\varphi)} \frac{1}{|A_i|} \Big) = \sum_{A_i \in \mathcal{A}} (|A_i| - 1)!\,(n - |A_i|)!$$

y por otro lado, según lo demostrado más arriba,

$$\sum_{\substack{A_i \\ A_i \in \mathcal{A}(\varphi)}} \frac{1}{|A_i|} \leqslant 1$$

y, por consiguiente,

$$f = \sum_{\varphi} \left(\sum_{A_i \in \mathcal{A}(\varphi)} \frac{1}{|A_i|} \right) \leqslant (n-1)!$$

y

$$\sum_{A_i \in \mathcal{A}} (|A_i|-1)!\,(n-|A_i|)! \leqslant (n-1)!.$$

[Green C., Katona G., Kleitman D.J. — In: Recent Advances in Graph. Theory Academica Prague. Prague: 1975, p. 223–231].

6.66. Se supone que el número máximo de aristas es igual a $\left[\frac{n}{l}\right] \times \left[\frac{n+1}{l}\right] \ldots \left[\frac{n+l-1}{l}\right]$; para $l=2$ esto está demostrado en [Mantel W. Wis Kunige Op gaven met de Oplossingen. 1907, v. 10, N° 1, 60–61]; para $l=3$, en [Bollabas B. Discrete Math., 1974, v. 8, N° 1, 21, 24]; para $l=4$, en [Sidorenko A.F. Apuntes matemáticos, 1987, v. 41, edic. 3, 433–454, en ruso]; para $l \geqslant 5$ este problema no está resuelto por ahora.

6.67. $\binom{n-1}{\left[\frac{n}{2}\right]-1}$. La construcción extremal es $C^1(a)\,C^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}(S_n - a)$. Si $n \equiv 0 \pmod 2$, entonces la familia $\{A_1, \ldots, A_m, \ldots, \overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_m\}$ es una anticadena, lo que quiere decir que $2m \leqslant \binom{n}{n/2} \Rightarrow m \leqslant \binom{n-1}{n/2-1}$. Si $n \equiv 1 \pmod 2$, entonces la familia $F = \{A_1, \ldots, A_m, \overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_m\}$ es una anticadena y tiene intersecciones no vacías dos a dos. Pongamos $F^* = \{A \in F: |A| \leqslant (n-1)/2\}$. Al aplicar a F^* el problema 6.65, obtenemos lo requerido [Kleitman D.J., Spencer J.—Discrete Math., 1973, 6, p. 255–262].

6.68. 2^{n-2}; la construcción extremal es $C^0(a)\;C^1(b)\mathcal{P}(S_n - a - b)$. Pongamos $\mathcal{A} = \{A: \exists A_i \in F: A \subset A_i\}$, $\mathcal{B} = \{B: \exists A_i \in F: B \supset A_i\}$. Los hipergrafos $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{B}$ satisfacen las condiciones del problema 6.45, de modo que $|\mathfrak{U} \cap \mathfrak{B}| \leqslant |\mathfrak{U}|\,|\mathfrak{B}| \cdot 2^{-n}$. De las condiciones se deduce, además, que $|\mathfrak{U}|, |\mathfrak{B}| \leqslant 2^{n-1}$, entonces $|\mathfrak{U} \cap \mathfrak{B}| \leqslant 2^{n-2}$, pero, evidentemente, $F \subset \mathfrak{U} \cap \mathfrak{B}$, y por consiguiente, $|F| \leqslant 2^{n-2}$.

6.69. $\binom{n-k+l}{l}$, la construcción extremal es $C^l(S_{n-k+l})$, donde $S_{n-k+l} \subset S_n$. Supongamos que $\{A_1, \ldots, A_m\} = G_n^l$ satisface las condiciones T y K, entonces, en virtud de K,

$$\forall A_i \in G_n^l \quad \exists! B_i \in C^k(S_n);$$
$$B_i \supseteq A_i : |A_j \cap B_i| < l \;(i \neq j),$$

con la particularidad de que existen exactamente m tales B_i. Pongamos ahora

$$S_n - B_i = B_i', \; |B_i'| = n-k, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Está claro que para tales A_i y B_i' tenemos $A_i \cap B_i' = \varnothing \Leftrightarrow i = j$, es decir, se cumplen las condiciones del problema 6.5, según el cual, para nuestros parámetros tenemos $m \leqslant \binom{n-k+l}{l}$.

6.70. Demostremos al principio que cualesquiera 6 vértices tienen una arista que pertenece a ambos grafos. En efecto, si en ciertos 6 vértices los grafos de Turán G_1 y G_2 no se intersecaran, entonces, al pintar las aristas del grafo completo en estos 6 vértices de dos colores (de un color las aristas pertenecientes a G_1 y de otro, todas las demás aristas), obtendríamos una 2-coloración K_6 sin triángulos monocromáticos, lo que es imposible. De este modo, según el teorema de Turán el número total de aristas será no inferior a $(\lfloor n/5 \rfloor - 1)(n - \lfloor 5/2 \rfloor n/5)$. Demos a conocer un ejemplo de los grafos G_1 y G_2 sobre el conjunto de vértices $\{1, \ldots, n\}$, donde tanto G_1, como G_2 no contienen tres vértices independientes y

$$|G_1 \cap G_2| = (\lfloor n/5 \rfloor - 1)(n - \lfloor 5/2 \rfloor n/5):$$

los vértices i y j son adyacentes en G_1, si $i - j \equiv 0, 1$ ó $4 \pmod 5$, y en G_2, siempre que $i - j \equiv 0, 2$ ó $3 \pmod 5$ [Sidorenko A.F., ДАН, 1980, 251, N° 4, p. 805—808, en ruso].

6.71. [Baranyai Zs. — In: Infinite and finite sets/Ed. A. Hajnal, R. Rado, V.T. Sós. — Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 1975, N° 10, N — HPC, p. 91—108].

6.72. El problema fue planteado por Erdös [Erdös P. — Can. Math., Bull., 1964, 7, N° 3, p. 473. Problem N° 88]. Sea $f(n, k)$ el número máximo de aristas en el grafo de n vértices, en el que todo subgrafo cuenta con un vértice cuyo grado no sobrepasa de k; entonces $f(n, k) = k(n - k) + \binom{k}{2}$; la construcción extremal tiene por expresión $C^2(S_n) - C^2(S_{n-k})$. Este resultado se obtiene inmediatamente al realizar la inducción partiendo del número de vértices.

Supongamos ahora que $f_r(n, k)$ es el número máximo de aristas en un grafo de n vértices, en el cual todo subgrafo de $(n - r)$ vértices posee un vértice de grado no superior a k. En este caso

$$f_1(n, k) = \begin{cases} \binom{n}{2}, & n \leqslant k+2, \\ k(n-k) + \binom{k}{2} + 1, & n \geqslant k+3, \end{cases}$$

con la particularidad de que se tienen bastantes construcciones extremales diversas. Es notable que para r mayores la respuesta no cambia su forma $\forall r,\ k\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0\ f_r(n, k) = f_1(n, k)$.

6.73. La hipótesis de Berge fue recientemente resuelta positivamente por V. Taschkinov.

§ 2. Problemas extremales sobre la partición de los números

6.74. Además de Leonardo de Pisa (Fibonacci) este problema fue analizado por Luca Pacciolo, Claude Gaspar Bachet de Meziriac, L. Euler y D.I. Mendeléiev (cuando era director de la Cámara General de Pesos y Medidas), como también por los sucesores de éste. El problema se denomina, a veces, problema de Bachet o de Bachet—Mendeléiev. En una balanza de brazos iguales se prevén dos clases de pesaje preciso: con un platillo y con dos platillos; en el primer caso las pesas pueden ponerse sólo en un platillo de la balanza, y en el segundo, en ambos platillos. En el «Cálculo infenitesimal» (en el capítulo en que se trata de las particiones de los números) L. Euler argumenta, aplicando el método de funciones generatrices, la eficacia de dos conocidas sucesiones de pesas $\{(p+1)^l\}_{l=0,1,2\ldots}$ $p = 1$, 2 de más rápido crecimiento, para pesar usando p platillos respectivamente. Por supuesto, otros autores también destacaban precisamente estas sucesiones, y, en realidad, ellas representan los más efectivos sistemas de pesas

para pesar cualquier carga entera. Si la carga tiene un valor finito (no más pesada que n), resulta natural suponer que el peso sumario de las pesas es igual a n; en este caso tampoco las progresiones geométricas son siempre eficaces. Si $t_p(n)$ es el número mínimo necesario de pesas para pesar p platillos, entonces $t_p(n) = \lfloor \log_{p+1}(pn+1) \rfloor$, mientras que las propias pesas se determinan de un modo recurrente:

$$y_i = \left[\left(n + p - \sum_{j=1}^{i-1} y_j \right) \Big/ (p+1) \right], \quad i = 1, 2, \ldots, t_p(n).$$

El sentido de todas estas expresiones para $p > 2$ es muy simple y se realiza pesando en una báscula que tiene construcción natural, aunque un tanto especial. Se trata de una balanza de brazos desiguales. El brazo corto lleva un platillo que se emplea exclusivamente para pesar cargas, en el otro brazo hay p platillos para pesas, los cuales están uno del otro a una distancia igual a la magnitud del brazo corto.

[Bachet de Meziriac C.G. Problemes plaisants et delectables qui se font par les nombres. Lyon, 1612. Davidov E.S. Grupos mínimos de números para la formación de series naturales. San Petersburgo, 1903, p. 36, en ruso. Gartz V.F. El mejor sistema de pesas para pesar. San Petersburgo, 1910, p. 36, en ruso. **Euler L.** Introducción al análisis infinitesimal. Vol. 1—2, M. Fizmatguiz, 1961, en ruso].

6.75. Serán suficientes 12 billetes: un billete de 10 rublos, tres de 5, dos de 3 y seis de 1 rublo. Si tomamos en consideración la condición adicional, entonces podemos contentarnos con 11 billetes: dos de 10 rublos, un billete de 5, dos de 3 y seis de 1 rublo.

6.78. Baránov V.I. Programación, 1978, Nº 3, 46—54, 1985, Nº 4, 33—38, 1987, Nº 2, 91—102, 1987, Nº 5, 75—86, en ruso. Apuntes matemáticos, 29, 1981, Nº 2, 303—307, en ruso. Problemas de cibernética (elaboración y empleo de los superordenadores), 1986, 191—215, en ruso. Materiales de la Conferencia Nacional sobre problemas de las matemáticas discretas y sus aplicaciones. M.: Universidad de Moscú, 1986, 62—65, en ruso.

6.79. Para $n = 6$ las particiones serán:

de rango uno: $6 = 6$; de rango dos: $6 = 5 + 1$, $6 = 4 + 2$, $6 = 3 + 3$; de rango tres: $6 = 4 + 1 + 1$, $6 = 3 + 2 + 1$, $6 = 2 + 2 + 2$; de rango cuatro: $6 = 3 + 1 + 1 + 1$, $6 = 2 + 2 + 1 + 1$; de rango cinco: $6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$; de rango seis: $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Las composiciones para $n = 6$ son:

de rango uno: $6 = 6$; de rango dos: $6 = 5 + 1$, $6 = 4 + 2$, $6 = 3 + 3$, $6 = 1 + 5$, $6 = 2 + 4$; de rango tres: $6 = 4 + 1 + 1$, $6 = 3 + 2 + 1$, $6 = 2 + 2 + 2$, $6 = 1 + 4 + 1$, $6 = 3 + 1 + 2$, $6 = 1 + 1 + 4$, $6 = 2 + 3 + 1$, $6 = 2 + 1 + 3$, $6 = 1 + 3 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$; de rango cuatro: $6 = 3 + 1 + 1 + 1$, $6 = 2 + 2 + 1 + 1$, $6 = 1 + 3 + 1 + 1$, $6 = 2 + 1 + 2 + 1$, $6 = 1 + 2 + 1 + 2$, $6 = 1 + 1 + 1 + 3$, $6 = 1 + 2 + 2 + 1$, $6 = 1 + 2 + 1 + 2$, $6 = 1 + 1 + 2 + 2$; de rango cinco: $6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$, $6 = 1 + 2 + 1 + 1 + 1$, $6 = 1 + 1 + 2 + 1 + 1$, $6 = 1 + 1 + 1 + 2 + 1$, $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2$, de rango seis: $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

6.81. Demostremos ambas fórmulas. El valor de $n = n(k_1, \ldots, k_r)$ no puede ser inferior a $\sum_{i=1}^{r} k_i - r + 1$, puesto que en tal caso existiría una partición, para la cual la correspondencia requerida no se cumple:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i - r - 1 (k_1 - 1, \ldots, k_r - 1) \geqslant (k_1, \ldots, k_r);$$

si, en cambio, $n = \sum_{i=1}^{r} k_i - r + 1$, entonces en cualquier partición $(n_1, \ldots, n_r) \vdash$

— n siempre se encontrará una parte $n_l \geqslant k_l$, puesto que de lo contrario todos los $n_l \leqslant k_l - 1$, $l = 1, \ldots, r$, y, por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{r} k_l - r = \sum_{i=1}^{r} (k_l - 1) \geqslant n = \sum_{i=1}^{r} k_l - r + 1.$$

El valor de $k = k(n_1, \ldots, n_r)$ no puede ser superior a $\sum_{i=1}^{r} n_l + r - 1$, puesto que en este caso existiría una partición para la cual la correspondencia requerida no se cumple:

$$(n_1, \ldots, n_r) \geqslant (n_1 + 1, \ldots, n_r + 1) - \sum_{i=1}^{r} n_l + r;$$

si, en cambio, $k = \sum_{i=1}^{r} n_l + r - 1$, entonces $n = k - r + 1$, y, por consiguiente, de acuerdo con la primera fórmula ya demostrada, a la correspondencia requerida le satisfarán todas las particiones k de rango r no sólo para la partición $(n_1, \ldots, n_r)$, sino, en general, para todas las particiones n de rango r.

6.84. Partiendo de la definición de encaje, es necesario sólo comprobar el cumplimiento de las siguientes propiedades:

(a) reflexividad: $(n_1, \ldots, n_r) \subseteq (n_1, \ldots, n_r)$;

(b) antisimetría: si $(k_1, \ldots, k_l) \subseteq (n_1, \ldots, n_r)$, $(n_1, \ldots, n_r) \subseteq (k_1, \ldots, k_l)$, entonces $(k_1, \ldots, k_l) = (n_1, \ldots, n_r)$;

c) transitividad: si $(k_1, \ldots, k_l) \subseteq (m_1, \ldots, m_t)$, $(m_1, \ldots, m_t) \subseteq (n_1, \ldots, n_r)$, entonces $(k_1, \ldots, k_l) \subseteq (n_1, \ldots, n_r)$.

6.87. El no encajamiento de $(k - t + 1, 1^{t-1}) \subset (n - r + 1, 1^{r-1})$ es equivalente a que o bien $k - t + 1 > n - r + 1$, o bien $k > n$, por consiguiente, $n_a(k, t, r) \leqslant \max\{k - 1, k - 1 - t + r\}$. Por otra parte, si $n_a(k, t, r) = \max\{k - 1, k - 1 - t + r\}$, entonces el citado no encajamiento se cumple; efectivamente, para $t \geqslant r$ tenemos $n_a(k, t, r) = k - 1$, y el no encajamiento es obvio: cuando $t \leqslant r$, $n_a(k, t, r) = k - 1 - t + r$, y, por tanto, si fuera $(k_1, \ldots, k_l) \subset (n_1, \ldots, n_r)$, entonces para $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_r$ esto conduciría a que $(k_1, \ldots, k_l) \subset (n_1, \ldots, n_t)$, mas en tal caso $\sum_{i=1}^{t} n_l \leqslant n - (r - t) = k - 1$, lo que contradice el último encajamiento.

6.93. Pongamos

$$f(k_1, \ldots k_t; r) = \max_{1 \leqslant i \leqslant t} \left(\sum_{j=1}^{i} k_j + (k_i - 1)(r - 1) \right).$$

Está claro que $n(k_1, \ldots, k_t; r) \geqslant f(k_1, \ldots, k_t; r)$, puesto que el encajamiento $(k_1, \ldots, k_t) \subset (n - (r - 1)(k_t - 1), (k_t - 1)^{r-1})$ conduce a la desigualdad $n - (r - 1)(k_t - 1) \geqslant k_1 + \ldots + k_t$. Además si $t > 1$, entonces $f(k_1, \ldots, k_t; r) \geqslant k_1 + f(k_2, \ldots, k_t; r)$, puesto que, si i es un índice que maximiza $f(k_2, \ldots, k_t; r)$, entonces $f(k_1, \ldots, k_t; r) \geqslant \sum_{j=1}^{i} k_j + (r - 1)(k_i - 1) = k_1 + \sum_{j=2}^{i} k_j + (r - 1)(k_i - 1) = k_1 + f(k_2, \ldots, k_t; r)$.

Empleemos la inducción respecto t. Para $t = 1$, esto es exactamente el principio de Dirichlet. Para el paso de inducción de $t - 1$ a t, es suficiente mostrar que si $n = f(k_1, \ldots, k_t; r)$, entonces el encaje requerido se cumple. Veamos una partición arbitraria $(n_1, \ldots, n_r) \mid - n$; en ésta siempre $n_1 \geqslant k_1$, puesto que $f(k_1, \ldots, k_t; r) \geqslant k_1 + (r - 1)(k_1 - 1)$; por eso, el encajamiento de $(k_2, \ldots, k_t) \subset (n_1 - k_1, n_2, \ldots, n_r)$ tiene por resultado el encajamiento de $(k_1, \ldots, k_t) \subset (n_1, \ldots, n_r)$. El encajamiento penúltimo se deduce, a su vez, de la desigualdad $f(k_1, \ldots, k_t; r) \geqslant k_1 + f(k_2, \ldots, k_t; r)$ y de la suposición

de inducción $n_1 - k_1 + n_2 + \ldots + n_r = n - k_1 = f(k_1, \ldots, k_t; r) - k_1 \geqslant f(k_2, \ldots, k_t; r)$. Si, en este caso, $n_1 = k_1$, se debe hacer uso, además, de la monotonía evidente de f según r.

En la formulación del principio de alojamiento completo la condición «no más de» puede omitirse siempre, salvo en el caso degenerado de $k = t < r$.

6.94. En efecto, el r buscado es, de acuerdo con el principio de alojamiento completo, la raíz entera máxima de la desigualdad $n \geqslant n(k_1, \ldots, k_t; r)$.

6.95. $m(n; H_k) = \dfrac{n^2}{2r(k_1, \ldots, k_t; k)} + o(n^2)$.

6.98. Por $\{x\}$ se designará la parte fraccionaria y por $[x]$, la parte entera del número x; $]x[= -[-x]$. En la notación vectorial $[X]$ denota el vector $([x_1], \ldots, [x_t])$, y $\{X\}$, el vector $(\{x_1\}, \ldots, \{x_t\})$. R^t es, como siempre, un espacio euclídeo t-dimensional.

Supongamos que los índices u, v, w maximizan $f(X + Y; r)$, $f(X; r)$ y $f(Y, r)$, respectivamente, entonces

$$f(X; r) + f(Y; r) + r - 1 = \sum_{j=1}^{v} x_j + (x_v - 1)(r-1) + \sum_{j=1}^{w} y_j + (y_w - 1)(r-1) + r - 1 \geqslant \sum_{j=1}^{u} (x_j + y_j) + (x_u + y_u - 1)(r-1) = f(X + Y; r).$$

1. Supongamos lo contrario: $x_t < 0$ y analicemos el $m \in [t-1]$ máximo para el cual $x_m \geqslant 0$, entonces

$$\sum_{j=1}^{m} x_j + (x_m - 1)(r-1) > \sum_{j=1}^{t} x_j + (x_t - 1)(r-1)$$

puesto que $x_{m+1}, \ldots, x_t$ son negativos. Si tal m no existe, estudiemos el máximo $m \in [i+1, t] = [t] \setminus [i]$, para el cual $x_m \geqslant 0$, mas en este caso también se verifica la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{m} x_j + (x_m - 1)(r-1) > \sum_{j=1}^{t} x_j + (x_t - 1)(r-1),$$

puesto que $p \geqslant 0$, y $x_1, \ldots, x_i, x_m, \ldots, x_t$ son todos negativos. En efecto, en este caso esta desigualdad es equivalente a la siguiente

$$\sum_{j=i+1}^{m} x_j + (x_m - 1)(r-1) > (x_i - 1)(r-1),$$

la cual se desprende de que $x_m \geqslant 0 > x_i$, y $\sum_{j=i+1}^{m} x_j \geqslant 0$, ya que $p \geqslant 0$, y la última suma incluye todos los x_j positivos.

2. $\sum_{j=1}^{l} x_j + (x_1 - 1)(r-1) = f(x_l, \ldots x_1, x_{l+1}, \ldots, x_t) \leqslant \max\limits_{s \in S_l} f(X_s) \leqslant$

$\leqslant \max\limits_{s} \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{i} x_{s(i)} + \max\limits_{s} \max\limits_{i} (x_{s(i)} - 1)(r-1) = \sum\limits_{j=1}^{l} x_j + (x_1 - 1)(r-1)$, y de este modo queda calculado el máximo.

Para demostrar el mínimo, tomemos en consideración dos circunstancias.

(a) Mostremos al principio que existe una permutación de la forma $(x_{l+1}, \ldots, x_t, x_{s(l)}, \ldots, x_{s(1)})$ que minimiza la función f. Con este fin basta comprobar que si en una permutación arbitraria $Y = (y_1, \ldots, y_t)$ $y_q < 0$, entonces para

$Y' = (y_q, y_1, \ldots, y_{q-1}, y_{q+1}, \ldots, y_l)$ se verifica la desigualdad $f(Y') \leqslant f(Y)$.

Efectivamente, si $f(Y') = y_q + \sum_{j=1,\ j\neq q}^{p} y_j + (y_p - 1)(r-1)$, entonces $f(Y) = \sum_{j=1}^{p} y_j + (y_p - 1)(r-1) \geqslant y_q + \sum_{j=1,\ j\neq q}^{p} y_j + (y_p - 1)(r-1) = f(Y')$, y, por cuanto $\sum_{j=1}^{l} y_j \geqslant 0$, tendremos, en virtud del p. 1, $p \neq q$.

(b) Mostremos ahora que si $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_l$, entonces

$$\min_{s\in S_l} f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(l)}; r) = f(x_1, \ldots, x_l; r),$$

para lo cual comprobemos que si $x_i \leqslant x_{i+1}$, tendremos

$$f(x_1, \ldots, x_l; r) \geqslant f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_l; r).$$

En efecto, pongamos $X = (x_1, \ldots, x_l)$, $X' = (x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_l)$; entonces si $f(X') = \sum_{j=1}^{p} x_j + (x_p - 1)(r-1)$, donde $p \in [i-1] \cup [1+2, l]$, es decir, $p \neq i$, $i+1$, entonces $f(X) \geqslant \sum_{j=1}^{p} x_j + (x_p - 1)(r-1) = f(X')$; si $f(X') = \sum_{j=1}^{i-1} x_j + x_{i+1} + (x_{i+1} - 1)(r-1)$, entonces $f(X) \geqslant \sum_{j=1}^{i+1} x_j + (x_{i+1} - 1)(r-1) \geqslant \sum_{j=1}^{i-1} x_j + x_{i+1} + (x_{i+1} - 1)(r-1) = f(X')$; si $f(X') = \sum_{j=1}^{i+1} x_j + (x_i - 1)(r-1)$, entonces $f(X) \geqslant \sum_{j=1}^{i+1} x_j + (x_{i+1} - 1)(r-1) \geqslant \sum_{j=1}^{i+1} x_j + (x_i - 1)(r-1) = f(X')$.

Y, por cuanto toda permutación es repesentable mediante un producto de transposiciones, el mínimo queda calculado. En particular, esto tiene por resultado que si X es un vector de números enteros que cuenta con componentes positivos, entonces

$$\min_{s\in S_l} f(X_s; r) \geqslant \sum_j x_j$$

3. $1 - r + dr/2 = f((d/2, 0, \ldots, 0, -d/2); r) \leqslant \max f(X; r) \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{i} x_i + \max_i (x_i - 1)(r-1) \leqslant d/2 + (d/2 - 1)(r-1) = 1 - r + dr/2$, y, por consiguiente, el máximo queda calculado.

El mínimo buscado se realiza para

$$z = \left(\frac{-d}{2},\ \frac{dr^{l-2}}{2(r^{l-1} - (r-1)^{l-1})},\ \frac{dr^{l-3}(r-1)}{2(r^{l-1} - (r-1)^{l-1})},\ \ldots \right.$$
$$\left. \ldots,\ \frac{d(r-1)^{l-2}}{2(r^{l-1} - (r-1)^{l-1})} \right).$$

Mostremos que la igualdad que se demuestra se verifica como estimación inferior. Sea $f(X)=\sum_{j=1}^{i} x_j+(x_i-1)(r-1)$: de acuerdo con el p. 1, $x_i \geqslant 0$, mas en este caso

$$f(X)=-\frac{d}{2}+\min_{\substack{x_j:\ \sum x_j=d/2 \\ x_j\geqslant 0}} f(x_i, \ldots, x_t;\ r)=-\frac{d}{2}+\frac{dr^t}{(r^t-(r-1)^t)}-r+1=$$

$$=\frac{d(r-1)^t}{2(r^t-(r-1)^t)}-r+1\geqslant\frac{d(r-1)^t}{2(r^t-(r-1)^t)}-r+1,$$

y lo requerido está demostrado.

4. Sea $q_i=\frac{pr^{t-1}(r-1)^{i-1}}{r^t-(r-1)^t}$, $i=1, \ldots, t$; $Q=(q_1, \ldots, q_t)$, entonces $\sum_{i=1}^{t} q_i=p$ y

$$f(Q,\ r)=\frac{pr^t}{r^t-(r-1)^t}-r+1,$$

con la particularidad de que para cada $i\in[t]$ se verifica la igualdad $\sum_{j=1}^{i} q_j+(q_i-1)(r-1)=f(Q;\ r)$. De lo último se deduce, para $X=(x_1, \ldots, x_t)$: $\sum_{i=1}^{t} x_i=k\geqslant p$, la igualdad

$$f(X;\ r)=\frac{pr^t}{r^t-(r-1)^t}+f(X-Q;\ r).$$

A su vez

$$\min_{X:\ \sum x_i=0} f(X;\ r)=f(0;\ r)=-r+1.$$

En efecto, suponiendo lo contrario, es decir que $\min f<-r+1$, llegamos al sistema $\sum_{j=1}^{t} x_j=0$, $\sum_{j=1}^{i} x_j+rx_i<0$, $i=1, \ldots, t$, el cual es incompatible cuando $r\geqslant 1$. Efectivamente, al sustraer la igualdad de todas las t desigualdades, obtenemos que $(r-1)x_i<x_{i+1}+\ldots+x_t$, $i=1, \ldots, t$, de donde encontramos sucesivamente que $x_t<0$, $x_{t-1}<0$, $\ldots$, $x_1<0$, lo que contradice la igualdad del sistema de partida.

6.108. (a) Si $f(k_1, \ldots, k_t)=\max_{1\leqslant i\leqslant t}\left(\sum_{j=1}^{i} k_j+\sum_{l=2}^{r}\min(n_l,\ k_i-1)\right)$, entonces $f(k_1, \ldots, k_t)-k_1\geqslant f(k_2, \ldots, k_t)$.

En efecto, si i maximiza $f(k_2, \ldots, k_t)$, entonces

$$f(k_1, \ldots, k_t)\geqslant\sum_{j=1}^{i} k_j+\sum_{l=2}^{r}\min(n_l,\ k_i-1)=$$

$$=k_1+\sum_{j=2}^{i} k_j+\sum_{l=2}^{r}\min(n_l,\ k_i-1)=k_1+f(k_2, \ldots, k_t).$$

(b) Sea $(p_1, \ldots, p_r)$ una partición del número $f(k_1, \ldots, k_t)$ en r partes, en la cual $p_i \leqslant n_i$, $i = 2, \ldots, r$. Entonces en esta partición existe una parte que no es inferior a k_1. Efectivamente, en el caso contrario tendríamos

$$f(k_1, \ldots, k_t) \geqslant k_1 + \sum_{i=2}^{r} \min(n_i, k_1 - 1) > \sum_{i=1}^{r} \min(p_i, k_1 - 1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} p_i = f(k_1, \ldots, k_t).$$

(c) Ahora realicemos la demostración por inducción respecto de t. Para $t = 1$ tenemos:

$$n(k; n_2, \ldots, n_r) = k + \sum_{i=2}^{r} \min(n_i, k-1),$$

y, de acuerdo con (b), en cualquier partición $(p_1, \ldots, p_r)$ del número $n(k; n_2, \ldots, n_r)$ en r partes tal que $p_i \leqslant n_i$, $i = 2, \ldots, r$, existe una parte que no es inferior a k.

(d) Suponga nos ahora que lo requerido se cumple hasta $t - 1$; mostremos que esto es así también para t. Sea $(p_1, \ldots, p_r)$ una partición arbitraria del número $f(k_1, \ldots, k_t)$ en r partes, en la cual $p_i \leqslant n_i$, $i = 2, \ldots, r$. Entonces, con arreglo a (b), en esta partición existe una parte $p_j \geqslant k_1$. Quiere decir, si $(k_2, \ldots, k_t) \subseteq (p_1, \ldots, p_j - k_1, \ldots, p_r)$, entonces el encajamiento requerido $(k_1, \ldots, k_t) \subseteq (\mu_1, \ldots, p_r)$ tiene lugar. El encajamiento penúltimo se desprende, a su vez, de la desigualdad demostrada más arriba $f(k_1, \ldots, k_t) - k_1 \geqslant f(k_2, \ldots, k_t)$, y de la suposición de inducción:

$$p_1 + \ldots + p_j - k_1 + \ldots + p_r = f(k_1, \ldots, k_t) -$$

$$- k_1 \geqslant f(k_2, \ldots, k_t) = n(k_2, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_r).$$

6.109. Sea M un conjunto de todas aquellas particiones $(p_1, \ldots, p_r)$ $n = \sum_{i=1}^{r} p_i$, en las cuales $p_i \leqslant n_i$, $i = 2, \ldots, r$, y sea M_j un subconjunto de aquellas particiones de M, para las cuales $p_j \leqslant n_j - 1$, $j = 2, \ldots, r$. Está claro que $M = \bigcup_{j=2}^{r} M_j \cup (n_1, \ldots, n_r)$. Por cuanto $n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_r) > n$, existe en M una partición $(q_1, \ldots, q_l)$ tal que $(k_1, \ldots, k_t) \subseteq (q_1, \ldots, q_r)$, pero, dado que

$$n \geqslant \max_{2 \leqslant j \leqslant r} n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_j - 1, \ldots, n_r),$$

entonces para cada $(p_1, \ldots, p_r) \in \bigcup_{j=2}^{r} M_j$ tiene lugar el encajamiento $(k_1, \ldots, k_t) \subseteq (p_1, \ldots, p_r)$; esto quiere decir necesariamente que $(q_1, \ldots, q_r) = (n_1, \ldots, n_r)$.

6.110. $n(k_1, \ldots, k_t; (m^{r-1})) = \max_{1 \leqslant i \leqslant t} \left(\sum_{j=1}^{i} k_j + (r-1) \min(m, k_i - 1) \right) =$

$$= \max \left(\sum_{j=1}^{l} k_j + (r-1)m, \sum_{j=1}^{l} k_j + n(k_{l+1}, \ldots, k_t; r) = \sum_{j=1}^{l} k_j + \max((r-1)m, \right.$$

$$n(k_{l+1}, \ldots k_t, r)) = \sum_{j=1}^{l} k_j + n(m+1, k_{l+1}, \ldots, k_t; r) - m - 1.$$

6.111. Veamos las estimaciones para $m(k, t, r)$ en el caso cuando $k \neq 0 \pmod{r^t - (r-1)^t}$. Supongamos que en adelante Q denota siempre un vector t-dimensional con componentes

$$q_i = \left(\frac{kr^{t-i}(r-1)^{i-1}}{r^t - (r-1)^t} \right), \quad i = 1,$$

y $l=\sum_{i=1}^{t}\{q_i\}$. Señalemos una propiedad del vector Q. Precisamente, las componentes q_i del vector Q o son simultáneamente números no enteros, o bien son todas números enteros y este último caso tiene lugar cuando y sólo cuando k es múltiplo de $r^t-(r-1)^t$. Esta propiedad se deduce directamente de que los números $r^{t-i}(r-1)^{(t-1)}$ y $(r^t-(r-1)^t)$ son recíprocamente primos para cada $i\in[t]$. Por consiguiente, para cada $i\in[t]$ son válidas las estimaciones:

$$\frac{1}{r^t-(r-1)^t}\leqslant\{q_i\}\leqslant 1-\frac{1}{r^t-(r-1)^t}.$$

Además, es evidente que $1\leqslant l\leqslant t-1$.

Demostremos ahora la siguiente estimación inferior

$$m(k,\ t,\ r)\geqslant\frac{kr^t}{r^t-(r-1)^t}-r+1+l-f(\{Q\};\ r)$$

Si $K=(k_1,\ \ldots,\ k_t)$ $|-k$, tenemos

$$f(K;\ r)=\frac{kr^t}{r^t-(r-1)^t}+f(K-Q;\ r).$$

Pero

$$f(K-Q;\ r)=f(K-[Q]-\{Q\};\ r)\geqslant f(K-[Q];\ r)-f(\{Q\};\ r)-r+1.$$

La última desigualdad se deduce de la desigualdad para la función f, demostrada en el problema 6.98, si ponemos en ella $X=K-[Q]-\{Q\}$, $Y=\{Q\}$. Además, por cuanto X es un vector de números enteros que cuenta con componentes positivas, entonces

$$\min_{s\in S}f(X_s;\ r)\geqslant\sum_j x_j,$$

y, por consiguiente $f(K-[Q];\ r)\geqslant\sum_{i=1}^{t}(k_i-[q_i])=l$; lo que significa que

$$f(K-[Q];\ r)-f(\{Q\};\ r)-r+1\geqslant l-r+1-f(Q;\ r).$$

Es notable que el segundo miembro de la estimación obtenida es siempre un número entero.

De la estimación demostrada se deduce que si $\{q_M\}=\max_{1\leqslant i\leqslant t}\{q_i\}$, entonces

$$m(k,\ t,\ r)\geqslant\frac{kr^t}{r^t-(r-1)^t}-\{q_M\}(r-1),$$

puesto que

$$f(\{Q\};\ r)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant t}\sum_{j=1}^{i}\{q_j\}+\max_{1\leqslant i\leqslant t}(\{q_i\}-1)(r-1)\leqslant l+(\{q_M\}-1)(r-1).$$

Hay otra estimación inferior que tiene una forma más geométrica, a saber, si $d=\min\|Z-Q\|_l$, donde mín se toma por todos los vectores de números enteros $Z=(z_1,\ \ldots,\ z_t)$ tales que $\sum_{i=1}^{t}z_i=k$, entonces

$$m(k,\ t,\ r)\geqslant\frac{kr^t}{r^t-(r-1)^t}+\frac{d(r-1)^{t-1}}{r^{t-1}-(r-1)^{t-1}}-r+1.$$

En particular, esta estimación indica que una partición minimizante no puede ser un vector entero que está demasiado lejos de Q según la métrica l_1. Además, ella puede emplearse al estimar la frontera del alojamiento completo de cualquier partición concreta $K = (k_1, \ldots, k_l) \mid -k$:

$$n(K;\ r) \geqslant \frac{kr^t}{r^t-(r-1)^t} + \frac{\| K-Q \|_1 (r-1)^{t-1}}{r^{t-1}-(r-1)^{t-1}} - r + 1.$$

A título de estimación superior demostremos la desigualdad

$$\frac{kr^t}{r^t-(r-1)^t} - \{q_{ml}\}\ (r-1) \geqslant m(k,\ t,\ r),$$

donde $\{q_{ml}\} = \min\limits_{t-l+1 \leqslant i \leqslant t} \{q_i\}$. Con este fin estudiemos la partición $K = ([q_1],\ \ldots,\ [q_{t-l}],\ ]q_{t-l+1}[,\ \ldots,\ ]q_t[) \mid -k$.

Para esta partición

$$f(K-Q) = \max_{t-l+1 \leqslant i \leqslant t} \left(\sum_{j=1}^{i} (k_j - q_j) + (k_l - q_l - 1)(r-1) \leqslant \right.$$

$$\leqslant \max_{t-l+1 \leqslant i \leqslant t} \left(\sum_{j=1}^{i} (k_j - q_j) + \max_{t-l+1 \leqslant i \leqslant t} (k_l - q_l - 1)(r-1) = \right.$$

$$= -\min_{t-l+1 \leqslant i \leqslant t} \{q_i\}(r-1),$$

lo que nos lleva a lo requerido.

Obtenemos pues las estimaciones bilaterales:

$$\frac{kr^t-r+1}{r^t-(r-1)^t} \geqslant m(k,\ t,\ r) \geqslant \frac{kr^t+r-1}{r^t-(r-1)^t} - r + 1.$$

Precisemos un tanto las estimaciones generales obtenidas.

Cuando $r \leqslant 2$, la diferencia entre las estimaciones superiores e inferiores es siempre menor que la unidad y, por tanto, en virtud de que $m(k,\ t,\ r)$ es un número entero, ellas dan el valor preciso:

$$m(k,\ t,\ r) = \left] \frac{kr^t}{r^t-(r-1)^t} \right[- r + 1,\ r = 1,\ 2.$$

Cuando $l = 1$ hagamos uso para la estimación superior de la partición

$$K = ([q_1],\ \ldots,\ [q_{M-1}],\ ]q_M[,\ [q_{M+1}],\ \ldots,\ [q_t]) \mid -k.$$

Para esta partición

$$f(K-Q) = -\sum_{j=1}^{M-1} \{q_j\} + (1 - \{q_M\}) - \{q_M\}(r-1) =$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^{M} \{q_j\} - \{q_M\}(r-1) = \sum_{j=M+1}^{t} \{q_j\} - \{q_M\}(r-1) < 1 - \{q_M\}(r-1).$$

Esto nos da, en comparación con la estimación inferior obtenida, una diferencia inferior a la unidad. Por consiguiente, cuando $l = 1$, tenemos

$$m(k,\ t,\ r) = \frac{kr^t}{r^t-(r-1)^t} + \sum_{j=M+1}^{t} \{q_j\} - \{q_M\}(r-1),$$

o bien

$$m(k,\ t,\ r)=\left]\frac{kr^t}{r^t-(r-1)^t}-(q_M)\,(r-1)\right[.$$

Así pues, cuando $t=1$, la frontera del alojamiento completo se minimiza por el vector de valor entero más próximo a Q respecto de la métrica l_1. En particular, esto ofrece la solución completa de la cuestión sobre la minimización para el caso de $t=2$.

6.112. Está claro que siempre $n(Y;\ r)\leqslant C$, por lo cual pongamos $C=m(k,\ t,\ r)$. Si en este caso $\sum_{j=1}^{t}y_j=k$, entonces $n(Y;\ r)=m(k,\ t,\ r)$ por ser mínimo el número $m(k,\ t,\ r)$. Si $\sum_{j=1}^{t}y_j>k$, entonces, al disminuir la cantidad requerida de componentes y_j del vector Y en una magnitud igual a $(\sum_{j=1}^{t}y_j-k)$, obtendremos la partición del número k que tiene el valor de la frontera del alejamiento completo no superior a $m(k,\ t,\ r)$, y, por tanto, igual a $m(k,\ t,\ r)$.

En el caso alternativo de $\sum_{j=1}^{t}y_j<k$ veamos una partición minimizante $X=(x_1,\ \ldots,\ x_t)\mid-k$, que es la más «grande» en el sentido del orden lexicográfico sobre el conjunto $P_t(k)$ y veamos también el $i\in[t]$ mínimo, para el cual $x_i>y_i$. Tal i existe, evidentemente, siempre, con la particularidad de que $[i-1]\neq 0$, puesto que $x_1\leqslant[(m+r-1)/r]=y_1$.

Existe tal $j\in[i-1]$ que $x_j<y_j$, puesto que de lo contrario: de $x_j=y_j$, $j=1,\ \ldots,\ i-1$, $x_i>y_i$ tenemos que $\sum_{j=1}^{i}x_j+(r-1)\,(x_i-1)>m(k,\ t,\ r)$. En efecto, por cuanto en tal caso $x_i\geqslant y_i+1$, entonces

$$\sum_{j=1}^{i}x_j+(r-1)\,(x_i-1)\geqslant\sum_{j=1}^{i}y_j+(r-1)\,(y_i-1)+r>m(k,\ t,\ r),$$

puesto que el incumplimiento de la última desigualdad es equivalente a que

$$y_i\leqslant\left[(m-1)-\sum_{j=1}^{i-1}y_j/r\right]=y_i-1.$$

Examinemos ahora tal $j\in[i-1]$ que $x_j<y_j$, y estimemos para la partición $X'=(x'_1,\ \ldots,\ x'_t)=(x_1,\ \ldots,\ x_j+1,\ \ldots,\ x_i-1,\ \ldots,\ x_t)\mid-k$ el valor de su frontera de alojamiento completo $n(X';\ r)$.

Sea v un índice que maximiza $n(X';\ r)$, es decir $n(X';\ r)=\sum_{w=1}^{v}x'_w+(r-1)\,(x'_v-1)$. Si $v>i$, está claro que $n(X';\ r)=n(X;\ r)=m(k,\ t,\ r)$.

Si $v=i$, entonces $n(X';\ r)=\sum_{w=1}^{i}x'_w+(r-1)\,(x'_i-1)=\sum_{w=1}^{i}x_w+(r-1)\times(x_i-2)+1=\sum_{w=1}^{i}x_w+(r-1)\,(x_i-1)-r+2\leqslant n(X;\ r)-r+2=m(k,\ t,\ r)-r+2$, lo que siempre no sobrepasa de $m(k,\ t,\ r)$ cuando $r\geqslant 2$.

Si $v<i$, entonces $x'_w\leqslant y_w$, $w=1,\ \ldots,\ v$, lo que quiere decir que en este caso también

$$n(X';\ r)=\sum_{w=1}^{v}x'_w+(r-1)\,(x'_v-1)\leqslant n(Y;\ r)\leqslant m(k,\ t,\ r).$$

Así pues, $n(X';\ r)\leqslant m(k,\ t,\ r)$, y, por consiguiente, $n(X';\ r)=m(k,\ t,\ r)$, es decir, la partición X' es también minimizante, pero al mismo tiempo $X'\geqslant X$

lo que contradice el hecho de que X es máximo en el sentido del orden lexicográfico.

Advirtamos que en virtud de las acotaciones obtenidas más arriba para $m\ (k,\ t,\ r)$, el tanteo respecto de C no sobrepasa la diferencia entre estas acotaciones, es decir, $r-1$.

6.113. El t buscado es una raíz entera mínima de la ecuación $k = m\ (k,\ t,\ r)$. Por eso, la solución se obtiene empleando el resultado del problema anterior. El tanteo en este caso es también limitado por las estimaciones que se tienen para t, las cuales se desprenden de las estimaciones para $m\ (k,\ t,\ r)$, a saber,

$$\frac{\ln\ (k+r-1)}{\ln\ (r)\ -\ \ln\ (r-1)} \geqslant t\ (k,\ r) \geqslant \frac{\ln\ (k+r-1)-\ln\ (r-1)}{\ln\ (r)-\ln\ (r-1)}\ .$$

De aquí se deduce, en particular, que para r fijado y $n \to \infty$, el número mínimo posible de composiciones por medio de las cuales pueden realizarse todas las salidas en el esquema de alojamiento de n partículas indistinguibles en r células indistinguibles se porta asintoticamente como la magnitud $\frac{\ln(k+r-1)}{\ln(r)-\ln(r-1)}$ y el término residual (que siempre no sobrepasa de cero), como una magnitud de orden $\frac{\ln\ (r-1)}{\ln\ (r)-\ln\ (r-1)}$.

El propio sistema compuesto de un número mínimo de composiciones se define por el vector $Y = (y_1,\ \ldots,\ y_t)$ de la formulación del problema.

6.114. La relación existente entre los encajamientos de las particiones y los pesajes se basa en el siguiente hecho simple. El sistema de pesas $(k_1,\ \ldots,\ k_t)\ |-k$ asegura el pesaje (empleando un solo platillo) de la carga $v \leqslant k$ cuando y sólo cuando $(k_1,\ \ldots,\ k_t) \subseteq (v,\ k-v)$. Por consiguiente, este sistema de pesas asegura el pesaje de cualquier carga entera no más pesada que k cuando y sólo cuando la partición $(k_1,\ \ldots,\ k_t)\ |-k$ se encaja en toda partición k en dos partes a lo sumo, y, de acuerdo con el principio de alojamiento completo, esto es posible si y sólo si $k \geqslant n\ (k_1,\ \ldots,\ k_t;\ 2)$, lo que, a su vez, es equivalente al sistema de desigualdades

$$k_i \leqslant 1+\sum_{j=i+1}^{t} k_j, \quad i=1,\ \ldots,\ t.$$

De aquí se deduce, en particular, que

$$k_i \leqslant \frac{k+1-\sum_{j=1}^{i-1} k_j}{2} \leqslant 2^{t-i}, \quad i=1,\ \ldots,\ t.$$

Esto significa que el número mínimo posible de pesas $t_1\ (k)$ para pesar empleando un solo platillo es la raíz entera mínima de la desigualdad $k \geqslant m\ (k,\ t,\ 2)$, lo que nos conduce a que $t_1\ (k) = \rceil \log_2\ (k+1) \lceil$.

El pesaje empleando dos platillos se reduce al pesaje con un platillo. El sistema de pesas $(k_1,\ \ldots,\ k_t)\ |-k$ asegura el peso con dos platillos de una carga $v \leqslant k$, si y sólo si $(k_1^2,\ \ldots,\ k_t^2) \subseteq (k-v,\ k+v)$.

En efecto, la igualdad $v=\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j k_j$, donde $\varepsilon_j = 0,\ 1,\ -1$, es equivalente a la igualdad $k+v=\sum_{j=1}^{t} \eta_j k_j$, donde $\eta_j = (\varepsilon_j+1) = 0,\ 1,\ 2$.

Por eso el sistema de pesas $(k_1,\ \ldots,\ k_t)\ |-k$ asegura el pesaje preciso con dos platillos de cualquier carga entera no más pesada que k, si y sólo si $2k \geqslant$

$\geqslant n\,(k_1^2, \ldots, k_t^2; (k)) = n\,(k_1^2, \ldots, k_t^2; 2)$, lo que, de acuerdo con el principio de alojamiento completo, es equivalente al sistema de desigualdades

$$k_i \leqslant 1 + 2 \sum_{j=i+1}^{t} k_j, \quad i = 1, \ldots, t.$$

De aquí se deduce, en particular, que

$$k_i \leqslant \left[\frac{2k + 1 - 2\sum_{j=1}^{i-1} k_j}{3}\right] \leqslant 3^{t-i}, \quad i = 1, \ldots, t.$$

Por consiguiente, el número mínimo posible de pesas $t_2(k)$ para poder pesar empleando dos platillos es igual a $t_2(k) =]\log_3(2k+1)[$.

Los pesajes empleando un solo platillo en $p = r - 1$ balanzas con ayuda de las pesas $(k_1, \ldots, k_t) \mid -k$ son equivalentes a que $k \geqslant n\,(k_1, \ldots, k_t; r)$, por lo cual el número mínimo de pesas es t, es decir, la raíz mínima de la desigualdad $k \geqslant m\,(k, t, r)$.

El pesaje de una carga v empleando p platillos en una balanza con ayuda de las pesas $(k_1, \ldots, k_t) \mid -k$ es equivalente al encaje $(k_1^p, \ldots, k^p) \subseteq (k - v, (p-1)\,k + v) \mid -pk$. En este caso el peso de cualquier carga es equivalente a la desigualdad $pk \geqslant n\,(k_1^p, \ldots, k_t^p; (k)) = n\,(k_1^p, \ldots, k_2^p; 2)$, por lo que el número mínimo de pesas es t, es decir, la raíz mínima de la desigualdad $pk \geqslant p\mu\,(k, t, 1 + 1/p)$, donde $\mu\,(k, t, 1 + 1/p)$ es el mínimo de la función de alojamiento completo.

§ 3. Constantes geométricas extremales

Demos a conocer una identidad muy útil. Si $k \geqslant l \geqslant t$, $\sigma_l \subseteq \sigma_k$, entonces

$$\sum_{\sigma_t \subseteq \sigma_l \subseteq \sigma_k} (\sigma_l) = (\sigma_k) \binom{k-t}{l-t} + (\sigma_k - \sigma_t) \binom{k-t-1}{l-t-1} \tag{6.11'}$$

6.116. Sea σ_l^* tal que $\max_{\sigma_l \subset \sigma_k} \| \sigma_l \| = \| \sigma_l^* \|$; entonces, de acuerdo con (6.11'), para $k \geqslant 2l$ tenemos

$$\sum_{\sigma_l \subseteq \sigma_k - \sigma_l^*} (\sigma_l) = (\sigma_k - \sigma_l^*) \binom{k-l-1}{l-1},$$

de donde

$$\| \sigma_l^* \| \geqslant \frac{l}{k-l} \| \sigma_k - \sigma_l^* \|, \tag{6.12'}$$

por consiguiente, para $k \geqslant 2l$ en cualquier sistema σ_k siempre existe un subsistema $\sigma_l \subset \sigma_k$ que satisface (2). En cambio, si $k \leqslant 2l$, entonces, de acuerdo con (6.11'),

$$\sum_{\sigma_k \subset \sigma_l^* \subset \sigma_l \subset \sigma_k} (\sigma_l) = (\sigma_k - \sigma_l^*) \binom{l}{2l-k} + \sigma_l^* \binom{l-1}{2l-k-1},$$

de donde

$$\| \sigma_l^* \| \geqslant \frac{l}{3l-k} \| \sigma_k - \sigma_l^* \|, \tag{6.13'}$$

por consiguiente, para $k \leqslant 2l$, en cualquier sistema σ_k existe un subsistema $\sigma_l \subset \sigma_k$ que satisface (6.13').

La inmejorabilidad de las desigualdades (6.12') y (6.13') se demuestra por el sistema $\sum (k,\ l_\infty^k)$ de k vectores unitarios del espacio l_∞^k (espacio R^k con la norma $\| x \| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} | x_i |$) de la forma siguiente:

$$x_1 = \left(-1,\ \frac{1}{2l-1},\ \ldots,\ \frac{1}{2l-1} \right),$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{2l-1},\ -1,\ \frac{1}{2l-1},\ \ldots,\ \frac{1}{2l-1} \right),\ \ldots,\ x_k =$$

$$= \left(\frac{1}{2l-1},\ \ldots,\ \frac{1}{2l-1},\ -1 \right).$$

Además, (6.12') no puede ser mejorado en todo X, lo que se demuestra por un haz de k vectores unitarios. Al mismo tiempo (6.13') puede ser reforzada, por ejemplo, en el espacio de Hilbert: ¿en cuánto? Así pues,

$$\text{para } k \geqslant 2l \quad A\ (k,\ l;\ X) = l/(k-l),$$

$$\text{para } k \leqslant 2l \quad \inf_X A\ (k,\ l;\ X) = A\ (k,\ l;\ l_\infty^k) = l/(3l-k).$$

6.117. De acuerdo con (6.11'), si $k \geqslant r \geqslant l \geqslant 1$, $\sigma_r \subset \sigma_k$, entonces $\sum\limits_{\sigma_l \subset \sigma_r} (\sigma_l) = (\sigma_r) \left(\frac{r-1}{l-1} \right)$; por consiguiente,

$$\max_{\sigma_l \subset \sigma_r} \| \sigma_l \| \geqslant \frac{l}{r} \| \sigma_r \|. \tag{6.14'}$$

Evidentemente, (6.14') no puede ser mejorado en todo X, lo que se demuestra por un haz de k vectores unitarios

Sea $k \geqslant l + r \geqslant 2r$, $\sigma_r \subset \sigma_k$, entonces, de acuerdo con (6.11'),

$$\binom{k-r-1}{l-1} \sum_{\sigma_r \subset \sigma_l \subset \sigma_k} (\sigma_l) - \binom{k-r-1}{l-r-1} \sum_{\sigma_l \subset \sigma_k - \sigma_r} (\sigma_l) =$$

$$= \sigma_r \left(\frac{k-l}{l-r} \right) \binom{k-r-1}{l-1},$$

de donde

$$\| \sigma_l \| \geqslant \frac{l}{2l-r} \| \sigma_r \|, \tag{6.15'}$$

Las desigualdades (6.14') y (6.15') no pueden ser mejoradas en la clase de vectores unitarios, basta a título de σ_k considerar $\sum (k,\ l_\infty^k)$. La desigualdad (6.15') tampoco se mejora en todo X: hágase la construcción correspondiente (unidimensional).

Sea $r \leqslant l$, $k \leqslant l + r$, $\sigma_r \subseteq \sigma_k$, entonces, de acuerdo con (6.11')

$$\binom{r}{l-k+r} \sum_{\sigma_r \subset \sigma_l \subset \sigma_k} (\sigma_l) - \binom{k-r-1}{l-r-1} \sum_{\sigma_k - \sigma_r \subset \sigma_l \subset \sigma_k} (\sigma_l) =$$

$$= (\sigma_r) \left[\binom{k-1}{l-r} \binom{r}{l-k+r} - \left(\frac{r-1}{l-k+r-1} \right) \binom{k-r-1}{l-r-1} \right]$$

de donde

$$\| \sigma_l \| \geqslant \frac{l}{r} \frac{(k-l)}{(k+l-2r)} \| \sigma_r \|, \qquad (6.16')$$

La estimación (6.16') no puede ser mejorada en todo X: constrúyase un ejemplo (unidimensional).

Así pues,

para $k \geqslant r \geqslant l$ $\quad B(k, l, r; X) = l/r$,
para $k \geqslant l + r \geqslant 2r$ $\quad B(k, l; r; X) = l/(2l - r)$,
para $k \leqslant l + r$, $l \geqslant r$ $\quad B(k, l, r; X) = l(k - l)/r(k + l - 2r))$.

6.118. Sea, ahora $\delta(l, k; X) = \inf_{\sigma_k \subset X} \max_{\sigma_l \subset \sigma_k} \| \sigma_l \|$, entonces de acuerdo con las definiciones de B y δ, tenemos la desigualdad $\delta(l, k; X) \geqslant B(k, l, r; X)\, \delta(r, k; X)$, la cual sugiere, para $r = 1$, $k > l$, la estimación $\delta(l, k; X) \geqslant l/(2l - 1)$ que se realiza por $\sum (k, l_\infty^k)$, por consiguiente, cuando $k > l$,

$$\inf_X \delta(l, k, X) = \delta(l, k; l_\infty^k) = l/(2l - 1),$$

Para un espacio de Hilbert cuya dimensión no es inferior a $k - 1$ tenemos

$$\delta(l, k; H) = \sqrt{l(k-l)/(k-1)}. \qquad (6.17')$$

La demostración de (6.17') véase en la solución del problema 6.121. Además, puede mostrarse [Sidorenko A.F.], que si l_1^d es un espacio R^d con la norma

$$\| x \| = \sum_{i=1}^{d} | x_i |, \text{ entonces } \delta(l, l+1; l_1) = u/(2u-1), \qquad (6.18')$$

$$\delta(2, k; l_1) = \begin{cases} (k-2)/(k-1), & k \equiv 0 \pmod 2, \\ (k-1)/k, & k \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \qquad (6.19')$$

con la particularidad de que la dimensión mínima $d(k)$ del espacio l_1^d, que realiza (6.19'), se porta de una manera muy irregular: $d(2) = 1$, $d(3) = d(4) = 3$, $d(5) = d(6) = 10$, $d(7) = d(8) = 7$.

6.119. Pongamos $z_{i_1, \ldots, i_l} = \sum_{j=1}^{l} V_j x_{ij}$. Entonces tiene lugar la identidad

$$\sum_{i_1, \ldots, i_l} z_{i_1, \ldots, i_l} = (\sigma_k) \left(\sum_{i=1}^{l} V_i \right) \binom{k-1}{l-1} (l-1)!$$

Por consiguiente, $\max_{i_1, \ldots, i_l} \| z_{i_1, \ldots, i_l} \| \geqslant \| \sigma_k \| \left| \sum_{i=1}^{l} V_i \right| / k$. La inmejorabilidad de esta desigualdad se demuestra por un haz de k vectores unitarios. Así pues, $C(\bar{V}_l, \bar{l}_k^h) = \left| \sum_{i=1}^{l} V_i \right| / k$. En particular, llegamos a que para cada sistema $\sigma_k \subset X$ y cualquier sistema de números $V_1, \ldots, V_h$ existe tal permutación de índices π, para la cual $\left\| \sum_{i=1}^{h} V_{\pi(i)} X_i \right\| \geqslant \left| \sum_{i=1}^{h} V_i \right| k^{-1} \| \sigma_k \|$.

6.120. Para $\sigma_k \subset X$ pongamos $b_j = i \binom{k-i}{l-i} (l-i)!$, $A = \sum_{\sigma_l \subset \sigma_k} \left(\sum_{i=1}^{l} V_i x_i \right)^2$, donde el cuadrado se entiende en el sentido de un producto escalar, y en este caso tenemos

$$A = b_1 \sum_{i=1}^{l} V_i^2 \sum_{i=1}^{h} x_i^2 + 2b_2 \sum_{i<j}^{l} V_i V_j \sum_{i<j}^{h} x_i x_j =$$

$$= b_2 \sum_{i<j}^{l} V_i V_j \left(\sum_{i=1}^{h} x_i \right)^2 + \left[b_1 \sum_{i=1}^{l} V_j^2 - b_2 \sum_{j<i}^{l} V_i V_j \right] \sum_{i=1}^{h} x_i^2 =$$

$$= b_1 \sum_{i=1}^{l} V_i^2 - b_2 \sum_{i<j}^{l} V_i V_j,$$

después de lo cual basta pasar a las normas.

6.121. En la clase de todos los espacios lineales normados tiene lugar la fórmula siguiente

$$\inf_X \delta(\overline{V}_n;\ X) = \delta(\overline{V}_n;\ l_\infty^n) = \frac{|\ V(V_1 - V_n)\ |}{|\ V - V_1\ | + |\ V - V_n\ |}, \qquad (6.20')$$

donde $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$, $V_1 \geqslant V_2 \geqslant \ldots \geqslant V_n$. La fórmula (6.20') se realiza o bien por un haz de n vectores unitarios, o bien en l_∞ por una construcción del tipo $x_1 = (1, a, \ldots, a)$, $x_2 = (a, 1, \ldots, a)$, $\ldots$, $x_n = (a, a, \ldots, 1)$, donde $a = (V_1 + V_n)/(2V - V_1 - V_n)$. El vector $\overline{V}_n$ se llama *equilibrado*, si $\forall i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $V(V - V_i) > 0$. De (6.20') tenemos:

si $\overline{V}_n$ no está equilibrado, entonces $\delta(\overline{V}_n;\ X) = |\ V\ |$;

si $\overline{V}_n$ es de signo constante y $|V_1| \geqslant |V_2| \geqslant \ldots \geqslant |V_n| \geqslant 0$, entonces

$$\inf_X \delta(\overline{V}_n;\ X) = \delta(\overline{V}_n,\ l_\infty^n) = V \cdot V_1 / |\ 2V - V_1\ |;$$

si $\overline{V}_n$ está equilibrado y es de signo constante, entonces

$$\inf_X \delta(\overline{V}_n;\ X) = \delta(\overline{V}_n,\ l_\infty^n) = (V(V_1 - V_n))/(2V - V_1 - V_n);$$

si el vector ponderal está equilibrado y si $V_1 = -V_n$, entonces

$$\inf_X \delta(\overline{V}_n;\ X) = \delta(\overline{V}_n;\ l_\infty^n) = V_1.$$

En el espacio de Hilbert H tenemos:

si $\dim(H) \geqslant n-1$, $\sum_{i \neq j}^{n} V_i V_j > 0$, entonces

$$\delta(V_n;\ H) = \left(\frac{n \sum_{i=1}^{n} V_i^2 - V^2}{n-1} \right)^{1/2};$$

si $\dim(H) \geqslant 1$, $\sum_{i \neq j}^{n} V_i V_j \leqslant 0$, entonces

$$\delta(\overline{V}_n;\ H) = |\ V\ |.$$

La demostración repite casi por completo la resolución del problema 6.120.

6.122. De acuerdo con el problema 6.53, el grafo $G^2(S_n)$ posee para $p \leqslant 2(q-1)$ la propiedad de que $\forall S_p \subset S_n \exists S_q \subset S_p : C^2(S_q) \subset G^2(S_n)$, cuando y sólo cuando $\exists S_{n-p+q} \subset S_n : C^2(S_{n-p+q}) \subset G^2(S_n)$. Por consiguiente, aplicada dicha propiedad a nuestros vectores en el espacio de Hilbert, llegamos a que siempre existe un subsistema $\sigma_{n-p+q} \subset \sigma_n$, que consta de los vectores ortogonales de dos en dos (para $p \leqslant 2(q-1)$, $k=2$, $c=\sqrt{2}$), por consiguiente,

$$|\sigma_n| \leqslant |\sigma_{n-p+q}| + |\sigma_n - \sigma_{n-p+q}| \leqslant \sqrt{n-p+q} + p - q;$$

la exactitud de esta estimación la demuestra el punto de referencia de $n-p+q$ vectores unitarios y el haz de $p-q$ vectores unitarios dirigido según el vector de la suma de todos los vectores del punto de referencia mencionado.

6.123. Sobre un conjunto de puntos $\sigma_n \subset X$ construyamos, como sobre los vértices, un l-grafo $G^l \subset C^l(\sigma_n)$, rigiéndonos por la regla: $\sigma_l \in G^l \Leftrightarrow \|\sigma_l\| \geqslant \delta(l, k; X)$. Si $|G^l| < T(n, k, l)$, entonces

$$\exists \sigma_k^* \subset \sigma_n;\ \forall \sigma_l \subset \sigma_k \quad \|\sigma_l\| < \delta(l, k; X)$$

o bien $\exists \sigma_k^* \subset \sigma_n$: $\max\limits_{\sigma_l \subset \sigma_k} \|\sigma_l\| < \delta(l, k; X)$, pero en tal caso

$$\min_{\sigma_n \subset X} \max_{\sigma_l \subset \sigma_k} \|\sigma_l\| \leqslant \max_{\sigma_l \subset \sigma_k^*} \|\sigma_l\| < \delta(l, k; X),$$

y, por consiguiente,

$$\min_{\sigma_n \subset X} \max_{\sigma_l \subset \sigma_k} \|\sigma_l\| < \delta(l, k; X),$$

lo que contradice la definición de $\delta(l, k; X)$.

6.125. Indicaciones. 1) Muéstrese que para n suficientemente grande

$$\delta(2, n; l_1^n) = 1 - 1\Big/\left(2\right]\frac{n}{2}\left[-1\right)$$

y, en particular, $\delta(2, 4n, l_1^{4n-1}) \geqslant (4n-2)/(4n-1)$.

2) Muéstrese que si

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4n} \|X_1 + X_2\| = \delta(2, 4n; l_1^{4n-1}),$$

donde $x_1, \ldots, x_{4n} \in l_1^{4n-1}$, $\|X_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, 4n$, entonces, para cualesquiera i y j $(1 \leqslant i < j \leqslant 4n)$ $\|X_i + X_j\| = \delta(2, 4n; l_1^{4n-1})$.

Acerca de los problemas 6.115—6.125 véanse Katona G., Stechkin B.S. — Memorias de la A.C. de la URSS, 1980. 251, Nº 6, p. 1293—1296, en ruso; Sidorenko A.F., Stechkin B.S. — Apuntes matemáticos, 1981, 29, Nº 5, p. 691—709, en ruso; Kashin B.S., Konyaguin S.V. — Obras del Instituto de Matemática de la A.C., 1981, 157, p. 64—67, en ruso.

6.126. El problema fue planteado por L. Mozer. Las estimaciones para la figura convexa que cubra un tornillo sin fin unitario véanse en [Poole G., Garriets J., Bull. Amer. Math. Soc., 1973, 79, Nº 2, p. 462—463]. Si se omite la condición de convexidad, la situación cambia. Aquí es de interés el caso de un tornillo sin fin de n eslabones (cada eslabón es un segmento). Si las longitudes de todos los eslabones son racionales, existe una región de recubrimiento de área tan pequeña como se quiera y de diámetro $\leqslant 2$ (K.A. Borovkov].

ANÁLISIS COMBINATORIO EN LOS CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

§ 1. Conjuntos parcialmente ordenados

7.6. El diagrama de Hasse se representa en la fig. 7.1'. El conjunto parcialmente ordenado a examinar tiene un único elemento maximal $\{a, b, c, d\}$ que es 1, y también un único elemento minimal $\varnothing$ que es 0. Como ejemplo de anticadenas intervienen: $\{a\}$, $\{bc\}$, $\{bd\}$ (anticadena no máxima y no saturada; $\{a\}$,

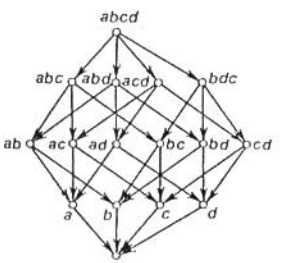


Fig. 7.1'.

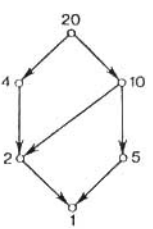


Fig. 7.2'.

$\{bc\}$, $\{bd\}$, $\{cd\}$ (anticadena no máxima, pero saturada); $\{ab\}$, $\{ac\}$, $\{ad\}$, $\{bc\}$, $\{bd\}$, $\{cd\}$ (anticadena máxima y saturada). Las cadenas aquí son, por ejemplo, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{ab\}$, $\{abc\}$, $\{abcd\}$ y $\varnothing$, $\{ab\}$, $\{abcd\}$. La primera de estas cadenas es máxima y saturada.

7.7. El diagrama de Hasse para divisores naturales del número 20, ordenados según la divisibilidad, se representa en la fig. 7.2'.

7.11. El diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado P (S) está representado en la fig. 7.3'. Los coátomos en P (5) son (1,4) y (2,3), y el átomo, $(1^3, 2)$. En total en P (2) hay 2 elementos, en P (3), 3, en P (4), 5, en P (5), 7, y en P (10), 42 elementos.

7.14. El conjunto $\mathfrak{D}$ (n) de todos los divisores del número natural n ordenado según la divisibilidad es, por ejemplo, un conjunto finito parcialmente ordenado; el conjunto N de todos los números naturales ordenados de un modo habitual es un conjunto linealmente ordenado y localmente finito; el conjunto N, ordenado según la divisibilidad, es un conjunto parcialmente ordenado localmente finito.

7.18. Un booleano $\mathfrak{P}$ (S) sobre un conjunto infinito S no es un conjunto parcialmente ordenado y localmente finito. Todos los subconjuntos de un solo elemento del conjunto S son átomos; el conjunto vacío es 0, y todo el conjunto S es 1. En el booleano $\mathfrak{P}$ (S_n) los subconjuntos A son tales que $|A| = n - 1$ son coátomos.

7.19. Véase el lema 1, § 1 del capítulo 8 [1].

7.20. Véase el teorema 1, § 1 del capítulo 8 [1].

7.22. Sea $\mathcal{P}(S_n)$ un booleano, en el cual $S_n = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Analicemos la familia de todos los vectores binarios n-dimensionales $\bar{a} = (a_1, \ldots, \ldots, a_n)$ con la relación de orden: $\bar{a} \leqslant \bar{b}$ cuando y sólo cuando $a_i \leqslant b_i$, cuales-

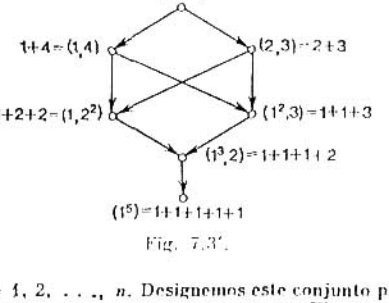


Fig. 7.3'.

quiera que sean $i = 1, 2, \ldots, n$. Designemos este conjunto parcialmente ordenado por $\sum_n$. No es difícil comprobar que $\mathcal{P}(S_n) \cong \sum_n$. En efecto, si $x \subseteq S_n$, pongamos entonces $\varphi(X) = (x_1, \ldots, x_n)$, donde

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{si } x_i \notin X; \\ 1, & \text{si } x_i \in X. \end{cases}$$

Es fácil ver que φ es un isomorfismo. Más, aún $\sum_n \cong \sum_1 x \ldots x \sum_1$, y, en virtud del problema 7.21, cada $\sum_1$ es isomorfo a la cadena de longitud 2.

7.26. Supongamos que $(\mathcal{D}(n), |)_k$ es un conjunto de divisores enteros positivos del número natural n el k-ésimo nivel del diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{D}(n), |)$. Se afirma que el número $d \in (\mathcal{D}(n), |)_k$ cuando y sólo cuando $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\beta_t}$, donde p_i son unos números primos y β_i son números naturales tales que $\sum_{i=1}^{t} \beta_i = k$.

7.32. Hágase uso del teorema de unicidad del desarrollo de un número en factores simples.

7.33. a) $|\mathcal{P}(S_n)| = 2^n$; $|\mathcal{D}(n)| = \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1)$ (hágase uso del resultado del problema 7.32).

El número de elementos en un belliano $(B(S_n), \subset)$ se llama *número de Bell* y se designa por $B(n)$.

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{1 \cdot \alpha_1 + \ldots + n\alpha_n = n \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k}} \frac{n!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n! (1!)^{\alpha_1} \ldots (n!)^{\alpha_n}};$$

$$|P(n)| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{1 \cdot \alpha_1 + \ldots + n\alpha_n = n \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k}} 1.$$

El número de subespacios del espacio vectorial n-dimensional $V_n(q)$ sobre un campo finito de q elementos se denomina *número de Galois* y se designa por $G(n, q)$.

$$G(n, q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^n-1)\dots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)\dots(q-1)}$$

b) $|(\mathcal{P}(S_n), \subseteq)_k| = \binom{n}{k}$;

$|(\mathcal{Z}(n), |)_k| = \binom{s+k-1}{k}$ (o al número de combinaciones con repitición de s elementos tomados de k a k), donde $k \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant s} \alpha_i$.

El número de elementos del k-ésimo nivel del diagrama de Hasse para el belliano $(B(S_n), \subset)$ se llama *número de Stirling de segundo* género y se denota por $S(n, k)$.

$$S(n, k) = \sum_{\substack{1\cdot\alpha_1+\dots+n\alpha_n=n \\ \alpha_1+\dots+\alpha_n=k}} \frac{n!}{\alpha_1!\dots\alpha_n!\,(1!)^{\alpha_1}\dots(n!)^{\alpha_n}};$$

De este modo, $B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$

$$|(P(n), \leqslant)_k| = \sum_{\substack{1\cdot\alpha_1+\dots+n\alpha_n=n \\ \alpha_1+\dots+\alpha_n=k}} 1;$$

$$|(V_n(q), \subset)_k| = \frac{(q^n-1)\dots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)\dots(q-1)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q.$$

El número $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ se llama coeficiente gaussiano q-binomial [Goldman J., Rota G.C. — In: Comb. Th. and its Appl. Collog. Math. Soc. J. Bolyai, 1970, No 2, p. 477—509].

c) En el booleano hay $n!$ cadenas máximas de 0 a 1; en efecto, en la cadena $\{S_n \supset S_{n-1} \dots \supset S_1 \supset \{\varnothing\}\}$ el primer término se elige por un método, el segundo, por n métodos y el tercero, por $(n-1)$ métodos, etc.

Sea $g(n)$ un número de cadenas máximas de 0 a 1 en el belliano $(B(S_n), \subset)$. Entonces, de la recurrencia $g(n) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r}\binom{n-2}{r-1} g(r)\,g(n-r)$ ó de la recurrencia $g(n) = \binom{n}{2} g(n-1)$ se deduce inmediatamente que $g(n) = n!\,(n-1)!/2^{n-1}$. Si $g(x, y)$ es el número de cadenas máximas en el belliano de x a y, entonces, por analogía tenemos que si $\pi \in (B(S_n), \subset)_k$, entonces $g(\pi, 1) = k!\,(k-1)!/2^{k-1}$; si $\pi \in (B(S_n), \subset)_{n_1, \dots, n_k}$ es un conjunto de todas las particiones del tipo $(n_1, \dots, n_k)$, entonces

$$g(0, \pi) = (n-k)!\prod_{i=1}^{k} n_i!/2^{n-k}.$$

El problema sobre el cálculo de $f(n)$, o sea del número de cadenas máximas de 0 a 1 en $(P(n), \leqslant)$, fue planteado por B. Morgan.

Existen tales constantes $c_1 > 0{,}31553$, $c_2 < 11{,}31371$ que $c_1^n n^{n/2} < f(n) < c_2^n n^{n/2}$. Si $f(p)$ es el número de cadenas máximas de 0 a p en $(P(n), \leqslant)$, entonces

$$f(2^h, 3^i) = \binom{h+2i}{i} - \binom{h+2i}{i-1};$$

$$f(2^h, 3^i, 4^1) = (i+1)\left\{\binom{h+2i+4}{i+2} - \binom{h+2i+4}{i+1}\right\};$$

$$f(2^h, 4^2) = (h+1)(h^3 + 19h^2 + 118h + 228)/12;$$

$$f(2^h, 3^1, 4^2) = (h+1)(h+6)(h^3 + 26h^2 + 225h + 636)/24;$$

$$f(2^h, 5^1) = (h+1)(h+3)(h+8)/6;$$

$$f(2^h, 3^1, 5^1) = (h+1)(3h^3 + 59h^2 + 358h + 648)/24;$$

$$f(2^h, 3^2, 5^1) = (h+1)(2h^4 + 63h^3 + 717h^2 + 3458h + 5800)/40;$$

$$f(2^h, 4^1, 5^1) = (h+1)(h^4 + 30h^3 + 323h^2 + 1458h + 2376)/24;$$

$$f(2^h, 6^1) = (h+1)(h+3)(h^2 + 22h + 88)/24;$$

$$f(2^h, 3^1, 6^1) = (h+1)(h^4 + 34h^3 + 386h^2 + 1784h + 2910)/30;$$

$$f(2^h, 7^1) = (h+1)(h^4 + 49h^3 + 606h^2 + 2764h + 3960)/120$$

[Erdös P., Guy R.K., Moon J.W. — J. London Math. Soc. (2), 1975, 9, p. 365—370].

Si $C(x, y)$ es el número de cadenas máximas de x a y en $(V_n(q), \subset)$, entonces el número $C(0, 1)$ de cadenas $V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1$ será, evidentemente, igual a

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix}_q \cdots \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n-1)\ \ldots\ (q-1)}{(q-1)^n}.$$

Análogamente,

$$C(x, y) = (q^{d(y)-d(x)} - 1)\ \ldots\ (q-1)/(q-1)^{d(y)-d(x)},$$

donde $d(x)$ es la dimensión del subespacio x.

d) De este modo, si $C(0, v, 1)$ es el número de cadenas máximas de 0 a 1, que pasan por $v \in (V_n(q), \subset)$, entonces

$$C(0, v, 1) = C(0, v)\, C(v, 1) =$$

$$= (q^{d(v)} - 1)\ \ldots\ (q-1)\,(q^{r-d(v)} - 1)\ \ldots\ (q-1)/(q-1)^n.$$

Para $x \in (\mathcal{P}(S_n), \subseteq)$ el número de cadenas máximas de 0 a 1, que pasan por x, es igual a $|x|!\,(n - |x|)!$.

Si $g(0, \pi, 1)$ es el número de cadenas máximas de 0 a 1, que pasan por $\pi \in (B(S_n), \subset)_{n_1, \ldots, n_k}$, entonces

$$g(0, \pi, 1) = g(0, \pi)\, g(\pi, 1) = k!\,(k-1)!\,(n-k)! \prod_{i=1}^{k} n_i!/2^{n-1}.$$

e) La anchura del booleano $(\mathcal{P}(S_n), \subseteq)$ es igual a $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ (véase el problema 7.20); si F es una anticadena del belliano $(B(S_n), \subset)$ y $F_{n_1, \ldots, n_k} = F \cap (B(S_n), \subset)_{n_1, \ldots, n_k}$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{\binom{n-1}{k-1}} \sum_{\substack{n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_k \geqslant 1 \\ n_1 + \ldots + n_k = n}} \frac{|F_{n_1, \ldots, n_k}|}{\binom{n}{n_1\ \ldots\ n_k}} \leqslant 1. \qquad (7.1')$$

Llamemos *especificación secundaria de la partición* $\pi \in (B(S_n), \subset)$ un sistema de números $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, de donde α_i es el número de bloques de π de volumen i, de suerte que $1 \cdot \alpha_1 + \ldots + n\alpha_n = n$. Por $(B(S_n), \subset)_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$ denotemos el conjunto de todas las particiones con especificación secundaria $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Entonces, si $F_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} = F \cap (B(S_n), \subset)_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$, la relación (7.1') puede escribirse en la forma siguiente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{\binom{n-1}{k-1}} \sum_{\substack{1\cdot\alpha_1+\ldots+n\alpha_n=n \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n=k}} \frac{|F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}|\,(1!)^{\alpha_1} \ldots (n!)^{\alpha_n}}{n!} \leqslant 1. \qquad (7.2')$$

Está claro que si F es una cadena no saturada, entonces (7.1') y (7.2') se realizan. Pongamos $F = (B(S_n), \subset)_k$, en este caso

$$|F_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}| = \begin{cases} \dfrac{n!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!\,(1!)^{\alpha_1} \ldots (n!)^{\alpha_n}}, & \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k, \\ 0 & \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \neq k; \end{cases}$$

por consiguiente, de (7.2') tenemos

$$C_k(n) = \sum_{\substack{1\cdot\alpha_1+\ldots+n\alpha_n=n \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n=k}} \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} = \binom{n-1}{k-1}, \qquad (7.3')$$

donde $C_k(n)$ es, evidentemente, el número de composiciones de n en k sumandos (la composición es una representación de un número natural en forma de una suma ordenada de números naturales).

Si F es anticadena máxima en $(V_n(q), \subset)$, entonces $|F| = \begin{bmatrix} n \\ [n/2] \end{bmatrix}_q$. Observemos que $\max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ [n/2] \end{bmatrix}_q$; en efecto, partiendo de la definición, tenemos

$$\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_q \geqslant \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \Leftrightarrow k \leqslant \frac{n-1}{2} \quad (q > 1);$$

si $F_k = F \cap (V_n(q), \subset)_k$ y $C(0, v, 1)$ es de d), entonces

$$1 \geqslant \sum_{v \in F} \frac{C(0, v, 1)}{C(0, 1)} = \sum_{k=0}^{n} F_k \frac{(q^k-1)\ldots(q-1)(q^{n-k}-1)\ldots(q-1)}{} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} |F_k| \frac{(q^k-1) \ldots (q-1)(q^{n-k}-1) \ldots (q-1)(q-1)^n}{(q^n-1) \ldots (q-1)(q-1)^k (q-1)^{n-k}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{|F_k|}{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q} \geqslant \frac{F}{\begin{bmatrix} n \\ [n/2] \end{bmatrix}_q}.$$

De anticadena máxima puede servir $(V_n(q), \subset)_{[n/2]}$.

La anticadena máxima en $(\mathscr{Z}(n), \mid)$ se realiza por el $\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2}\right]$ — nivel promedio en el diagrama de Hasse:

$$(\mathscr{Z}(n), \mid)\left[\sum_{i=1}^{n} r_i/2\right].$$

De Bruiju N., Van C.A., Tengbergen E.; Kruyswijk D.R. — Nieuw Arch. Wisk (2) 1952, 23, p. 191—193; Alexeev V.B. Análisis discreto, 1974, 26, p. 20—35, en ruso.

7.34. Véase el teorema 2 § 1 del cap. 8 [1].

7.35. Por ejemplo, el segmento $[0, 1]$ no es un conjunto bien ordenado, puesto que el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ no contiene elemento mínimo.

7.37. La condición de maximalidad en un conjunto bien ordenado P no siempre se cumple, pero sí se cumple sin falta en el conjunto P^*, dual respecto de P^*. Por ejemplo, un conjunto de números naturales con orden habitual satisface la condición de minimalidad, pero no satisface la de maximalidad.

7.38. Supongamos que se cumple la condición de minimalidad y $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$ es una cadena numerable de elementos de P. Sea a el elemento mínimo en el subconjunto $\{a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ del conjunto P. Entonces $a = a_k$ para cierto k, y, por lo tanto, $a_n = a = a_k$ para todo $n \geqslant k$. Viceversa, supongamos que se cumple la condición de rotura de las cadenas de crecientes y que B es un subconjunto no vacío del conjunto P. Entonces B contiene el elemento a_1, y si a_1 no es mínimo en B, existe un elemento $a_2 \in B$ tal que $a_1 > a_2$. Supongamos que existen tales $a_1, \ldots, a_n \in B$ que $a_1 > a_2, \ldots \ldots > a_n$. En este caso o bien a_n es mínimo en B, o bien existe un elemento $a_{n+1} \in B$ tal que $a_n > a_{n+1}$. De aquí concluimos que o bien B tiene elemento mínimo, o bien existe una cadena infinita $a_1 > a_2 \ldots > a_n > \ldots$ de elementos de B. Por hipótesis, resulta posible sólo el primer caso.

De un modo dual se establece que la condición de maximalidad es equivalente a la condición de rotura de las cadenas crecientes.

7.43. Véase el teorema 7 del § 1, capítulo 8 [1]

7.44. Véase el teorema 8 del § 1, capítulo 8 [1]

7.45. Aprovéchese el diagrama de Hasse teniendo en cuenta que él es, para cualquier conjunto finito parcialmente ordenado, un grafo orientado sin contornos. Entonces el teorema reformulado de Dilworth se enunciará así: el número máximo de vértices recíprocamente incomparables en un grafo orientado sin contornos es igual al número de cadenas en la descomposición mínima del grafo.

7.46. Póngase en correspondencia a la matriz $A = (a_{ij})$ el grafo bipartido $G(S \cup T, E)$, a título de subconjunto de vértices S tómese el conjunto de filas, como subconjunto de vértices T tómese el conjunto de columnas de la matriz y supóngase que $(t_j, s_i) \in E$ cuando y sólo cuando $a_{ij} \neq 0$; hágase uso del teorema de Konig. Por t_j y s_i se designan la j-ésima columna e i-ésima fila, respectivamente, de la matriz A.

7.47. A partir del grafo orientado $G(V, E)$ con dos vértices no adyacentes s y t construyamos un nuevo grafo orientado G'. Dividamos con este fin los vértices $v \in V \setminus \{s, t\}$ en dos vértices nuevos v' y v'', y unámoslos con un arco (v', v''). A continuación cada arco del grafo G con un vértice terminal $v \in V \setminus \{s, t\}$ se sustituye por un nuevo arco con el vértice terminal v', y cada arco con el vértice inicial $v \in V \setminus \{s, t\}$, por un arco, en el cual v'' figura como vértice inicial. El grafo G y el G', construido a partir de G, están representados en la fig. 7.4.'

La validez del análogo de vértice del teorema de Menger se desprende del teorema de Menger y de las siguientes afirmaciones que se demuestran con facilidad:

a) cada camino de s a t en el grafo G' corresponde al camino de s a t en el

grafo G, que se obtiene por contracción de todos los arcos del tipo (v', v''), y, viceversa, cada camino de s a t en el grafo G corresponde al camino de s a t en el grafo G', obtenido por partición de todos los vértices del camino distintos de s y t.

b) el número máximo de caminos de s a t, que no se intersecan en el grafo G' por los arcos, es igual al número máximo de caminos de s a t que no tienen vértices comunes.

c) dos caminos de s a t en el grafo G' no se intersecan por los arcos, cuando y sólo cuando los caminos en el grafo G que les corresponden no se intersecan por los vértices.

d) la potencia mínima de un conjunto (s, t)-separador de arcos del grafo G' es igual a la potencia mínima del conjunto (s, t)-separador de vértices del grafo G.

Fig. 7.4'.

7.48. Cerciórese de que si $\mathcal{D}(G)$ es un grafo orientado que se obtiene del grafo no orientado G sustituyendo en éste cada arista por un par de arcos opuestamente orientados e incidentes respecto a los mismos vértices, entonces

a) existe una correspondencia biunívoca entre las cadenas en el grafo G y en el grafo $\mathcal{D}(G)$;

b) para cualesquiera dos vértices s y t el número mínimo de aristas cuya eliminación en el grafo G rompe todas las cadenas de s a t, es igual al número mínimo de arcos cuya eliminación rompe todas las cadenas de s a t en el grafo orientado $\mathcal{D}(G)$. De aquí se deduce inmediatamente la validez de las variantes no orientadas del teorema de Menger y de su análogo de vértice.

7.49. Se deben añadir al grafo $G(V, E)$ dos vértices nuevos s^* y t^*, y también todas las aristas (arcos) del tipo (s^*, s), donde $s \in S$, y todas las aristas (arcos) del tipo (t, t^*), donde $t \in T$. En tal caso las afirmaciones del problema se desprenden de la validez de las afirmaciones de los problemas 7.47 y 7.48 para el grafo (orientado $G(V \cup \{s^*, t^*\}, E')$.

7.50. a) Al grafo bipartido $G(S \cup T, E)$ póngasele en correspondencia un conjunto parcialmente ordenado $S \cup T$ con una relación de orden $<$: $x < y$, cuando y sólo cuando $(x, y) \in E$; y hágase uso de las siguientes dos afirmaciones:

1) para cualquier descomposición $\mathcal{D}$ del conjunto $S \cup T$ en cadenas existe una combinación de pares M en el grafo $G(S \cup T, E)$, para la cual $|\mathcal{D}| + |M| = |S \cup T|$ (a título de M hace falta tomar el conjunto de todas las cadenas de $\mathcal{D}$ que constan de dos elementos);

2) para cada anticadena A del conjunto parcialmente ordenado $S \cup T$ existe un recubrimiento de vértice X de las aristas del grafo G, para el cual $|A| + |X| \leqslant |S \cup T|$, puesto que el complemento de la anticadena A en el conjunto $S \cup T$ contiene el recubrimiento de vértice X de las aristas del grafo G.

b) Unamos al grafo bipartido $G(S \cup T, E)$ dos vértices s^* y t^*, como también todos los arcos (s^*, s) para cualesquiera $s \in S$ y (t, t^*) para cualesquiera $t \in T$. Las aristas $(x, y) \in E$ vamos a considerarlas como arcos que están orientados en dirección de los vértices del conjunto S a los del conjunto T. Para el grafo obtenido definamos la función que caracteriza la capacidad de los arcos:

$$c(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ si } x = s^* \text{ o } y \in S, \text{ o bien } x \in T \text{ o } y = t^*; \\ \infty, \text{ si } (x, y) \in E. \end{cases}$$

Sea f un flujo máximo arbitrario expresado en números enteros de s^* a t^* en la red construida y supongamos que $(X, \overline{X})$, donde $\overline{X} = (S \cup T \cup \{s^*, t^*\}) \setminus X$ es un corte mínimo. Siendo definida la función de la capacidad de paso en los arcos, concluimos que el subconjunto de arcos $A = \{(x, y) \in E : f(x, y) = 1\}$ es una combinación de pares. El conjunto $\mathscr{Z} = (S \cap \overline{X}) \cup (T \cap X)$ es un conjunto de vértices (S, T)-separador, con la particularidad de que $\mathscr{Z}$ se encuentra en una correspondencia biunívoca con los arcos del corte mínimo $(X, \overline{X})$. Entonces, en virtud del teorema de Ford y Fulkerson, llegamos a que si v es la magnitud del flujo máximo f, entonces $|A| = |\mathscr{Z}| = v$. Por otra parte, es obvio que el número máximo de arcos de la combinación de pares G no es superior al número mínimo de vértices en cualquier conjunto de vértices (S, T)-separador. De este modo, la validez del teorema de Konig queda establecida.

c) para demostrar, hagamos uso de la variante del teorema de Menger aducida en el problema 7.49. Sea $G(S \cup T, E)$ un grafo bipartido sobre el conjunto de vértices $S \cup T$, $S \cap T = \varnothing$. Es evidente que el conjunto de vértices A cubre todas las aristas del grafo G cuando y sólo cuando A es un conjunto de vértices (S, T)-separador del grafo G. Para cualquier combinación de pares de n aristas en el grafo G pueden elegirse n cadenas de los vértices del conjunto S a los vértices del conjunto T, y, viceversa, k cadenas de S a T, que no tienen vértices comunes, contienen k aristas del grafo G que no se intersecan en los vértices. Por consiguiente, el número máximo de cadenas de S a T, que no tienen vértices comúnes, es igual al número máximo de aristas de la combinación de pares en el grafo G. Mas, en virtud del teorema de Menger del problema 7.49, el número máximo de cadenas de los vértices del conjunto S a los del conjunto T, que no tienen vértices comunes, es igual a la potencia mínima del conjunto de vértices (S, T)-separador.

d) Demostremos el análogo matricial del teorema de Konig (véase el problema 7.46), apoyándonos en el teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos. Sin restringir la generalidad de nuestros razonamientos podemos considerar que la matriz $A = (a_{ij})_{\substack{i=1-n \\ j=1-t}}$ está compuesta por 0 y 1. Las columnas y las filas de la matriz se llamarán, para mayor brevedad, *líneas*. Sea m un número mínimo de líneas que contienen todos los elementos no nulos y M, el número máximo de elementos no nulos no situados de dos en dos en una misma línea.

Es evidente que $m \geqslant M$, puesto que ninguna línea contiene más de un elemento de los M elegidos. Demostremos que $M \geqslant m$. Supongamos que r filas y s columnas de la matriz contienen todos los elementos no nulos, $r + s = m$, y que m es el número mínimo entre todos los posibles. Permutemos estas filas y columnas de un modo tal que ocupen los primeros lugares. A cada i-ésima fila, $i = 1, \ldots, r$, pongámosle en correspondencia el conjunto de números de las columnas j, para las cuales $a_{ij} = 1$ y $j > s$. Los conjuntos obtenidos satisfacen las condiciones del teorema de P. Hall. En efecto, si no fuera así, es decir, si k de dichos conjuntos contuvieran $v < k$ elementos, entonces estas k filas podrían ser sustituidas por v columnas y todas las unidades integrarían un número menor de líneas, lo que contradice la condición de minimalidad del número m. Por cuanto la condición del teorema de P. Hall se cumple, podemos elegir r representantes distintos de r filas, es decir, r unidades, de un modo tal que no hayan dos y más unidades en una fila y ninguna en las primeras s columnas. Razonando análogamente, podemos obtener s representantes de las primeras s columnas de un modo tal que las unidades estén ausentes en las primeras r filas. Este conjunto de $r + s = m$ unidades está elegido de un modo tal que no hay dos y más unidades dispuestas en una misma línea. Quiere decir, $m \leqslant M$, lo que se trataba de demostrarar.

7.51. a) Sea P un conjunto finito parcialmente ordenado. Construyamos un grafo bipartido $G(P \cup P', E)$ sobre el conjunto de vértices $P \cup P'$, donde P' es un ejemplar más del conjunto P. Además, los vértices x e y', donde y' es la copia de y en P', se unirán con las aristas, si y sólo si $x < y$ en el conjunto parcialmente ordenado P.

Sea M una combinación de pares máxima en el grafo $G(P \cup P', E)$, y sea X el recubrimiento de vértice mínimo de las aristas en el grafo G. Entonces, en virtud del teorema de Konig, tenemos $|M| = |X|$. Hagamos uso de dos afirmaciones auxiliares:

1) para cada combinación de pares M en el grafo $G(P \cup P', E)$ existe una descomposición $\mathcal{D}$ del conjunto parcialmente ordenado P en cadenas, para la cual $|M| + |\mathcal{D}| = n$, donde $n = |P|$;

2) si X es un conjunto de vértices, que cubren todas las aristas del grafo G de tal manera que ningún subconjunto suyo puede ya cubrir todas las aristas del grafo G, en el conjunto parcialmente ordenado P existe una anticadena A tal que $|X| + |A| = n$, donde $n = |P|$. Entonces $|\mathcal{D}| = |A|$, puesto que $|\mathcal{D}| = n - |M|$ y $|A| = n - |X|$. Pero, $|A| \leqslant |\mathcal{D}|$ para cualesquiera A, $\mathcal{D} \subseteq P$, dado que ningún par de elementos incomparables puede encontrarse en una misma cadena. Por consiguiente, $\max\limits_{A} |A| = \min\limits_{\mathcal{D}} |\mathcal{D}|$, lo que se trataba de demostrar.

b) Del teorema de Konig obtenemos el análogo de vértice del teorema de Menger para los grafos no orientados (véanse los problemas 7.47 y 7.48). Sea $G(V, E)$ un grafo no orientado arbitrario con dos vértices destacados no adyacentes $s, t \in V$. Si en $G(V, E)$ se tiene un sistema de k cadenas de s a t que no se intersecan por los vértices, entonces el conjunto de vértices (s, t)-separador ha de contener por lo menos un vértice de cada cadena, o bien, dicho de otro modo, la potencia de cada conjunto de vértices (s, t)-separador del grafo G debe ser no inferior a k. La desigualdad inversa se deduce de la siguiente afirmación: si $X \subseteq V$, donde $|X| = k$ es el conjunto de vértices (s, t)-separador mínimo del grafo G, en G existen k cadenas de s a t que no se intersecan por los vértices. Para demostrarlo véase el lema 5 § 1, capítulo 8 [1].

c) Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una familia de subconjuntos del conjunto X. Construyamos la (0,1)-matriz de incidencia. Supongamos que todas sus unidades están dispuestas en r filas y s columnas. Si $r + s = n$, entonces, de acuerdo con el teorema de Konig, existen n unidades de las cuales ningún par yace en una misma línea, y ellas forman el sistema de representantes distintos para $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Si, en cambio, $r + s < n$, entonces se perturba la validez del teorema de P. Hall, puesto que para $k = n - r$ filas las unidades se encontrarán solamente en $s < n - r = k$ columnas.

7.52. Sea $G(V, E)$ una red en la que s y t son entrada y salida, respectivamente. Supongamos que a cada arco de la red se le está designada una capacidad unitaria. En este caso la magnitud del flujo máximo en la red G es igual al número máximo de caminos de s a t que no se intersecan por los arcos. En efecto, sea v cierto flujo máximo en la red G y sea G^* el grafo orientado obtenido de G por supresión de todos los arcos libres del flujo v. Por cuanto las capacidades de todos los arcos de la red G son iguales a 1, entonces para todos los arcos e de la red G^* tenemos $f(e) = 1$. De aquí, para todos los arcos e de la red G^*, distintos de s y t, tenemos $|\Gamma(e)| = |\Gamma^{-1}(e)|$, y para la entrada s y la salida t tenemos: $|\Gamma(s)| = |\Gamma^{-1}(s)| = |\Gamma^{-1}(t)| = |\Gamma(t)| = v$. De aquí concluimos que en la red G^* y, por tanto, en la G existen v caminos de s a t que no se intersecan por los arcos. Por consiguiente, la magnitud v del flujo máximo en la red G no es superior al número máximo k de cadenas de s a t que no se intersecan por los arcos. Viceversa, sea $P_1, P_2, \ldots, P_k$ un juego en la red G tomado del número máximo de caminos de s a t, que no se intersecan por los arcos. Hallemos en G el flujo f del modo siguiente:

$$f(e) = \begin{cases} 1, \text{ si existe tal } i \text{ que } e \in P_i; \\ 0, \text{ en el caso contrario.} \end{cases}$$

Es evidente que la magnitud de tal flujo es igual a k, y la magnitud del flujo máximo no es inferior a k. De este modo, $v = k$.

Demostremos, ahora, que la capacidad del corte mínimo en la red G es igual al número mínimo de arcos cuya supresión rompe todas las cadenas que llevan de s a t. Suprimamos en G todos los arcos del corte mínimo que separa la en-

trada s de la salida t. En el grafo orientado obtenido no habrá ningún camino de s a t. Por eso la potencia del corte citado no es inferior al número mínimo de arcos, cuya eliminación rompe todas las cadenas de s a t. Es cierta también la relación inversa. En efecto, sea T un conjunto de arcos cuya supresión rompe todos los caminos de s a t en la red G y sea S un conjunto de vértices que se alcanzan desde la entrada s con ayuda de las cadenas privadas de los arcos pertenecientes al conjunto T. Está claro que $(S, V \setminus S)$ es un corte en la red G. Además, $(S, V \setminus S) \subseteq T$, Por eso la potencia del corte mínimo no sobrepasa $| (S, V \setminus S) |$ y, por consiguiente, $| T |$.

Del teorema de Ford y Fulkerson, como también de las relaciones obtenidas más arriba, obtenemos el teorema de Menger.

7.53. Sea $G(V, E)$ una red con la entrada s y salida t en cuyos arcos vienen dadas las capacidades de paso que se expresan en números enteros. Construyamos una nueva red G' sobre el mismo conjunto de vértices, al sustituir cada arco

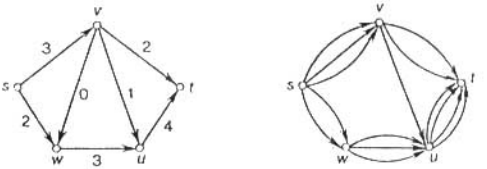


Fig. 7.5′.

$e \in E$ con la capacidad $c(e)$ por $c(e)$ arcos igualmente orientados y al borrar todos los arcos cuyas capacidades son nulas. La red G y la G', construida a base de G, están representadas en la fig. 7.5′, donde los números en los arcos del grafo G significan sus capacidades de paso.

Sean R y R' unos cortes que separan s de t en las redes G y G', respectivamente, suponiéndose que dichos cortes están definidos por un mismo conjunto de vértices. Entonces $| R' | = \sum_{e \in R} c(e)$, donde c indican las capacidades de los arcos de la red G. Así pues, al poner $N = \min_{R} \sum_{e \in R} c(e)$, obtendremos $| R' | \geqslant N$. Entonces, en virtud del teorema de Menger, existen N (y este número es máximo) cadenas de s a t en la red G', las cuales no se intersecan por los arcos. Sea $f(e)$ el número de arcos paralelos al arco e en la red G', ocupados por dichas cadenas. Entonces $f(e)$ representa un flujo de s a t de magnitud N en la red G. La implicación requerida queda demostrada.

7.54. Una parte de implicaciones que faltan o bien las demostraciones nuevas de las implicaciones ya establecidas pueden encontrarse en las obras [*I* (§ 8.1), 12 (capítulo 5), 14 (capítulo 5), 17, 18 (capítulo 8, § 1), 19 (capítulos 7, 12), 20, 21 (capítulo IV § 4), 22 (§ 15.7), 23, 24]. Así por ejemplo, en el artículo original de P. Hall (**Hall P.**, J. London Math. Soc, 1935, 10, p. 26—30) se indican las relaciones de su teorema con el de Konig (**Konig D.** Math. Annalen, 1916, 77, p. 453). En el artículo de **Mirsky L., Perfect H.J.** Math. And Appl., 1966, 15, p. 520—568 está dado el resumen de los teoremas de tipo de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos. Dilworth (véase **Dilworth R.P.** Ann of Math., 1950, 51, p. 161—166) señaló, al demostrar su teorema, la íntima relación existente entre el mismo y el teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos. Ford y Fulkerson [20] obtuvieron, a partir de su teorema sobre el flujo máximo expresado en números enteros y corte mínimo (**Ford L.R., Fulkerson D.R.** Canad. J. Math., 1956, 8, p. 399—404), los teoremas de Konig, Menger, Dilworth y P. Hall (véanse teorema 4.1, 4.2; capítulo II § 8, teorema 10.1 en [20]). Robacker (**Robacker J.T.** RAND Corporation, RM—1948, 1955) dedujo el teorema sobre el flujo máximo y corte mínimo a partir del teorema de

Menger. Harary [12] obtuvo, partiendo del teorema original de Menger (Menger K. Fund, Math., 1927, 10, p. 96—115), diferentes teoremas de tipo de Menger, entre los cuales figuran el teorema sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo, el teorema de König, de P. Hall, de Dilworth y otros. Ore en [19] expuso detalladamente las relaciones existentes entre los teoremas de Menger y Konig sobre las combinaciones de pares para grafos bipartidos.

§ 2. Retículos

7.58. Pongamos $a = \sup A$ y $a_\alpha = \sup A_\alpha$. Por cuanto $a \geqslant x_\alpha$ para todo $x_\alpha \in A$, entonces $a \geqslant a_\alpha$ para todo α. Si $v \geqslant a_\alpha$ para todo α, entonces $v \geqslant x$ para cada $x_\alpha \in A$, y, por tanto, $v \geqslant x$ para cualquier $x \in A$. Por eso, $v \geqslant a$, y de la definición obtenemos $\sup A = a = \sup a_\alpha = \sup \{\sup A_\alpha\}$.

7.60. Sea, por ejemplo, $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, b, c\}$ (fig. 7.6'), entonces $\sup_Q \{a, b\} = c$, $\sup_P \{a, b\}$ no existe.

7.65. El pentágono y el diamante son retículos. P (6) no es un retículo.

7.74. Muéstrese que $a = b = c = a \vee b \vee c$. En efecto, $a \vee b \vee c = (a \vee a) \vee b \vee c = a \vee (a \vee b \vee c) = a \vee (a \wedge (b \wedge c)) =$ (por la propiedad de absorción) $= a$.

7.75. Véase la demostración del teorema 21 § 2, cap. 8 [1].

7.76. Por razonamientos duales llegaremos a las mismas deducciones.

7.80. Véase el teorema 22 § 2, cap. 8 [1].

7.81. Los retículos completos son, por ejemplo, el segmento $[0, 1]$ con orden habitual; el booleano $\mathcal{P}(S_n)$, toda cadena finita.

7.82. Todo retículo completo tiene 0 y 1. Por eso el retículo de números enteros con orden corriente no es un retículo completo.

7.87. Si $\varphi : L_0 \to L_1$ es un homomorfismo, entonces $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ para cualesquiera $a, b \in L_0$. Supongamos que $a, b \in L_0$ y $a \leqslant b$ en L_0. Entonces $b = a \vee b$, y, por lo tanto, $\varphi(b) = \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$, es decir, $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ en L_1. De este modo, el homomorfismo φ es también una aplicación isótona. La afirmación inversa no es cierta. Por ejemplo, la aplicación isótona

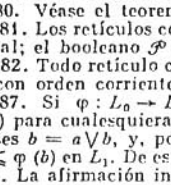


Fig. 7.6'.

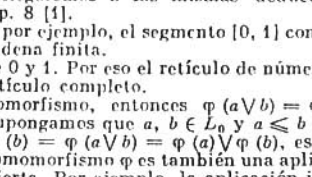


Fig. 7.7'.

$\varphi : L_0 \to L_1$, expuesta en la fig. 7.7', donde $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) = \varphi(b) = c$, $\varphi(1) = 1$, no es un homomorfismo, puesto que $\varphi(a \vee b) = \varphi(1) = 1 \neq c = c \vee c = \varphi(a) \vee \varphi(b)$.

7.90. Por cuanto $a \leqslant x$ para cualquier $x \in A$, entonces $\varphi(a) \leqslant \varphi(x) = x$ para todo $x \in A$, y, por consiguiente, $\varphi(a) \leqslant a$. La desigualdad inversa se deduce de la definición del operador de clausura.

7.91. Sea 1 la unidad de un retículo completo P. Por cuanto $\varphi(1) \geqslant 1 \geqslant \varphi(1)$, entonces 1 pertenece a L y es, evidentemente, la unidad de este conjunto parcialmente ordenado. Si A es un subconjunto no vacío del conjunto L, el elemento $a = \inf_P A$ será, de acuerdo con el problema 7.90, φ-cerrado. Por supuesto, $a \leqslant x$ para cualquier $x \in A$. Si $v \in L$ y $v \leqslant x$ para cualquier $x \in A$, entonces $v \leqslant a$, de suerte que $a = \inf_L A$. Ahora, del problema 7.86 concluimos que L es un retículo completo. Supongamos luego que $b = \sup_P A$ y $\overline{b} = \sup_L A$. Está claro que $\overline{b} \in L$ y $b \geqslant \overline{b}$, puesto que $\overline{b} \geqslant x$ para todos los $x \in A$. De aquí que $\overline{b} = \varphi(\overline{b}) \geqslant \varphi(b)$. La desigualdad $\overline{b} \leqslant \varphi(b)$ se verifica, puesto

que $\varphi(b) \geqslant \varphi(x) = x$ para todo $x \in A$, de modo que $b = \varphi(b)$, lo que se trataba de demostrar.

7.94. Un pentágono (véase la fig. 7.6), por ejemplo, no es un retículo modular. Efectivamente, $a > b$ pero $a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge c) \vee b$, puesto que $(a \wedge c) \vee \vee b = 0 \vee b = b$, y $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$.

7.96. 7.102. 7.109. *Véase los teoremas 23, 24 y 30 del § 2, capítulo 8 [1].*

7.97. Sea L un retículo modular. Entonces, según la definición, si $b \leqslant a$, tenemos $b \wedge (c \vee a) = (b \wedge c) \vee a$. Pero $b \wedge (c \vee a) = b \wedge (b \vee c) = b$, $(b \wedge c) \vee \vee a = (a \wedge c) \vee a = a$ (hemos aprovechado las igualdades de la condición y de la propiedad de absorción). Por consiguiente, $a = b$.

Viceversa, si L no es un retículo modular, entonces, en virtud del problema 7.96, el retículo L contiene un pentágono (véase fig. 7.6), en el cual $a \wedge c = \\ = b \wedge c = 0$, $a \vee c = b \vee c = 1$, pero $a \neq b$.

7.98. Está claro que φ y ψ son aplicaciones isótonas, con la particularidad de que $\psi(\varphi(x)) = a \wedge (x \vee b) = x \vee (a \wedge b) = x$ (en virtud de la identidad de modularidad y de la condición $x \geqslant a \wedge b$) y $\varphi(\psi(y)) = (a \wedge y) \vee b = \\ = (a \vee b) \vee y = y$ (en virtud de la identidad de modularidad y de la condición $y \leqslant a \vee b$). Por consiguiente φ y ψ son isomorfas.

7.99. Hágase uso de la afirmación del problema 7.98.

7.101 a) Tales son, por ejemplo, el pentágono (fig. 7.6), el diamante (fig. 7.7) y el retículo de un subespacio del espacio vectorial (véase el problema 7.29).

7.103. Sea L un retículo distributivo. Entonces para cualesquiera $a, b, c \in \\ \in L$ tenemos: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Pero $a \vee (b \wedge c) = a \vee \\ \vee (a \wedge c) = a$, $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c) = \\ = b \vee (b \wedge c) = b$. Por consiguiente, $a = b$.

Viceversa, si L es un retículo no distributivo, entonces, en virtud de los problemas 7.96 y 7.102, contiene un pentágono (fig. 7.6) o un diamante (fig. 7.7), en los cuales $a \wedge b = b \wedge c = 0$, $a \vee c = b \vee c = 1$, pero $a \neq b$.

7.105. Sea L un retículo modular, $a, b, c \in L$ y $b \prec a$. Si $a \vee c = b \vee c$, no hay nada que demostrar. En cambio, si $a \vee c \neq b \vee c$, entonces $a \not\leqslant b \vee c$, y por eso $a \wedge (b \vee c) = b$. Al aplicar el resultado del problema 7.98 a los elementos $b \vee c$ y a, llegamos a que $[b \vee c, a \vee c] \cong [b, a]$. Por cuanto $[b, a]$ es un intervalo simple, lo es también el intervalo $[b \vee c, a \vee c]$, es decir, $b \vee c \prec a \vee c$. De un modo dual obtenemos la condición de recubrimiento por arriba.

7.112. b) $\Rightarrow$ a) Sea $a \prec b$. Si $c \leqslant a$, o bien $a \vee c \geqslant b$, entonces $b \vee c \geqslant \\ \geqslant a \vee c$. Si en cambio, $c \not\leqslant a$ y $a \vee c \not\geqslant b$, entonces $b \wedge (a \vee c) = a$. Sea $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = a \not\leqslant c$ una cadena máxima en el intervalo $[a, a \vee c]$. Por cuanto $b \succ a$, $a_1 \succ a$ y $b \neq a_1$, tenemos $b \vee a \succ a_1$. Demostremos por inducción que $b \vee a_i \succ a_i$ para cualesquiera $i = 1, 2, \ldots \\ \ldots, n$. De este modo, $b \vee a_n \succ a_n$, es decir, $b \vee c \succ a \vee c$.

a) $\Rightarrow$ c). Esta afirmación es obvia, puesto que si $x \prec y$ en C, entonces $c \vee x \not\leqslant c \vee y$.

c) $\Rightarrow$ d). De la condición c) se deduce con toda evidencia que L es un retículo semimodular. Por eso, en virtud del problema 7.109, en L se cumple la condición de Jordan—Hölder. Sea $a \wedge b = c_0 \prec c_1 \prec \ldots \prec c_l = b$ una cadena máxima en el intervalo $[a \wedge b, b]$. De acuerdo con la condición de Jordan—Hölder, la longitud de esta cadena es igual a $r(b) - r(a \wedge b)$. Debido a c)

$$a \vee (a \wedge b) = a = (a \vee c_0) \not\leqslant (a \vee c_1) \not\leqslant \ldots \not\leqslant (a \vee c_l) = a \vee b$$

es también una cadena máxima, pero en el intervalo $[a, a \vee b]$. La longitud de esta cadena no sobrepasa la de la primera (algunos elementos pueden coincidir), es decir, no es superior al número $r(b) - r(a \wedge b)$. Por otra parte, de acuerdo con la condición de Jordan—Hölder, la longitud de la cadena citada es igual a $r(a \vee b) - r(a)$. Por eso $r(b) - r(a \wedge b) \geqslant r(a \vee b) - r(a)$, lo que se trataba de demostrar.

d) $\Rightarrow$ b). Sean $a,\ b \in L$ tales que $a > (a \wedge b)$, $b > (a \wedge b)$ y $a \neq b$. En virtud de los problemas 7.109 y 7.111, $r(a) = r(b) = r(a \wedge b) + 1$. Sustituyamos estas igualdades en la desigualdad de d) y obtengamos que $r(a \vee b) \leqslant r(a) + 1$ y $r(a \vee b) \leqslant r(b) + 1$. De aquí se deduce inmediatamente que $(a \vee b) \geqslant a$ y $(a \vee b) \geqslant b$. Mostremos que $a \vee b \neq a$. Por reducción al absurdo: sea $a \vee b = a$. Entonces $a > b$ y $a \wedge b = b$, mas esto contradice el hecho de que $b > (a \wedge b)$. Por consiguiente, $(a \vee b) > a$. De un modo análogo se comprueba que $(a \vee b) > b$.

7.115. Si $p \leqslant a$, entonces $p \vee a = a$, y, por consiguiente, $a \vee q = a \vee p$. Sea $p \not\leqslant a$. Por cuanto el retículo L es semimodular, tenemos $0 \prec p$ y $0 \prec q$, $a \not\geqslant a \vee p$, $a \not\prec a \vee q$. Por consiguiente, $a \prec a \vee q = a \vee p$.

7.116. Hemos demostrado que a) $\Rightarrow$ b) (problema 7.105), b) $\Rightarrow$ d) (problemas 7.112 y 7.113), a) $\Leftrightarrow$ c) (problema 7.96). Para dar por terminada la demostración de equivalencia de las afirmaciones, mostremos que d) $\Rightarrow$ c). Supongamos que L contiene un pentágono $\{0, a, b, c, 1\}$ (fig. 7.6) y que para L se cumple la condición d). Entonces $r(a) + r(c) = r(a \vee c) + r(a \wedge c) = r(1) + r(0) = r(b \vee c) + r(b \wedge c) = r(b) = r(c)$. De donde tenemos $r(a) = r(b)$, lo que es imposible, puesto que $b < a$. Hemos llegado a una contradicción con una suposición. Por consiguiente, L no contiene pentágonos.

7.117. En virtud de la afirmación d) del problema 7.112 y de la desigualdad $r(x) \geqslant 0$, para todo $x \in L$ obtenemos $r(x \vee y) \leqslant r(x) + r(y)$.
De aquí, por inducción tenemos

$$r(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \leqslant r(x_1) + r(x_2) + \ldots + r(x_n).$$

7.118. Es evidente que $p \wedge a \leqslant p$. Si $p \wedge a = p$, entonces $p \leqslant a$. Si $p \wedge a < p$, entonces $p \wedge a = 0$. En virtud del problema 7.117, $r(p \vee a) \leqslant r(p) + r(a) = 1 + r(a)$. Por cuanto $p \not\leqslant a$, tenemos $r(p \vee a) \neq r(a)$, de donde $r(p \vee a) = r(a) + 1$.

7.119. a) $\Rightarrow$ b). Si $x \in [a \wedge b, b]$, entonces $x \leqslant b$, y por eso $\varphi(a \vee x) = (a \vee x) \wedge b =$ (en virtud de aMb) $= x \vee (a \wedge b) = x$.

b) $\Rightarrow$ c). Sea $x, y \in [a \wedge b, b]$, $\psi(x) = \psi(y)$ y $x \neq y$, es decir, ψ no es biunívoca. Entonces $\psi(x \vee y) = \psi(x) = \psi(y)$ y $x < x \vee y$, o bien $y < x \vee y$. Sea, por ejemplo, $x < x \vee y$. Por la condición b) existe un elemento $z \in [a \vee b]$ tal que $\varphi(z) = x$. Por cuanto $z \geqslant x$ y $z \geqslant a$, concluimos que $z \geqslant x \vee a = \psi(x) = \psi(x \vee y)$. De este modo, $z \geqslant x \vee y$. Por eso $\varphi(z) \geqslant \varphi(x \vee y) = (x \vee y) \wedge b = x \vee y > x$, lo que es imposible. Esto significa que ψ es una aplicación biunívoca.

c) $\Rightarrow$ d). Sea ψ una aplicación biunívoca y para cierto $x \in [a \wedge b, b]$: $\varphi\psi(x) \neq x$, es decir, $x < (x \vee a) \wedge b = x'$. Por ser isótonas las aplicaciones φ y ψ, tenemos $\psi\varphi\psi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in [a \wedge b, b]$. Pero en tal caso $\psi(x') = \psi\varphi\psi(x) = \psi(x)$ y, por consiguiente, ψ no es una aplicación biunívoca. Esto quiere decir que $\varphi\psi(x) = x$ para cualquier $x \in [a \wedge b, b]$.

d) $\Rightarrow$ a). Sea $\varphi\psi(y) = y$ para todo $y \in [a \wedge b, b]$ y $x \leqslant b$. Pongamos que $y = x \vee (a \wedge b)$. Es evidente que $y \in [a \wedge b, b]$ y, por consiguiente, $\varphi\psi(y) = y$, pero $\varphi\psi(y) = (y \vee a) \wedge b = (x \vee (a \wedge b) \vee a) \wedge b = (x \vee a) \wedge b$, es decir, $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$. Quiere decir, aMb.

7.120. Sea L un retículo semimodular de longitud finita. Entonces, si C es una cadena máxima en el intervalo $[a \wedge b, b]$ de longitud $r(b) - r(a \wedge b)$, resulta que $\mathfrak{D} = \{a \vee x \mid x \in C\} = \{\psi(x), x \in C\}$ es la cadena máxima de longitud $r(a \vee b) - r(a)$ en el intervalo $[a, a \vee b]$ (véase el problema 7.112). de aMb se deduce que la aplicación ψ es biunívoca. Por consiguiente, $|\mathfrak{D}| = |C|$ y

$$r(b) - r(a \wedge b) = r(a \vee b) - r(a).$$

Viceversa, si la condición aMb es falsa, entonces, en virtud del problema 7.119, la aplicación ψ no es biunívoca y puede elegirse una cadena C que contenga los elementos $x, y \in [a \wedge b, b]$ tales que $x \neq y$ y $\psi(x) = \psi(y)$. En este caso $|\mathfrak{D}| < |C|$, de donde $r(b) - r(a \wedge b) > r(a \vee b) - r(a)$, lo que se trataba de demostrar.

7.122. La necesidad se deduce del problema 7.120. Demostremos la suficiencia sin suponer siquiera que la longitud del retículo L es finita. Supongamos que a, b, c son elementos del retículo M-simétrico L y que $b > a$. Si $b \vee c = a \vee c$, n hay nada que demostrar. Si $b \vee c > a \vee c$, entonces para un elemento $d = a \vee c$ tenemos $b \vee d = a$, $b \vee d = b \vee c$. Se debe demostrar que $b \vee d > d$. En efecto, sea $b \vee d > x \geqslant d$. Entonces $x \not\geqslant b$, por lo que $b \vee x = a$ y $b \vee x = b \vee d$. Por cuanto $b > b \vee x$, concluimos que φ aplica el intervalo $[x, x \vee b]$ sobre el intervalo $[x \vee b, b]$. En virtud del problema 7.119 tenemos xMb. Por cuanto bMx es M-simétrico, en este caso para cualquier $y \leqslant x$ se verifica la igualdad $y \vee (b \wedge x) = (y \vee b) \wedge x$. Sea $y = d$. Entonces $d = d \vee (b \wedge x) = (d \vee b) \wedge x = x$, es decir, $b \vee c > a \vee c$.

7.123. 7.124. Véanse los teoremas 32 y 33 del § 2, capítulo 8 [1].

7.126. Por cuanto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son independientes, entonces

$$r(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) = r(x_1) + r(x_2) + \ldots + r(x_n) \qquad (7.4')$$

Según la condición de semimodularidad para cualesquiera $x, y \in L$ tenemos

$$r(x) + r(y) \geqslant r(x \vee y) + r(x \wedge y).$$

Podemos, pues, escribir para cualesquiera elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$r(x_1 \vee \ldots \vee x_n) \leqslant r(x_1 \vee \ldots \vee x_{n-1}) + \\ + r(x_n) - r((x_1 \vee \ldots \vee x_{n-1}) \wedge x_n),$$

con la particularidad de que en virtud del problema 7.120, la igualdad (7.4') se verifica cuando y sólo cuando

a) $x_1, \ldots, x_{n-1}$ y x_n es un par modular;

b) $(x_1 \vee \ldots \vee x_{n-1}) \wedge x_n = 0$;

c) $x_1, \ldots, x_{n-1}$ son elementos independientes.

Procediendo de este modo en adelante, llegaremos, razonando análogamente para el conjunto independiente $x_1, \ldots, x_{n-1}$, a la afirmación del problema.

7.128. a) $\Rightarrow$ b). Es evidente.

b) $\Rightarrow$ c). Sea $(a_1 \vee \ldots \vee a_l) \wedge a_{l+1} = 0$ para todo $l = 1, 2, \ldots, n-1$. Demostremos por inducción respecto de l que $r(a_1 \vee \ldots \vee a_l) = l$. Para $l = 1$ la afirmación es verídica. Si $r(a_1 \vee \ldots \vee a_l) = l$, entonces, en vista de la semimodularidad resulta que $(a_1 \vee \ldots \vee a_l) \prec (a_1 \vee \ldots \vee a_l \vee a_{l+1})$ y, por eso, $r(a_1 \vee \ldots \vee a_l \vee a_{l+1}) = r(a_1 \vee \ldots \vee a_l) + 1 = l + 1$.

c) $\Rightarrow$ a). Para demostrar, mostremos que el conjunto de átomos X satisface a condición del problema 7.123. De la condición $r(a_1 \vee \ldots \vee a_n) = n$ tenemos que $r(\sup A) = |A|$, cualquier que sea el subconjunto $A \subseteq X$, de suerte que la aplicación φ: $A \to \sup A$ es biunívoca. La aplicación φ conserva, evidentemente, las uniones. Tomemos A, $B \subseteq X$ y sea $a = \inf\{\sup A, \sup B\}$, $b = \sup\{A \cap B\}$. Entonces $a \geqslant b$ y de la condición de semimodularidad resulta que

$$r(\sup A) + r(\sup B) \geqslant r(a) + r(\sup\{A \cup B\}),$$

de modo que $|A| + |B| \geqslant r(a) + |A \cup B|$. De aquí, $r(a) \leqslant |A| + |B| - |A \cup B| = |A \cap B|$. Por otra parte, $r(a) \geqslant r(b) = |A \cap B|$. Por consiguiente, $r(a) = r(b)$ y $a = b$, es decir, $\inf(\sup A, \sup B) = \sup(A \cap B)$.

7.130. Los complementos relativos de $b \in L$ en el intervalo $[e, 1]$ serán tanto elemento c, como elemento d (esto también sirve de respuesta a la última pregunta del problema.) El complemento relativo del elemento a en el intervalo $[0, b]$ será el elemento e, y, viceversa, de complemento relativo a e en el intervalo $[0, b]$ sirve el elemento a. El retículo L no es un retículo con complementos ni tampoco un retículo con complementos relativos, puesto que el elemento b, por ejemplo, carece de complemento en el intervalo $[0, 1]$.

7.131. No es cierto. Por ejemplo, el retículo semimodular en la fig. 7.11 b) es un retículo con complementos, pero no con complementos relativos.

7.132. El pentágono es un retículo no modular con complementos, pero no con complementos relativos.

7.134. Sea d un complemento del elemento a. Entonces el elemento $x = (d \vee b) \wedge c$ es un complemento relativo del elemento a en el intervalo $[b, c]$, a condición de que $b \leqslant a \leqslant c$. En efecto, $a \wedge x = a \wedge (d \vee b) \wedge c =$ = (por ser modular el retículo L y $a \geqslant b$) $= ((a \wedge d) \vee b) \wedge c = (0 \vee b) \wedge$ $\wedge c = b \wedge c = b$. En virtud de la dualidad, tenemos $a \vee x = c$.

7.135. Si $a > 0$, entonces, o bien a es un átomo, o bien $a > b > 0$ para cierto $b \in L$. Sea c un complemento relativo del elemento b en el intervalo $[0, a]$. Por inducción respecto de la longitud del intervalo $[0, a]$ se demuestra que los elementos b y c son ambos una unión de átomos. Pero, en tal caso esto es válido también para $a = b \vee c$. En virtud del problema 7.134, la afirmación es cierta también para los retículos modulares de longitud finita con complementos.

7.136. Por hipótesis del problema, b_{i+1} es un complemento relativo del elemento a_i en el intervalo $[0, a_{i+1}]$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Por consiguiente, $a_i \wedge b_{i+1} = 0$ y $a_i \vee b_{i+1} = a_{i+1}$. De la segunda igualdad y de la condición de que $a_1 = b_1$ llegamos a que $a_i = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_i$. Sustituyendo la expresión obtenida en la primera igualdad, obtenemos

$(b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_i) \wedge b_{i+1} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Entonces, en virtud de la afirmación del problema 7.124, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son independientes.

7.138. a) está demostrado en el problema 7.103. Demostremos b). Sean b_0 y b_1 los complementos de a en L. Entonces

$b_0 = b_0 \wedge 1 = b_0 \wedge (a \vee b_1) = (b_0 \wedge a) \vee (b_0 \wedge b_1) = 0 \vee (b_0 \wedge b_1)$

es decir, $b_0 \leqslant b_1$. Análogamente, $b_1 = b_0 \wedge b_1$, es decir, $b_1 \leqslant b_0$. Por eso, $b_0 = b_1$.

7.139. En vista del problema 7.138, para comprobar el cumplimiento de la primera identidad de De Morgan basta demostrar que

$$(a \wedge b) \wedge (a^* \vee b^*) = 0 \quad \text{y} \quad (a \wedge b) \vee (a^* \vee b^*) = 1.$$

La segunda identidad de De Morgan provendrá de la primera por razonamiento duales. Realicemos las operaciones correspondientes

$$(a \wedge b) \wedge (a^* \vee b^*) = \text{(por ser } L \text{ distributivo)} =$$

$$= (a \wedge b \wedge a^*) \vee (a \wedge b \wedge b^*) = (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0,$$

$$\text{y } (a \wedge b) \vee (a^* \vee b^*) = \text{(por ser distributivo el retículo } L) =$$

$$= (a \vee a^* \vee b^*) \wedge (b \vee a^* \vee b^*) = (1 \vee b^*) \wedge (a^* \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.$$

7.141. Demostremos que en cualquier retículo semimodular de longitud finita con complementos su unidad 1 es una unión de átomos. En efecto, si a es la unión de todos los átomos del retículo L, entonces $a^* = 0$, puesto que este elemento no contiene átomos. Entonces, $1 = a \vee a^* = a \vee 0 = a$, es decir, 1 es la unión de átomos.

Viceversa, sea L un retículo semimodular de longitud finita, en el cual su unidad 1 es una unión de átomos y $a \in L$. Entonces, existe una sucesión de átomos $p_1 \not\leqslant a$, $p_2 \leqslant a \vee p_1$, $\ldots$, tal que para cierto k se verifique $a \vee p_1 \vee \ldots \vee p_k = 1$, es decir, $r(a \vee p_1 \vee \ldots \vee p_k) = r(a) = k$, de donde $r(a \wedge (p_1 \vee \ldots \vee p_k)) \leqslant r(a) + r(p_1 \vee \ldots \vee p_k) - r(a \vee p_1 \vee \ldots$ $\ldots \vee p_k) = r(a) + k - (r(a) + k) = 0$. Por consiguiente, el elemento $a^* = p_1 \vee \ldots \vee p_k$ es un complemento de a y, más aún, a y a^* forman un par modular.

7.142. En el problema 7.135 ya hemos demostrado la validez de la afirmación del problema en una dirección. Demostremos su validez en otra dirección. Sea L un retículo semimodular, en el cual cada elemento $x > 0$ es una unión de átomos, y $a \leqslant x \leqslant b$. Entonces existe tal sucesión de átomos $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_n \leqslant b$ que $(x \vee p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k) \wedge p_{k+1} = 0$ y $x \vee p_1 \vee p_2 \vee$ $\ldots \vee p_n = b$. Si ponemos $z = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$, entonces, en virtud

de la condición de Jordan—Hölder, $r(a \vee z) = r(a) + n$, y $r(x \vee z) = r(a) + n = r(b)$. Sea $y = a \vee z$. Entonces $x \vee y = x \vee a \vee z = z \vee x = b$, mientras que $x \wedge y \geqslant a$ y $r(x \wedge y) \leqslant r(x) + r(a \vee z) + r(x \vee y) + r(x) + r(a) + n - (r(x) + n) = r(a)$. Esto quiere decir que $x \wedge y = a$, lo que se trataba de demostrar.

7.146. Hágase uso de las afirmaciones de los problemas 7.109 (condición de Jordan—Hölder para los retículos semimodulares) y 7.98 (sobre el isomorfismo de los intervalos $[a \wedge b, a]$ y $[b, a \vee b]$ en el retículo modular).

7.147. Hágase uso de los resultados del problema 7.146.

7.148. d) Todo intervalo de un retículo semimodular de longitud finita es, evidentemente, un retículo semimodular de longitud finita. Resta por demostrar que un intervalo arbitrario $[a, b]$ del retículo geométrico L es puntual. Así pues, sea $x \in [a, b]$, $x \neq a$ un elemento arbitrario. Veamos los átomos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del retículo L tales que $x = x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Entonces $x = x \vee a = (x_1 \vee a) \vee \ldots \vee (x_n \vee a)$. Por ser semimodular el retículo L, $x_i \vee a > a$, siempre que $x_i \wedge a = 0$. En efecto, si $x_i \wedge a = x_i$, entonces $x_i \vee a = a$. De este modo, $x = \sup \{(x_i \vee a) \mid x_i \not\leqslant a\}$ es una unión de átomos del intervalo $[a, b]$, lo que se trataba de demostrar.

7.149. Está claro que $b > a$ en L cuando y sólo cuando $b = a \vee p$ para cierto $p \in A$. Por eso, si $b > a$ y $c > a$ en L, el elemento $b \vee c = (a \vee p) \vee (a \vee q) = a \vee p \vee q$ cubre b y c en G, y, con mayor razón, en L. Esto significa que L satisface la condición del problema 7.114, es decir, es semimodular. Además, es obvio que L es un retículo puntual de longitud finita. Por consiguiente, L es un retículo geométrico.

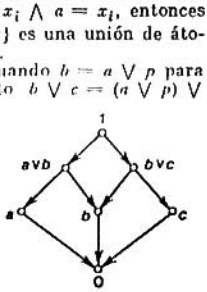


Fig. 7.8'.

7.150. El requisito de semimodularidad no puede ser despreciado. Cada retículo (no forzosamente semimodular) de longitud finita con complementos relativos es puntual (véase el problema 7.135). Mas, no en todo retículo puntual de longitud finita sus elementos poseen al menos un complemento (relativo). En la fig. 7.8' se aduce un ejemplo de tal retículo: el elemento b no tiene complementos.

7.151. Todo retículo L de longitud finita con complementos relativos es puntual (problema 7.135); la condición a) del problema es equivalente a la condición de semimodularidad del retículo L (problema 7.112) y cualquier retículo semimodular puntual es un retículo semimodular con complementos relativos (véase el problema 7.142). Por eso, si para los retículos puntuales L demostramos la equivalencia de las condiciones a), b), c) y d), el problema será resuelto.

Sea ahora L un retículo puntual de longitud finita.

a) $\Rightarrow$ d). Ya está demostrada (véase el problema 7.128).

d) $\Rightarrow$ b). Por cuanto L es un retículo puntual, es fácil encontrar átomos independientes $p_1, \ldots, p_n$ tales que $p_1 \vee \ldots \vee p_n = a$. Luego, por cuanto $a \vee q \leqslant a \vee p$, entonces $q \geqslant (a \vee p) \wedge q > 0$ y la sucesión $p_1, \ldots, p_n, q$ no es independiente. En tal caso no será independiente, en virtud de la condición d), la sucesión $p_1, \ldots, p_n, q, p$. Esto quiere decir que $p \geqslant (a \vee q) \wedge p > 0$. Por consiguiente, $p \leqslant a \vee q$ y $a \vee p \leqslant a \vee q$. De este modo, $a \vee p = a \vee q$.

c) $\Rightarrow$ b). En efecto, si $a < b \leqslant a \vee p$, entonces, por cuanto L es un retículo puntual, existe en él un átomo q que está contenido en b y no está contenido en a. Está claro que $a < a \vee q \leqslant b$. De acuerdo con la condición c) del problema, $a \vee p = b$, y, por tanto, $a \vee p$ cubre a.

b) $\Rightarrow$ a). En efecto, si a y b cubren c $(= a \wedge b)$ y L es un retículo puntual, existen los átomos p y q tales que $c < c \vee p \leqslant a$, $c < c \vee q \leqslant b$. De donde, $c \vee p = a$ y $c \vee q = b$. Por eso, $a \vee b = c \vee p \vee q$, y este elemento cubre, en virtud de la condición b), $a = c \vee p$ y $b = c \vee q$.

7.152. Sea L un retículo semimodular. Hace falta mostrar que para cual-

quier $a \in L$ y cualquier átomo $p \in L$, si $b \leqslant a$, resulta $a \wedge (p \vee b) = (a \wedge p) \vee b$. En vista del problema 7.118, $p \leqslant a$, o $a \vee p > a$. Si $p \leqslant a$, tenemos $p \wedge a = p$, de donde $(a \wedge p) \vee b = p \vee b$. Mas, ya que $b \leqslant a$, entonces $p \vee b \leqslant a$, y, por consiguiente, $a \wedge (p \vee b) = b \vee p$. Si, en cambio, $p \not\leqslant a$, entonces $p \not\leqslant b$, y, por consiguiente, $b \vee p > b$. Por eso, $a \wedge (b \vee p) = b = (a \wedge p) \vee b$, pues $p \wedge a = 0$ cuando $p \not\leqslant a$.

Viceversa, supongamos que pMa, es decir, $a \wedge (b \vee p) = (a \wedge p) \vee b$ para cualesquiera $b \leqslant a$ y todos los átomos p. Por cuanto cada elemento del retículo es, por hipótesis, una unión de átomos, será suficiente convencerse de que si p es un átomo, tendremos $p \leqslant a$ o bien $a \vee p > a$ en L, puesto que en este caso el retículo será, en virtud del problema 7.151, geométrico y, por consiguiente, semimodular. Sea $p \not\leqslant b$ y supongamos que existe un elemento c tal que $b \leqslant c \leqslant b \vee p$. Si $p \leqslant c$, entonces $b \vee p \leqslant c \leqslant b \vee p$, de donde $c = b \vee p$. En cambio, si p no está contenido en c, entonces $c = c \wedge (b \vee p) = b \vee (c \wedge p) = b$. De suerte que $b \vee p$ cubre b, lo que se trataba de demostrar.

7.156. Condición a). Es evidente. Demostremos b). Para un subconjunto arbitrario $B \subseteq A$ sea $b = \sup B$. Entonces $r(b) \leqslant r(b \vee p)$ para cada átomo $p \in A$, puesto que $b \leqslant b \vee p$. Por ser el retículo L semimodular, tenemos $r(b \vee p) + r(b \wedge p) \leqslant r(b) + r(p)$. De este modo, $r(b \vee p) \leqslant r(b) + 1$, o bien $r(B) \leqslant r(B \cup \{p\}) \leqslant r(B) + 1$.

Para demostrar la condición c), supongamos que $b \vee p = b$ y $b \vee q = b$. Por consiguiente, $b \vee p \vee q = b$. De aquí proviene c).

7.160. Supongamos que $a \sim b$ y elijamos entre todos los $x \in L$, que satisfacen las condiciones $a \vee x = b \vee x$, y $a \wedge x = b \wedge x = 0$, un elemento x, en el cual $r(x) = m$ es el mínimo de todos los valores posibles. Sean $x_1, \ldots, x_m$ los elementos de la base del intervalo $[0, x]$ del retículo L. Entonces $C = \{a, b, x_1, \ldots, x_m$ es un conjunto dependiente, puesto que $r(a \vee b \vee x) = r(a \vee x) = m + 1 < m + 2$. Mostremos que cada subconjunto del conjunto C es independiente. De aquí se deducirá que C es un ciclo que contiene a y b. Sea $x^i = x_1 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_m$, donde $i = 1, 2, \ldots, m$. Entonces de $b \leqslant a \vee x^i$ se desprende que $a \vee x^i = b \vee x^i$, puesto que $r(a \vee x^i) = 1 + (m - 1) = r(b \vee x^i)$, lo que contradice la elección del elemento x. De este modo, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$: $a \vee b \vee x^i = a \vee x = b \vee x$. Por cuanto $r(a \vee b \vee x^i) = m + 1$, cada subconjunto del conjunto C debe ser independiente.

Viceversa, sea $C = \{a, b, x_1, \ldots, x_m\}$ un ciclo del retículo L. Pongamos $x = x_1 \vee \ldots \vee x_m$. Entonces $a \vee x = a \vee b \vee x = b \vee x$, puesto que $r(a \vee x) = r(b \vee x) = r(a \vee b \vee x)$, y $a \wedge x = 0 = b \wedge x$, pues, $r(a \wedge x) \leqslant r(a) + r(x) - r(a \vee x) = 0$ y $r(b \wedge x) \leqslant r(b) = r(x) - r(b \vee x) = 0$.

7.161. La perspectividad es, obviamente, una relación binaria reflexiva y simétrica. Supongamos que la perspectividad no es transitiva. Valiéndonos de la caracterización del problema 7.160, mostremos que tal suposición conduce a una contradicción.

Elijamos en el retículo L unos ciclos C_1 y C_2 tales que el valor de $|C_1 \cup C_2|$ es mínimo entre todos los ciclos, para los cuales existen los átomos $a, b, c \in L$ tales que $a, b \in C_1$; $b, c \in C_2$, mas tanto a como b no están situados en ningún ciclo común. Entonces, en virtud de la condición c) del problema 7.158, se encontrará un ciclo C_1' tal que $a \in C_1' \not\subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{b\}$. Por cuanto $C_1 \setminus C_2$ es un conjunto independiente, resulta que $C_1' \not\subseteq C_1 \setminus C_2$. Por consiguiente, C_1' y C_2 se intersecan. De acuerdo con la elección de los ciclos C_1 y C_2, tenemos $|C_1' \cup C_2| = |C_1 \cup C_2|$ y, en particular, $C_1 \setminus C_2 \subseteq C_1'$. Análogamente, podemos encontrar tal ciclo C_2' que $c \in C_2' \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{b\}$. El ciclo C_2' debe intersecarse con $C_1 \setminus C_2$, y, por tanto, C_1 y C_2 tienen una intersección no vacía. Pero, entonces $|C_1' \cup C_2'| < |C_1 \cup C_2|$, lo que contradice la manera de elegir los ciclos C_1 y C_2.

7.163. Observemos que si $A \cup \{p\}$ es un conjunto de átomos del retículo

L tal que $p \leqslant \sup A$, entonces $p \sim a$ para cierto $a \in A$. En efecto, elijamos un subconjunto independiente mínimo $A' \subseteq A$ tal que $p \leqslant \sup A'$. En este caso $A' \cup \{p\}$ será el conjunto dependiente de átomos, en el cual cada uno de sus subconjuntos es independiente. Por eso $A' \cup \{p\}$ es un ciclo. Por consiguiente, $p \sim a$ para cada $a \in A'$. Se ha considerado el caso en que $p \notin A$. El caso de $p \in A$ es trivial.

Supongamos ahora que no todos los pares de átomos del retículo geométrico L son perspectivos. Elijamos un átomo arbitrario $a \in L$. Sea $[a] = \{b \in L \mid b \sim a\}$ y $z_1 = \sup [a]$. Mostremos que $[a]$ es un conjunto de todos los átomos del intervalo $[0, z_1]$. Luego, suponiendo que $z_2 \in L$ es igual a la unión de todos los átomos del retículo L, que no yacen en $[0, z_1]$, demostremos que $L = [0, z_1]$ y $L_2 = [0, z_2]$ nos dan la descomposición del retículo L. En efecto, elijamos un elemento arbitrario $x \in L$ y pongamos $x_1 = x \wedge z_1$ y $x_2 = x \wedge z_2$. Por cuanto el conjunto de átomos de los subretículos L_1 y L_2 no se intersecan y los átomos de los intervalos $[0, x_1]$ y $[0, x_2]$ se complementan en el conjunto de átomos del intervalo $[0, x]$, entonces $x = x_1 \vee x_2$. Sean X_1 y X_2 las bases de los intervalos $[0, x_1]$ y $[0, x_2]$, respectivamente. Si suponemos que $X_1 \cup X_2$ es un conjunto dependiente de átomos, entonces $X_1 \cup X_2$ debe contener un ciclo en el que figuran tanto los átomos de L_1, como los de L_2, lo que contradice el hecho de que ningún átomo de L_1 es perspectivo a ningún átomo de L_2. Entonces, $X_1 \cup X_2$ es el conjunto independiente de átomos y, por lo tanto, una base en $[0, x]$. De aquí, $r(x) = r(x_1) + r(x_2)$. Si $x_1' \leqslant z_1$ y $x_2' \leqslant z_2$ satisfacen la igualdad $x = x_1' \vee x_2'$, entonces $x_1' \leqslant x_1$ y $x_2' \leqslant x_2$. Además, $r(x_1') + r(x_2') \geqslant r(x) = r(x_1) + r(x_2)$. De donde $r(x_1') = r(x_1)$ y $r(x_2') = r(x_2)$, y, por consiguiente, $x_1' = x_1$ y $x_2' = x_2$.

Demostremos la afirmación del problema en dirección inversa. Supongamos que el retículo geométrico L es descomponible con los intervalos correspondientes L_1 y L_2. Elijamos unos átomos arbitrarios $a \in L_1$ y $b \in L_2$. Si a y b son perspectivos, puede encontrarse un elemento $x \in L$ tal que $a \vee x = b \vee x$ y $a \wedge x = b \wedge x = 0$. Pero en este caso la representación de $x = x_1 \vee x_2$ con relación a los intervalos L_1 y L_2 lleva consigo la igualdad $(a \vee x_1) \vee x_2 = x_1 \vee (x_2 \vee b)$. Por consiguiente, $a \vee x_1 = x_1$, y, de este modo, $a \leqslant x_1 \leqslant x$. Se ha obtenido una contradicción con lo que $a \wedge x = 0$, lo que se requería demostrar.

7.164. Hágase uso de la solución del problema 7.163.

7.165. Supóngase que la afirmación del problema no es cierta y x, y, z es uno de los contraejemplos con un valor mínimo de la función de rango $r(x \vee y)$. Pongamos que $u = y \vee z$. Entonces $r(u) = r(y) + 1$.

Si $u = x \vee y$, entonces, evidentemente, existe un átomo $x' \leqslant x$ tal que $u = x' \vee y$, es decir, $z \leqslant x' \vee y$.

Si $u < x \vee y$, pongamos $\bar{x} = u \wedge x$. Entonces $\bar{x} \vee y = (u \wedge x) \vee y = u \wedge (x \wedge y) = u$, puesto que M es un retículo modular.

Por cuanto $r(\bar{x} \vee y) < r(x \vee y)$, existe un átomo $x' \leqslant \bar{x} \leqslant x$ tal que $z \leqslant x' \vee y$, lo que contradice la manera de elegir el elemento $x \vee y$.

7.166. Sea $a \sim b$, es decir, $a \vee x = b \vee x = 1$, y $a \vee x = b \wedge x = 0$ para cierto $x \in M$. Entonces $r(x \wedge (a \vee b)) = r(a \vee b) + (r(x) - r(a \vee b \vee x)) = 2 - 1 = 1$, puesto que el elemento $a \vee b \vee x = 1$ cubre el elemento x en M. Por eso ha de existir un átomo $c \in M$ tal que $c \leqslant a \vee b$ y $c \leqslant x$, y, por cuanto $a \wedge x = b \wedge x = 0$, entonces $a \neq c \neq b$.

Viceversa, sea c un átomo del retículo M que es distinto de a y b y tal que $c \leqslant a \vee b$. Entonces c es un complemento relativo común de los átomos a y b en el intervalo $[0, a \vee b]$. En este caso el elemento $c \vee (a \vee b)^* = x$ será complemento común de a y b, cualquiera que sea el complemento $(a \vee b)^*$ del elemento $(a \vee b)$ en M. Por consiguiente, $a \sim b$, lo que se trataba de demostrar.

7.170. Hágase uso de las afirmaciones de los problemas 7.168 y 7.169

7.171. Es evidente que $PG1$ y $PG4$ se cumplen, con la particularidad de que $n = r(M)$. $PG3$ puede no cumplirse. $PG2$ es una consecuencia directa del pro-

blema 7.165, si ponemos $x = q \vee t$, $y = s$, y $z = u$, donde p, q, s, t, u son todos átomos del retículo modular geométrico M, lo que se muestra en la fig. 7.14.

7.172. Hágase uso de las afirmaciones que ofrecen los problemas 7.163, 7.171 y 7.172.

7.173. Sí, la respuesta se deduce inmediatamente de las afirmaciones que ofrecen los problemas 7.164 y 7.172.

7.177. Véase el teorema 37 del § 2, capítulo 8 [1].

7.179. (**Dowling T. A., Wilson R.M.** «Proc. Amer. Math. Soc.», 1975, 47, p. 504—512; Green C. «J. Cambin. Theory», 1970, p. 357—364).

7.180. (**Dilworth R.P.** «Ann of Math.», 1954, 60 (2), p. 359—364).

§ 3. Funciones de incidencia e inversión de Moebius

7.181. $f = f * \delta = \delta * f$. En efecto, $\forall x, y \in P$ tales que $x \leqslant y$ se tienen $(f * \delta)(x, y) = \sum_{z: x \leqslant z \leqslant y} f(x, z)\,\delta(z, y) = [\delta(z, y) \neq 0 \iff z = y] = f(x, y) \times$ $\times\, \delta(y, y) = f(x, y)$. Análogamente, $(\delta * f)(x, y) = \sum_{z: x \leqslant z \leqslant y} \delta(x, z)\, f(z, y) =$ $= \delta(x, x)\, f(x, y) = f(x, y)$. Sea $f, g, k \in A(P)$. Entonces $(f * (g * h))(x, y) =$ $= \sum_{z: x \leqslant z \leqslant y} f(x, z)\,(g * h)(z, y) = \sum_{z: x \leqslant z \leqslant y} f(x, z) \left(\sum_{t: z \leqslant t \leqslant y} g(z, t)\, h(t, y) \right) =$ $= \sum_{t: x \leqslant t \leqslant y} \left(\sum_{z: x \leqslant z < t} f(x, z)\, g(z, t)\, h(t, y) \right) = \sum_{t: x \leqslant t \leqslant y} (f * g)(x, t)\, h(t, y) =$ $= ((f * g) * h)(x, y)$.

7.183. Véase el teorema 47 del § 3, capítulo 8 [1].

7.184. Por cuanto $\zeta(x, x) = 1 \neq 0$ para cualquier $x \in P$, entonces, en virtud del problema 7.183, ζ tiene una función inversa μ, que es para ella una función inversa tanto izquierda, como derecha. Por consiguiente, tal definición de la función de Moebius es correcta.

7.185. La función buscada es un corolario directo de las fórmulas, obtenidas al resolver el problema 7.183, si se toma en consideración la condición de que $\mu(x, x) = 1$ para todo $x \in P$.

7.186. Dicha propiedad se cumple para todas las funciones de incidencia en consideración. Se comprueba directamente. Para comprobar la igualdad con relación a la función zeta y la de Moebius, hágase uso de los resultados del problema 7.183.

7.187. Para a) y b) hágase uso del binomio de Newton;

c) $\varkappa * \zeta(x, y) = \sum_{z: x \leqslant z \leqslant y} \varkappa(x, z)\, \zeta(z, y) = [\varkappa(x, z) \neq 0$ cuando y sólo cuando $x \prec z] = \sum_{z: x \prec z \leqslant y} \varkappa(x, z)\, \zeta(z, y) =$ puesto que $\zeta(z, y) = 1$ para todo $z \leqslant y) = \sum_{z: x \prec z \leqslant y} \varkappa(x, z)$. Pero, si $\varkappa(x, z) \neq 0$, entonces $\varkappa(x, z) = 1$. La validez de la identidad c) queda demostrada;

d) la identidad d) se obtiene de c) de un modo dual.

Para e), f), g), hágase uso de la siguiente fórmula

$$f^h(x, y) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_{h-1}: x \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ldots \leqslant z_{h-1} \leqslant y} f(x, z_1)\, f(z_1, z_2) \ldots f(z_{h-1}, y),$$

que se demuestra fácilmente por inducción, como también de los siguientes hechos fácilmente comprobados:

para e): $\eta(x, z_1) \cdot \eta(z_1, z_2) \cdot \ldots \cdot \eta(z_{h-1}, y) = 1$ cuando y sólo cuando

$$x < z_1 < z_2 < \ldots < z_{h-1} < y;$$

para f) $\varkappa(x, z_1) \varkappa(z_1, z_2) \ldots \varkappa(z_{h-1}, y) = 1$ cuando y sólo cuando

$$x -\!< z_1 -\!< x_2 -\!< \ldots -\!< z_{h-1} -\!< y;$$

para g) $\zeta(x, z)\, \zeta(z, y) = 1$ cuando y sólo cuando $x \leqslant z \leqslant y$.

7.188. Véase la demostración del teorema 48, § 8.3 en [1].

7.189. De $[x \wedge x, x \vee x] \cong [x \wedge x, x] \times [x \wedge x, x]$ tenemos que $f(x, x) = f(x, x) f(x, x)$. Por ser invertible la expresión, $f(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$. Por consiguiente, $f(x, x) = 1$.

7.190. En efecto, si $f, g \in A(P)$ y φ es un isomorfismo del intervalo $[x, y]$ en $[a, b]$, entonces

$$(f+g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = f(a, b) + g(a, b) = (f+g)(a, b);$$

$$(\alpha f)(x, y) = \alpha \cdot f(x, y) = \alpha \cdot f(a, b) = (\alpha f)(a, b);$$

$$(f * g)(x, y) = \sum_{z : x \leqslant z \leqslant y} f(x, z)\, g(z, y) = \sum_{z : x \leqslant z \leqslant y} f(\varphi(x), \varphi(z))\, g(\varphi(z), \varphi(y)) =$$

$$= \sum_{z : a = \varphi(x) \leqslant \varphi(z) \leqslant \varphi(y) = b} f(a = \varphi(x), \varphi(z))\, g(\varphi(z), b = \varphi(y)) = (f * g)(a, b).$$

7.191. Hágase uso del resultado del problema 7.183.

7.192. Todas las funciones de incidencia que se consideran pertenecen al álgebra estándar $S(P)$. La pertenencia de la función de Moebius se desprende directamente del problema 7.191.

7.193. Sean f y g las funciones invertibles multiplicativas de incidencia del álgebra estándar $S(P)$. Comprobemos que la función $f * g$ es también multiplicativa. Admitamos que

$$[x \wedge y, x \vee y] = [x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y],$$

entonces $(f * g)(x \wedge y, x \vee y) = \sum_{z : x \wedge y \leqslant z \leqslant x \vee y} f(x \wedge y, z)\, g(z, x \vee y) =$ (puesto que $[x \wedge y, z] \cong [x \wedge y, z \wedge x] \times [x \wedge y, z \wedge y]$, $[z, x \vee y] \cong [z, z \vee x] \times [z, z \vee y]$ y f, g son funciones multiplicativas) $= \sum_{z : x \wedge y \leqslant z \leqslant x \vee y} f(x \wedge y, z \wedge x)\, f(x \wedge y, z \wedge y) \times$

$\times\, g(z, z \vee x)\, g(z, z \vee y) =$ (puesto que $[z, z \vee x] \cong [z \wedge x, x]$, $[z, z \vee y] \cong [z \wedge y, y]$ y $f, g \in S(P)$) $= \sum_{z : x \wedge y \leqslant z \leqslant x \vee y} (f(x \wedge y, z \wedge x)\, g(z \wedge x, x))\, (f(x \wedge y, z \wedge y)\, g(z \wedge y, y))$ = (designemos por u y respectivamente v $z \wedge x$ y $z \wedge y$; entonces $x \wedge y \leqslant u \leqslant x$ y $x \wedge y \leqslant v \leqslant y$, puesto que $x \wedge (x \wedge y) = x \wedge y$, $y \wedge (x \wedge y) = x \wedge y$, $x \wedge (x \vee y) = x$, $y \wedge (x \vee y) = y$) $= \sum_{u : x \wedge y \leqslant u \leqslant x} f(x \wedge y, u)\, g(u, x) \sum_{v : x \wedge y \leqslant v \leqslant y} f(x \wedge y, v)\, g(v, y) =$

$= (f * g)(x \wedge y, x)\, (f * g)(x \wedge y, y)$, es decir, es una función multiplicativa.

Comprobemos que f^{-1} es también una función multiplicativa. Mostremos por inducción respecto de l que la condición de multiplicatividad está cumplida para todos los intervalos de longitud no superior a l. Cuando $l = 0$, esto es evidente. Supongamos que esta afirmación es válida para $l - 1$ y demostremos su validez para l. Examinemos un intervalo $[x \wedge y, x \vee y]$ de longitud l. Entonces

$$0 = \delta(x \wedge y, x \vee y) = (f^{-1} * f)(x \wedge y, x \vee y) = \sum_{z : x \wedge y \leqslant z \leqslant x \vee y} f^{-1}(x \wedge y, z)\, f(z, x \vee y) =$$

$$= \sum_{z : x \wedge y \leqslant z < x \vee y} f^{-1}(x \wedge y, z)\, f(z, x \vee y) + f^{-1}(x \wedge y, x \vee y)\, f(x \vee y, x \vee y) =$$

(en virtud de la suposición de inducción y teniendo presente que $f(x \vee y, x \vee y) = 1$) $= \sum_{z : x \wedge y \leqslant z < x \vee y} f^{-1}(x \wedge y, z \wedge x)\, f^{-1}(x \wedge y, z \wedge y)\, f(z, z \vee y)\, f(z, z \vee y) +$

$+ f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) =$ (en virtud de que $[z, z \vee x] \cong [z \wedge x, x]$, $[z, z \vee y] \cong$

$\cong [z \wedge y, y]$ y $f, f^{-1} \in S(P)$) $= \sum_{z : x \wedge y \leqslant z < x \vee y} f^{-1}(x \wedge y, z \wedge x)\, f(z \wedge x, x)\, f^{-1}(x \wedge y,$

$z \wedge y)\, f(z \wedge y,\ y) + f^{-1}(x \wedge y,\ x \vee y) =$ (designemos por u y respectivamente v $z \wedge x$ y $z \wedge y$ teniendo presente que $[x \wedge y,\ x \vee y] \cong [x \wedge y,\ x]\,x\,[x \wedge y,\ y]$ y $f(x,\ x) = 1$ para todo $x \in P) = \sum_{u:x \wedge y \leqslant u < x} f^{-1}(x \wedge y,\ u)\, f(u,\ x) \sum_{v:x \wedge y \leqslant v < y} f^{-1}(x \wedge y,\ v) \times$

$\times f(x,\ y) + f^{-1}(x \wedge y,\ x) \sum_{v:x \wedge y \leqslant v < y} f^{-1}(x \wedge y,\ v)\, f(v,\ y) + f^{-1}(x \wedge y,\ y) \times$

$\times \sum_{u:x \wedge y \leqslant u < x} f^{-1}(x \wedge y,\ u)\, f(u,\ x) + f^{-1}(x \wedge y,\ x \vee y) =$ (en virtud de las fórmulas que figuran en la resolución del problema 7.183 y de que $f(x,\ x) = 1$ para todo $x \in P) = (-f^{-1}(x \wedge y,\ x))\ (-f^{-1}(x \wedge y,\ y)) + f^{-1}(x \wedge y,\ x)\ (-f^{-1}(x \wedge y,\ y)) +$ $+ f^{-1}(x \wedge y,\ y)\ (-f^{-1}(x \wedge y,\ x)) + f^{-1}(x \wedge y,\ x \vee y)$. De este modo hemos llegado a que

$$f^{-1}(x \wedge y,\ x \vee y) - f^{-1}(x \wedge y,\ x)\, f^{-1}(x \wedge y,\ y) = 0$$

Por consiguiente,

$$f^{-1}(x \wedge y,\ x \vee y) = f^{-1}(x \wedge y,\ x)\, f^{-1}(x \wedge y,\ y),$$

y la demostración queda terminada.

7.194.

a) $\mu(a,\ b) = \begin{cases} 1, \text{ si } a = b; \\ 0, \text{ en el caso contrario;} \end{cases}$

b) $\forall n,\ m \in N$ tenemos

$$\mu(n,\ m) = \begin{cases} 1, \text{ si } n = m; \\ -1, \text{ si } m - n = 1; \\ 0, \text{ en todos los demás casos;} \end{cases}$$

c) hágase uso del resultado del problema 7.25 y de b). $\forall X,\ Y \in \mathcal{P}(S_n)$ tenemos

$$\mu(X,\ Y) = \begin{cases} (-1)^{|Y|-|X|}, \text{ si } X \subseteq Y \\ 0 \quad \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

d) Sea $\mathcal{D}(n)$ un conjunto de todos los divisores enteros no negativos del número natural n, ordenado según la divisibilidad. De acuerdo con el teorema de unicidad del desarrollo de un número en factores simples,

$$\mathcal{D}(n) \cong \mathcal{D}(p_1^{\alpha_1}) \times \mathcal{D}(p_2^{\alpha_2}) \times \ldots \times \mathcal{D}(p_s^{\alpha_s}).$$

Por consiguiente, resulta suficiente calcular la función de Moebius para $\mathcal{D}(p^\alpha)$, donde p es un número primo y α, un número entero. Pero el conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{D}(p^\alpha)$ es una anticadena $1 \mid p \mid p^2 \mid \ldots \mid p^\alpha$, isomorfa al subconjunto de números enteros $\{0, 1, 2, \ldots, \alpha\}$ de orden corriente, cuya función de Moebius ya está calculada en b). Por eso

$$\mu(p^i,\ p^j) = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j; \\ -1, \text{ si } j - i = 1 \\ 0, \text{ en todos los demás casos} \end{cases}$$

En virtud del problema 7.193,

$$\mu(l,\ m) = \begin{cases} 1, & \text{si } l = m; \\ (-1)^s, & \text{si } \frac{m}{l} = p_1 p_2 \ldots p_s, \text{ donde } p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s \text{ son números primos distintos dos a dos;} \\ 0, & \text{en todos los demás casos.} \end{cases}$$

e) Si $\pi \in B(S_n)$ tiene exactamente k bloques, entonces $\mu(\pi, 1) = (-1)^{k-1} \times (k-1)!$

f) $\forall X,\ Y \subseteq V_n$ tenemos

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{d(Y)-d(X)} q^{\binom{d(Y)-d(X)}{2}}, & \text{si } X \subseteq Y; \\ 0 \quad \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

donde $d(X)$ es la dimensión del subespacio X.

g) $\forall X,\ Y \subset \Pi_n$ tenemos

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{d(Y)-d(X)}, & \text{si } X \subset Y; \\ 0, \quad \text{en el caso contrario,} \end{cases}$$

donde $d(X)$ es la dimensión de la arista de X.

7.195. Fijemos x y veamos una suma

$$S = \sum_{y: y \leqslant x} g(y)\, \mu(y, x) = \sum_{y: y \leqslant x} \left(\sum_{z: z \leqslant y} f(z) \right) \mu(y, x).$$

Aquí, en lugar de $g(y)$ se puso su expresión en términos de $f(z)$. Cambiemos el orden de sumación y obtendremos:

$$S = \sum_{z: z \leqslant y} f(z) \sum_{y: y \leqslant x} \mu(y, x) = \sum_z f(z)\, \zeta(z, y) \sum_{y: y \leqslant x} \mu(y, x) = \sum_z f(z) \sum_{y: z \leqslant y \leqslant x} \zeta(z, y)\, \mu(y, x) = \sum_z f(z)\, \delta(z, x) = f(x),$$

lo que se trataba de demostrar.

7.198. Hágase uso de las fórmulas de inversión de Moebius y del resultado del problema 7.194 b).

7.199. Hágase uso de las fórmulas de inversión de Moebius y del resultado obtenido en el problema 7.194 c).

7.201. Sea $f, g \in A(P)$ y $F = (f_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $G = (g_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, donde $n = |P|$ y $f_{ij} = f(x_i, x_j)$, $g_{ij} = g(x_i, x_j)$. En este caso basta mostrar que si $h = f + g$, $t = \alpha \cdot f$ y $p = f * g$, donde $\alpha \in K$, entonces $H = F + G$, $T = \alpha \cdot F$ y $P = F \cdot G$. Las primeras dos igualdades son evidentes. Comprobemos la tercera. En efecto,

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik} g_{kj} = \sum_{k=1}^{n} f(x_i, x_k) \cdot g(x_k, x_j) = (\text{aprovechemos el que } f(x_i, x_j) = 0$$

cuando $x_k < x_i$, es decir, $k < i$, y $g(x_k, x_j) = 0$ cuando $x_k > x_j$, es decir, $k > j$) $= \sum_{k: i \leqslant k \leqslant j} f(x_i, x_k) \cdot g(x_k, x_j) = \sum_{x_k: x_i \leqslant x_k \leqslant x_j} f(x_i, x_k) \cdot g(x_k, x_j) = p(x_i, x_j)$.

7.202. La matriz triangular superior es invertible cuando y sólo cuando todos sus elementos que se disponen en la diagonal principal son distintos de cero. Las demás afirmaciones del problema no representan dificultades en demostrarlas. Indiquemos solamente que en la matriz H todos los valores propios son iguales a cero y la matriz es conmutativa.

7.203. Hágase uso de los problemas 7.187 y 7.202.

7.204. $$\sum_{z \in A: \varphi(z) = \varphi(y)} \mu_A(x, z) = \sum_{z \in A} \mu_A(x, z)\, \delta(\varphi(z), \varphi(y)) =$$

$$= \sum_{z \in A} \mu_A(x, z) \sum_{\varphi(w) \in Q} \zeta_Q(\varphi(z), \varphi(w))\, \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)) = \sum_{z \in A} \sum_{\varphi(w) \in Q} \mu_A(x, z) \times$$

$\times \zeta_A(\varphi(z), \varphi(w))\, \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y))$. En virtud de las propiedades del operador $z \leqslant \varphi(w)$ cuando y sólo cuando $\varphi(z) \leqslant \varphi(w)$. Por eso $\zeta_A(\varphi(z), \varphi(w)) = \zeta_A(z, \varphi(w))$. Aprovechemos este hecho y, además, alteremos el orden de

sumación. Entonces $\sum_{z\in A:\varphi(z)=\varphi(y)} \mu_A(x, z) = \sum_{\varphi(w)\in Q} \left(\sum_{z\in A} \mu_A(x, z)\, \zeta_A(z, \varphi(w)) \times \right.$

$\left. \times \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)) \right) = \sum_{\varphi(w)\in Q} \delta_A(x, \varphi(w))\, \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y))$. De aquí precisamente proviene la afirmación del problema, puesto que si $x = \varphi(x)$, entonces $\delta_A(x, \varphi(w)) = \delta_A(\varphi(x), \varphi(w)) = 1$ cuando y sólo cuando $\varphi(w) = \varphi(x)$. Si $x < \varphi(w)$, tenemos que $\delta_A(x, \varphi(w)) = 0$, puesto que $x \neq \varphi(w)$ para todo $w \in A$, por lo que $\varphi(w) \in Q$, y $x \in Q$, pues x no es un elemento φ-cerrado.

7.205. Póngase en las condiciones del problema 7.204. $A = \mathcal{P}(S)$, $x = \varnothing$, $y = S$ (está claro que $\varnothing$ será 0, y el conjunto 1 del conjunto parcialmente ordenado Q) y hágase uso de la función de Moebius para el booleano del problema 7.194.

7.206. a) Si 0 no es una intersección de coátomos del retículo L, entonces para todo $x \in L$ definamos el operador de la manera siguiente:

$$\varphi(x) = \inf \{c \in L \mid x \leqslant c \multimap 1\}.$$

Compruébese que φ es un operador de clausura y hágase uso de los resultados del problema 7.204.

El caso en que 1 no es una unión de átomos se obtiene por razonamientos duales.

Se procederá de un modo análogo para demostrar b).

Observemos que a) se deduce de b) de un modo trivial. En efecto, es suficiente en b) poner $x = 0$ e $y = 1$.

7.207. Las afirmaciones a), b), c) y e) son válidas. De contraejemplo para la afirmación d) sirve el retículo con complementos relativos en la fig. 7.9', en la cual $\mu(0, 1) = 0$. Los números que están al lado con los elementos x del retículo en la fig. 7.14' denotan valores de la función de Moebius $\mu(0, x)$.

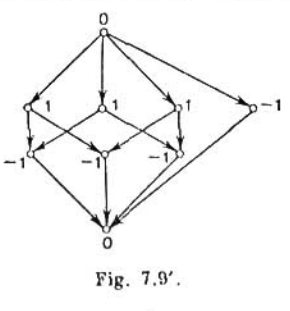


Fig. 7.9'.

7.208. En virtud del problema 7.206, de $\mu(0, 1) \neq 0$ para retículos distributivos y modulares se deduce que ellos son geométricos. Los retículos geométricos distributivos son álgebras de Boole de rango finito, y cada retículo geométrico modular indescomponible es una geometría proyectiva, la cual es isomorfa al retículo de los subespacios del espacio vectorial n-dimensional para $n \geqslant 4$ (problemas 7.169 y 7.172). Al haber aprovechado las funciones de Moebius para el booleano y para el retículo de un subespacio del espacio vectorial n-dimensional, calculadas en el problema 7.194 c) y f), obtenemos la afirmación del problema. Indiquemos que los casos de $n = 2$ y $n = 3$ para los retículos modulares geométricos requieren un análisis especial, pero ellos no son triviales.

7.209. Sin perder la generalidad, podemos considerar que $a < 1$. Sea $z \in L$ tal que $z \vee a = 1$. Para un $w \in L$ arbitrario, $w \leqslant z$, definamos la aplicación φ del modo siguiente:

$$\varphi(w) = \begin{cases} w, & \text{si } w \vee a < 1; \\ z, & \text{si } w \vee a = 1, \end{cases}$$

la cual será un operador de clausura en $[0, z]$. El conjunto de todos los elementos φ-cerrados de $[0, z]$ se denotará con Q. Entonces $Q = \{w \in L \mid w = z$, o bien $w < z$ y $w \vee a < 1$ simultáneamente$\}$. Es fácil comprobar que Q es un retículo.

En vista del problema 7.204, tenemos

$$\mu_Q(0, z) = \sum_{w \in L:\, \varphi(w) = \varphi(z) = z} \mu(0, w) = \sum_{w \in L:\, w \leqslant z \text{ y } w \vee a = 1} \mu(0, w) \qquad (7.5')$$

Supongamos que $F = \{w \in L \mid w \vee a = 1\}$ es un subconjunto parcialmente ordenado del conjunto L. Notemos que $z \in F$ y $\mu_F(x, y) = \mu(x, y)$ para todos los $x, y \in F$. Por eso

$$\mu_Q(0, z) = \sum_{w \in F:\, w \leqslant z} \mu_F(0, w).$$

Apliquemos la 1ª fórmula de inversión de Moebius (véase el problema 7.195) y obtendremos

$$\mu_F(0, z) = \sum_{w \in F:\, w \leqslant z} \mu_Q(0, w)\, \mu_F(w, z).$$

En particular, cuando $z = 1 \in F$, tenemos

$$\mu_F(0, 1) = \sum_{w \in F} \mu_Q(0, w)\, \mu_F(w, 1)$$

o bien

$$\mu(0, 1) = \sum_{w \in L:\, w \vee a = 1} \mu_Q(0, w)\, \mu(w, 1) \qquad (7.6')$$

Si en (7.6') sustituimos $\mu_Q(0, w)$ por su expresión de (7.5'), obtendremos

$$\mu(0, 1) = \sum_{w \in L:\, w \vee a = 1} \left(\sum_{v \in L:\, v \leqslant w \;\; v \vee a = 1} \mu(0, v) \right) \mu(w, 1) =$$

$$= \sum_{w \in L:\, w \vee a = 1} \; \sum_{v \in L:\, v \vee a = 1} \mu(0, v)\, \zeta(v, w)\, \mu(w, 1).$$

Si logramos mostrar que $\mu_Q(0, w) = 0$ para cualquier $w \in L$, para los cuales $w \vee a = 1$ y $w \wedge a > 0$, el problema quedará resuelto por completo. Por cuanto de $z \wedge a = 0$ y de $w \leqslant z$ se desprende que $w \wedge a = 0$, entonces $\mu_Q(0, w) \neq 0$ solo en los casos en que $w \vee a = 1$ y $w \wedge a = 0$, o cuando $w \in a^{\perp}$.

Si $w \in Q$, tenemos $w \vee (z \wedge a) \leqslant z$. Además, si $w \vee (z \wedge a) < z$, entonces $(w \vee (z \wedge a)) \vee a = w \vee a < 1$, y, por consiguiente, $w \vee (z \wedge a) \in Q$. Tomemos un coátomo arbitrario w del retículo Q. Tendremos $w \leqslant w \vee (z \wedge a) < z$. De donde, $w = w \vee (z \wedge a)$, o bien $z \wedge a \leqslant w$. De este modo, $z \wedge a$ es una intersección de todos los coátomos del retículo Q. En virtud del problema 7.206, $\mu_Q(0, z) = 0$, cuando $z \wedge a \neq 0$, es decir, cuando $z \wedge a > 0$.

7.210. Definamos, para todo $a \in L$, un operador de clausura φ: $\varphi(a) = a \vee z$. Supongamos que Q es un conjunto de todos los elementos φ-cerrados del retículo L. Entonces, en virtud del problema 7.204,

$$\sum_{t \in L:\, \varphi(t) = \varphi(y)} \mu(x, t) = \begin{cases} \mu_Q(\varphi(x), \varphi(y)), & \text{si } x = \varphi(x); \\ 0, & \text{si } x < \varphi(x). \end{cases}$$

Pero, $\varphi(x) = x \vee z = z$ y $\varphi(y) = y$, $\varphi(z) = z$. Así, pues,

$$\sum_{t \in L:\, t \vee z = y} \mu(x, t) = \begin{cases} \mu(x, y), & \text{si } z = x; \\ 0, & \text{si } x < z. \end{cases}$$

(Weisner L. «Trans. Amer. Math. Soc.», 1935, 38, p. 474—484).

7.211. Si en la fórmula de Weisner (problema 7.210) ponemos $x = 0$, $z = a$, $y = b$, obtendremos para el caso $a > 0$ la afirmación a) del problema. La afirmación b) se obtiene de a) por inversión del orden.

7.212. a) Se deduce directamente del problema 7.209.

b) En virtud del problema 7.97, el complemento del elemento a del retículo modular forma una anticadena. De aquí y del problema 7.209 concluimos que

$$\mu(0, 1) = \sum_{z \in a^{\perp}} \mu(0, z)\,\mu(z, 1).$$

Si $z \in a^{\perp}$, tenemos $z \wedge a = 0$, $a \vee z = 1$, y, en vista del problema 7.98, $[0 = a \wedge z, a] \cong [z, a \vee z = 1]$. De este modo,

$$\mu(0, 1) = \sum_{z \in a} \mu(0, z)\,\mu(0, a) = \mu(0, a) \sum_{z \in a^{\perp}} \mu(0, z).$$

c) La segunda parte de la afirmación c) es equivalente al siguiente hecho: si y cubre z, entonces las funciones $\mu(x, y)$ y $\mu(x, z)$ tienen signos opuestos. Cada intervalo $[x, y]$ del retículo geométrico es un retículo geométrico. Por eso, sin perder la generalidad, se puede considerar que $x = 0$, $y = 1$ y z es el coátomo del retículo L.

Demostremos la afirmación por inducción respecto de $r(L)$. Si $r(L) = 1$, entonces $\mu(0, 1) = -1$. Si $r(L) = 2$, entonces $\mu(0, 1) = 1$. Supongamos que la afirmación del problema es válida para todos los retículos L con $r(L) < n - 1$. Sea P un retículo geométrico con $r(P) = n$, y a, su átomo arbitrario. Todos los complementos del elemento a en P son coátomos del retículo P. Efectivamente, sea $x \in a^{\perp}$, es decir, $x \wedge a = 0$ y $a \vee x = 1$. Entonces, de la desigualdad para la función de rango en un retículo geométrico $r(x \vee a) + r(x \wedge a) \leqslant r(x) + r(a)$ obtenemos que si $a \vee x = 1$, entonces $n \leqslant r(x) + r(a)$, es decir, $r(x) \geqslant n - 1$. Los coátomos del retículo P forman una anticadena. Además, en virtud del problema 7.155, zMa para todo $z \in a^{\perp}$, es decir, $[0, a] \cong [z, 1]$. Por eso, del teorema de Crapo (problema 7.209) tenemos $\mu(0, 1) = \sum_{z \in a^{\perp}} \mu(0, z)\,\mu(z, 1) = \sum_{z \in a^{\perp}} \mu(0, z)\,\mu(0, a) = \mu(0, a) \sum_{z \in a^{\perp}} \mu(0, z) = -\sum_{z \in a^{\perp}} \mu(0, z)$. El rango de todos los intervalos $[0, z]$ es igual a $n-1$. Por eso, con arreglo a la suposición de inducción, todos los sumandos $\mu(0, z)$ son distintos de cero y tienen un mismo signo. Por consiguiente, $\mu(0, 1) \neq 0$ y tiene el signo opuesto al de $\mu(0, z)$, lo que se trataba de demostrar.

d) Hágase uso del valor de la función de Moebius del booleano (problema 7.194 c)) y de la afirmación de P. Hall (problema 7.206).

7.214. En virtud de la simetría, es suficiente comprobar sólo las primeras afirmaciones tanto en a), como en b). Sea $x \in P$, entonces, de acuerdo con la definición de la correspondencia de Galois, $x \leqslant \tau\sigma(x)$, y por eso, $\sigma(x) \geqslant \sigma\tau\sigma(x)$. Por otra parte, $\sigma(x) \in L$ y, por consiguiente, $\sigma(x) < \sigma\tau\sigma(x)$. Esto significa que $\sigma(x) = \sigma\tau\sigma(x)$ para cualquier $x \in P$.

Demostremos ahora la primera afirmación de b). De acuerdo con la definición de correspondencia de Galois, $\tau\sigma(x) \geqslant x$ para todo $x \in P$ y si $x \leqslant y$ en P, entonces $\sigma(x) \geqslant \sigma(y)$ en L, y $\tau\sigma(x) \leqslant \tau\sigma(y)$ en P, es decir, $\tau\sigma$ es una aplicación isótona. Además, en virtud de a), $\tau\sigma\tau\sigma = \tau\sigma$, lo que se trataba de demostrar.

7.215. Demostremos al principio que para cada $y \in P$ se verifica la identidad

$$\sum_{x \in P:\, x \geqslant y} \delta_P(\sigma(a),\ x) = \zeta_L(a,\ \sigma(y)) \tag{7.7'}$$

donde ζ es la función zeta del conjunto parcialmente ordenado L. La identidad

evidente (7.7') es equivalente a la siguiente afirmación: $\tau(a) \geqslant y$ en P cuando y sólo cuando $a \leqslant \sigma(y)$ en L. Lo último se desprende directamente de las propiedades de la correspondencia de Galois. En efecto, si $\tau(a) \geqslant y$ en P, entonces $a\tau(a) \leqslant \sigma(y)$ en L, pero $a \leqslant a\tau(a)$ en L, por consiguiente, $a \leqslant \sigma(y)$ en L. Análogamente la demostración se realiza en la dirección inversa.

Apliquemos la 2ª fórmula de inversión de Moebius (problema 7.196) a (7.7') respecto de P y obtendremos que

$$\delta_P(\tau(a), y) = \sum_{x \in P: x \geqslant y} \mu_P(y, x)\, \zeta_L(a, \sigma(x)).$$

Para $y = 0$ tenemos

$$\delta_P(\tau(a), 0) = \sum_{x \in P: x \geqslant 0} \mu_P(0, x)\, \zeta_L(a, \sigma(x)) \qquad (7.8')$$

La función $\delta_P(\tau(a), 0)$ toma el valor de 1 cuando y sólo cuando $\tau(a) = 0$, y, si se tiene presente la suposición del problema, cuando y sólo cuando $a = 1$. Para todos los demás valores de a tenemos $\delta_P(\tau(a), 0) = 0$. Por eso

$$\delta_P(\tau(a), 0 = 1 - \eta_P(a, 1).$$

Escribamos ahora (7.8') en la forma

$$1 - \eta_P(a, 1) = \zeta_L(a, \sigma(0)) + \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x)\, \zeta_L(a, \sigma(x)).$$

En virtud de la suposición del problema, $\zeta_L(a, \sigma(0)) = \zeta_L(a, 1)$, y $\zeta_L(a, 1) = 1$ para todo $a \in L$. Por consiguiente,

$$-\eta_P(a, 1) = \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x)\, \zeta_L(a, \sigma(x)).$$

Por cuanto $\zeta = \delta + \eta$, entonces $\mu = \delta - \mu\eta$ y, por consiguiente, considerando que $0 \neq 1$, tenemos

$$\mu_L(0, 1) = -\sum_{a \in L: 0 \leqslant a \leqslant 1} \mu_L(0, a)\, \eta_L(a, 1) = \sum_{a \in L: 0 \leqslant a \leqslant 1} \mu_L(0, a) \times$$

$$\times \left(\sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x)\, \zeta_L(a, \sigma(x)) \right) = \sum_{a \in L: 0 \leqslant a \leqslant 1} \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x)\, \mu_L(0, a) \times$$

$$\times \zeta_L(a, \sigma(x)) = \text{(cambiamos el orden de la sumación)} = \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \times$$

$$\times \sum_{a \in L: 0 \leqslant a \leqslant 1} \mu_L \times (0, a)\, \zeta_L(a, \sigma(x)).$$

Por cuanto $\sum_{a \in L: 0 \leqslant a \leqslant 1} \mu_L(0, a)\, \zeta_L(a, \sigma(x)) = \delta_L(0, \sigma(x))$, entonces

$$\mu_L(0, 1) = \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x)\, \delta_L(0, \sigma(x)) = \sum_{x \in P: \sigma(x) = 0} \mu_P(0, x).$$

Además,

$$\delta_L(0, \sigma(x)) = \zeta_L(\sigma(x), 0).$$

Por eso,

$$\mu_L(0, 1) = \sum_{x \in P : x > 0} \mu_P(0, x)\, \zeta_L(\sigma(x), 0).$$

La demostración de la afirmación del problema está completamente terminada.

7.126. En lugar de P examínese un conjunto parcialmente ordenado P^*, dual respecto de P, y hágase uso del problema 7.215.

§ 4. Problemas mixtos sobre conjuntos parcialmente ordenados

7.219. Observemos que si, realizados d desplazamientos de todas las n cuentas de vidrio «por un círculo», se repite la «configuración de colores», d será divisor del número n. El número menor de desplazamientos que conducen a la configuración de partida lleva el nombre de *período*. Sea una cadena de longitud n y período d. Obtendremos, al realizar los desplazamientos, d diferentes cadenas, incluida la inicial. Uniendo los extremos de cada una de estas cadenas, obtenemos un mismo collar. Notemos que solamente estas d cadenas nos dan el collar dado.

Sea $M(n)$ el número de collares de longitud n y sea $m(d)$ el número de cadenas de período d. Entonces $M(n) = \sum_{d:\, d|n} \frac{1}{d} m(d)$ y $M(n) = k^n$. Aplicando la 1ª fórmula de inversión de Moebius (problema 7.195), obtenemos para $n = d$:

$$m(d) = \sum_{x:\, x|d} \mu\left(\frac{d}{x}\right) k^x.$$

De aquí $M(n) = \sum_{d:\, d|n} \frac{1}{d} \left(\sum_{x:\, x|d} \mu\left(\frac{d}{x}\right) k^x \right) = \frac{1}{n} \sum_{d:\, d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) k^d$, donde $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ es la función de Euler; $\mu(x)$ es la función de Moebius de la teoría de números que está ligada con la función de Moebius de un conjunto parcialmente ordenado de divisores de un número natural, ordenados según la divisibilidad, de la manera siguiente:

$$\mu(x) = \mu(l, m) = \mu\left(\frac{m}{l}\right), \quad \text{si } x = \frac{m}{l}$$

7.220. Muestrese que el problema de partida es equivalente a la búsqueda del número de permutaciones de σ elementos $\{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $\sigma(i) \neq i$ y $\sigma(i-1) \neq i$ para $i = 2, 3, \ldots, n$ y $\sigma(1) \neq 1$, $\sigma(n) \neq 1$. La respuesta es:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, 2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

7.222. Todo grafo G puede ser pintado empleando $\lambda^{|V(G)|}$ procedimientos, donde $V(G)$ es el conjunto de vértices del grafo G. Además, cada coloración de este tipo será correcta exactamente para un solo subgrafo $H \in L(G)$, obtenido de G por contracción de las aristas con vértices igualmente pintados. De este modo,

$$\lambda^{|V(G)|} = \sum_{H \in L(G) : H \leqslant G} P(H, \lambda).$$

Aplicando la 1ª fórmula de inversión de Moebius (problema 7.195), tendremos

$$P(G;\ \lambda) = \sum_{H \in L(G):\, H \leqslant G} \lambda^{|V(H)|} |\mu(H,\ G)|,$$

lo que se trataba de demostrar.

7.223. a) $\chi(\mathcal{P}(S_n);\ x) = (x-1)^n$;

b) $\chi(\mathcal{B}(n);\ x) = x(x-1)^s$, si $n = p_1 \ldots p_s$, donde p_i son números primos diferentes.

7.224. Hágase uso del problema 7.193.

7.226. k) Escríbase la identidad $\zeta^2 * \mu = \zeta$ en el álgebra de incidencia del retículo $(V_n, \subseteq)$ y hágase uso del valor de la función de Moebius calculado en el problema 7.194 f).

7.227. Por ser modular el retículo $L(V_n)$, de $r(a) = n-1$ y $a \wedge x = 0$ se desprende que $r(x) = r(x \vee a) + r(x \wedge a) - r(a) = r(x \vee a) + 0 - (n-1) \leqslant n - (n-1) = 1$. De este modo, $r(x) = 1$, es decir, x es un átomo en $L(V_n)$ o bien un subespacio unidimensional en V_n. Por cuanto a es un subespacio $(n-1)$-dimensional de V_n, entonces $|a| = q^{n-1}$. Por consiguiente, el número de vectores de V_n, no situados en a, es igual a $q^n - q^{n-1}$. Cada subespacio unidimensional contiene exactamente $(q-1)$ vectores. Por eso, para cada subespacio a de dimensión $n-1$ existen $\dfrac{q^n - q^{n-1}}{q-1} = q^{n-1}$ diferentes subespacios unidimensionales x tales que $x \wedge a$. Así pues, el número buscado es igual a q^{n-1}.

7.228. Si $F \subset (V_n\ (q), \subset)$ es tal que $\forall A,\ B \in F,\ A \cap B = \varnothing$, entonces para $n \geqslant 2k+1$ máx $|F| = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$.

Si $F \subset (V_n\ (q), \subset)$ es tal que $\forall A,\ B \in F$, dim $(A \cap B) \geqslant r$, entonces para $n \geqslant 2k+2$ o para $n \geqslant 2k+1$ y $q \geqslant 3$

$$\text{máx } |F| = \begin{bmatrix} n-r \\ k-r \end{bmatrix}_q$$

[**Hsieh W.N.** Discret. Math., 1975, 12, No 1, p. 1—16.]

7.229. Sean $d_1, \ldots, d_m$ diferentes del número $N = p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n}$, entre los cuales no hay ningún par de divisores recíprocamente primos. En este caso si $R = \prod_{i=1}^{n} r_i$, entonces máx $m = \dfrac{1}{2} \sum$ máx $\left\{ \prod_{j=1}^{h} r_{i_j},\ R \Big/ \prod_{j=1}^{h} r_{i_j} \right\}$, donde la sumación se realiza respecto de todos los subconjuntos $\{i_1, \ldots, i_k\}$ del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. En particular, si $N = p_1^r \ldots p_n^r$, entonces

$$\text{máx } m = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=(n+1)/2}^{n} \binom{n}{k} r^k, & n \equiv 1 \ (\text{mód } 2), \\ \dfrac{1}{2}\binom{n}{n/2} r^{n/2} + \displaystyle\sum_{k=n/2+1}^{n} \binom{n}{k} r^k, & n \equiv 0 \ (\text{mód } 2), \end{cases}$$

lo que nos da, para $r = 1$, 2^{n-1} [**Erdös P., Schonheim J.**—In: Comb. Theory and its Appl., Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 4, Balatonfüred N — H P. C. 1971, p. 369—376].

7.230. Sea $\pi = (A_1, \ldots, A_{b(\pi)}) \in \mathcal{B}(S_n)$, $|A_i| = n_i$ para $i = 1, \ldots, b(\pi)$ y $\sum_{i=1}^{b(\pi)} n_i = n$. Cada partición $\sigma \in [\pi, 1]$ del belliano $\mathcal{B}(S_n)$ se obtiene de π me-

diante la reunión de dos o más bloques. Por eso, $[\pi, 1] \cong \mathscr{B}(S_{b(\pi)})$. Por otra parte, cualquier partición $\tau \in [0, \pi]$ puede obtenerse fraccionando los bloques de partición π en partes menores. De este modo, $[0, \pi] \cong \cong \prod_{i=1}^{b(\pi)} \mathscr{B}(S_n)$. De aquí precisamente se deduce la afirmación del problema.

7.231. Hagamos uso del problema 2.95. Cada permutación del tipo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ engendra la única partición del mismo tipo, a saber, la partición en ciclos. Viceversa, a toda partición $\pi \in \mathscr{B}(S_n)$ del tipo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ le corresponden $(1!)^{\alpha_1} (2!)^{\alpha_2} \ldots [(n-1)!]^{\alpha_n}$ permutaciones cuya descomposición cíclica coincide con π. Por consiguiente, el número buscado es igual a

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} (i^{\alpha_i} \alpha_i!)} : \prod_{i=2}^{n} [(i-1)!]^{\alpha_i} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} [\alpha_i! (i!)^{\alpha_i}]}.$$

7.232. En virtud del problema 7.230, $[0, \pi] \cong \prod_{i=1}^{b(\pi)} \mathscr{B}(S_{n_i})$ y $[\pi, 1] \cong \cong \mathscr{B}(S_{b(\pi)})$. De aquí

$$|[0, \pi]| = \prod_{i=1}^{b(\pi)} B(n_i) \text{ y } |[\pi, 1]| = B(b(\pi)),$$

donde $B(n)$ son los números de Bell.

7.233. I) Escríbase la identidad $\zeta^2 * \mu = \varepsilon$ en el álgebra de incidencia del belliano $B(S_n)$ y hágase uso del valor de la función de Moebius calculado en el problema 7.194 e).

7.234. El número de todos los grafos marcados simples con n vértices es igual a $2^{\binom{n}{2}}$. Sea S_n un conjunto de vértices del grafo y $\pi \in \mathscr{B}(S_n)$, donde $\mathscr{B}(S_n)$ es un belliano. Supongamos que $f(\pi)$ es el número de grafos marcados sobre S_n, cuyos componentes conexos definen la partición del conjunto S en bloques de π. Entonces si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es el tipo de la partición σ, tenemos

$$\sum_{\pi \in \mathscr{B}(S_n): \pi \leqslant \sigma} f(\pi) = \prod_{i=2}^{n} 2^{\binom{i}{2} \alpha_i} = 2^{\sum_{i=2}^{n} \left(\alpha_i \binom{i}{2}\right)}.$$

Al aplicar la 1ª fórmula de inversión de Moebius (problema 7.195), obtendremos

$$f(\sigma) = \sum_{\pi \in \mathscr{B}(S_n): \pi \leqslant \sigma} 2^{\sum_{i=2}^{n} \left[b_i \binom{i}{2}\right]} \mu(\pi, \sigma),$$

donde $(b_1, \ldots, b_n)$ es el tipo de la partición π.

El número de grafos conexos simples es igual a $f(1)$, donde 1 es la unidad del belliano (S_n). De este modo

$$f(1) = \sum_{\pi \in \mathscr{B}(S_n)} \mu(\pi, 1)\, 2^{\sum_{i=2}^{n} \left(b_i \binom{i}{2}\right)},$$

y, en virtud del problema 7.194, e),

$$\mu(\pi, 1) = (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)-1} \left(\left(\sum_{i=1}^{n}\right)-1\right)!.$$

Sustituyendo la expresión para la función de Moebius en $f(1)$, obtenemos la identidad buscada.

7.236. Por ser el retículo K distributivo, para todo $x \in [a \wedge b, a \vee b]$ tenemos que $(x \wedge a) \vee (x \wedge b) = x \wedge (a \vee b) = x$ y $(x \vee a) \wedge (x \vee b) = x \vee (a \wedge b) = x$. Además, $(x \wedge a) \wedge (x \wedge b) = x \wedge (a \wedge b) = a \wedge b$ y $(x \vee a) \vee (x \vee b) = x \vee (a \vee b) = a \vee b$. Por eso, por ser la función μ submodular, para todo $x \in [a \wedge b, a \vee b]$ tenemos $\mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) \geqslant \mu((x \wedge a) \vee (x \wedge b)) + \mu((x \wedge a) \wedge (x \wedge b)) = \mu(x) + \mu(a \wedge b)$;

$$\mu(x \vee a) + \mu(x \vee b) \geqslant \mu((x \vee a) \vee (x \vee b)) + \mu((x \vee a) \wedge (x \vee b)) = \mu(a \vee b) + \mu(x);$$

$$\mu(x) + \mu(a) \geqslant \mu(x \vee a) + \mu(x \wedge a);$$

$$\mu(x) + \mu(b) \geqslant \mu(x \vee b) + \mu(x \wedge b).$$

Al sumar todas las cuatro desigualdades, obtendremos $\mu(a) + \mu(b) \geqslant \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b)$, pero, por hipótesis del problema, $\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b)$. Por consiguiente, en todas las cuatro desigualdades los segundos miembros son iguales a los primeros, lo que se trataba de demostrar.

7.237. Es suficiente demostrar la afirmación para los intervalos transpuestos. Sea $a, b \in L$. Entonces, la aplicación $\psi(x) = x \wedge a = y$, determinada sobre $[b, a \vee b]$ define una aplicación isomorfa de $[b, a \vee b]$ en $(a \wedge b, a]$ (véase el problema 7.98). En virtud del problema 7.236 c), para todos los $x \in [b, a \vee b]$ tenemos

$$\mu(a \wedge b) + \mu(x) = \mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) = \mu(\psi(x)) + \mu(b).$$

De aquí

$$\mu(x) - \mu(\psi(x)) = \mu(b) - \mu(a \wedge b) = \mu(a \vee b) - \mu(a)$$

para cualesquiera intervalos transpuestos $[b, a \wedge b]$ y $[a \wedge b, a]$.

7.238. Hágase uso de los problemas 7.146 y 7.237.

7.239. Hágase uso de los problemas 7.147 y 7.238.

7.241. Tenemos $2w = \mu(y_1) + \mu(y_2) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i(y_1) + \sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i(y_2) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i (\mu_i(y_1) + \mu_i(y_2)) \geqslant \text{(siendo submodulares las funciones } \mu_i) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m} c_i (\mu_i(y_1 \vee y_2) + \mu_1(y_1 \wedge y_2)) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i(y_1 \vee y_2) + \sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i(y_1 \wedge y_2) =$$

$$= \mu(y_1 \vee y_2) + \mu(y_1 \wedge y_2) \geqslant \text{(por cuanto } w \text{ es el valor mínimo de } \mu(x)) \geqslant$$

$$\geqslant w + w = 2w.$$

Por cuanto $\mu(y_1 \vee y_2) + \mu(y_1 \wedge y_2) = 2w$, $\mu(y_1 \vee y_2) \geqslant w$ y $\mu(y_1 \wedge y_2) \geqslant w$, entonces $\mu(y_1 \vee y_2) = \mu(y_1 \wedge y_2) = w$.

7.242. De la igualdad

$$\sum_{i=1}^{m} c_i (\mu_i(y_1) + \mu_i(y_2)) = \sum_{i=1}^{m} c_i (\mu_i(y_1 \vee y_2) + \mu_i(y_1 \wedge y_2))$$

(véase problema 7.241) y de que $c_i > 0$ para todo i, $i = 1, \ldots, m$ tenemos

$$\mu_i(y_1) + \mu_i(y_2) \geq \mu_i(y_1 \vee y_2) + \mu_i(y_1 \wedge y_2),$$

lo que se trataba de demostrar.

7.243. Sea $w = \min\limits_{x \in K} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \mu_i(x) \right\}$ y $w' = \min\limits_{x \in K} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{m} c'_i \mu_i(x) \right\}$. Por hipótesis del problema $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i \mu_i(y) = w$, y $\sum\limits_{i=1}^{m} c'_i \mu_i(y') = w'$. Por consiguiente,

$$w + w' = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i(y) + \sum_{i=1}^{m} c'_i \mu_i(y') = \sum_{i=1}^{p} \left[(c_i - c'_i) \mu_i(y) + c'_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) \right] +$$

$$+ \sum_{i=p+1}^{q} [c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) + (c'_i - c_i) \mu_i(y')] + \sum_{i=q+1}^{m} c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) \geq \text{(por}$$

ser la función $\mu_i(x)$ submodular) $\geq \sum\limits_{i=1}^{p} [c_i - c'_i) \mu_i(y) + c'_i (\mu_i(y \vee y')) +$

$$+ \mu_i(y \wedge y'))] + \sum_{i=p+1}^{q} [c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')) + (c'_i - c_i) \mu_i(y')] +$$

$$+ \sum_{i=q+1}^{m} c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')) = \text{(sumemos y restemos de las sumas obtenidas}$$

$$\sum_{i=1}^{p} c_i \mu_i(y \wedge y') \text{ y } \sum_{i=p+1}^{q} c'_i \mu_i(y \vee y') = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^{m} c'_i \mu_i(y \vee y') +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} [(c_i - c'_i) \mu_i(y) + c'_i \mu_i(y \wedge y') - c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=p+1}^{q} [(c'_i - c_i) \mu_i(y') +$$

$$+ c_i \mu_i(y \vee y') - c'_i \mu_i(y \vee y')] = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^{m} c'_i \mu_i(y \vee y') +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} (c_i - c'_i)(\mu_i(y) - \mu(y \wedge y')) + \sum_{i=p+1}^{q} (c'_i - c_i) (\mu_i(y') - \mu_i(y \vee y')) \geq \text{(cuando}$$

$i = 1, \ldots, p$, afirmamos que $(c_i - c'_i) \geq 0$ y $\mu_i(y) - \mu(y \wedge y') \geq 0$, puesto que μ_i son funciones modulares no decrecientes e $y \geq y \wedge y'$ en K; cuando $i = p + 1, \ldots, q$, afirmamos que $(c'_i - c_i) \geq 0$ y $\mu_i(y') - \mu(y \vee y') \geq 0$, puesto que μ_i son funciones submodulares no crecientes e $y' \leq y \vee y'$ en K) $\geq$

$$\geq \sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^{m} c'_i \mu_i(y \vee y') \geq w + w'.$$

De aquí, por cuanto las expresiones primera y segunda son iguales, tenemos

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^{m} c'_i \mu_i(y \vee y') = w + w', \text{ y,}$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i(y \wedge y') = w \text{ y } \sum_{i=1}^{m} c'_i \mu_i(y \vee y') = w',$$

es decir, $y \wedge y' \in L(c_1, \ldots, c_m)$ y, $y \vee y' \in L(c'_1, \ldots, c'_m)$.

Más aún, queda demostrado que

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i (y) + \sum_{i=1}^{m} c_i' \mu_i (y') = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu_i (y \wedge y') + \sum_{i=1}^{m} c_i' \mu_i (y \vee y') \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{p} c_1 (\mu_i (y) + \mu_i (y')) + \sum_{i=p+1}^{q} c_i (\mu_i (y) + \mu_i (y')) + \sum_{i=q+1}^{m} c_i (\mu_i (y) + \mu_i (y')) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} c_i' \mu_i (y' \vee y') + \mu_i (y \wedge' y')) + \sum_{i=p+1}^{q} c_i (\mu_i (y \vee y') + \mu_i (y \wedge y')) +$$

$$+ \sum_{i=q+1}^{m} c_i (\mu_i (y \vee y') + \mu_i (y \wedge y')).$$

En virtud de la última igualdad, obtenemos, teniendo presente que las funciones $\mu_i (x)$ son submodulares y que $c_i > 0$, $c_i' > 0$:

$$\mu_i (y) + \mu_i (y') = \mu_i (y \vee y') + \mu_i (y \wedge y')$$

para cualquier i, $i = 1, 2, \ldots, m$, lo que se trataba de demostrar.

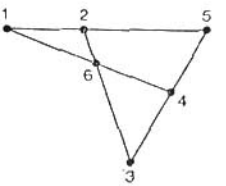
Capítulo VIII

MATROIDES

§ 1. Conceptos fundamentales y ejemplos

8.3. $\mathcal{B}(U_{k,n}) = \{A \subseteq S \mid |A| = k\}$;
$\mathcal{C}(U_{k,n}) = \{A \subseteq S \mid |A| = k+1\}$;
$\mathcal{D}(U_{k,n}) = \{A \subseteq S \mid |A| \geqslant k+1\}$.

8.5.



8.6.

a) Supongamos, por ejemplo, que los primeros k vectores $u_1, \ldots, u_k$, $k < n$, son linealmente dependientes, es decir, que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = 0$, donde no todos los λ_i son iguales a cero. Al poner, entonces, $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, obtendremos una combinación lineal no trivial $\lambda_1 u_1 + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \lambda_n u_n = 0$.

La afirmación b) se deduce directamente de a) (reducción al absurdo).

c) Supongamos, por ejemplo, que en la relación $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ se tiene $\lambda_n \neq 0$. Entonces $u_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} u_1 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} u_{n-1}$.

d) Sea, por ejemplo $u_n = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1}$. Al poner $\lambda_1 = \alpha_1, \ldots, \lambda_{n-1} = \alpha_{n-1}$, $\lambda_n = -1$, obtendremos $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ con $\lambda_n \neq 0$.

e) La combinación lineal no trivial $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \alpha u = 0$ con $\alpha \neq 0$ nos da, en virtud de c), lo que necesitamos. Si, no obstante, $\alpha = 0$, entonces $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, puesto que $u_1, \ldots, u_n$ son, por hipótesis, linealmente independientes

La afirmación f) se deduce directamente de e).

8.7. Las condiciones, (*i*1) y (*i*2) para el sistema $\mathcal{J}$ se desprenden de la afirmación b) del problema 8.6. Para (*i*3) basta mostrar que si $A, B \in \mathcal{J}$ y $|B| = |A| + 1$, entonces se encontrará un vector $v \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{v\} \in \mathcal{J}$. Supongamos que la última afirmación no es cierta, por ejemplo, para $A = \{u_1, \ldots, u_m\}$ y $B = \{v_1, \ldots, v_{m+1}\}$. Esto significa que para cada i, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, o bien $v_i \in \{u_1, \ldots, u_m\}$, o bien el conjunto de vectores

$\{u_1, \ldots, u_m, v_i\}$ es linealmente dependiente. Por consiguiente, existen $\alpha_{ji} \in F$ tales que

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} u_j, \quad \text{donde } i = 1, 2, \ldots, m+1$$

Formemos una combinación lineal de vectores v_i con los coeficientes $\beta_i \in F$:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} u_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{ji} \beta_i \right) u_j,$$

y examinemos el sistema:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{ji} \beta_i = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Por cuanto el número de incógnitas β_i es superior al número de ecuaciones, el sistema cuenta con la solución no nula $(\beta_1^0, \ldots, \beta_{m+1}^0)$. Llegamos, pues, a una combinación lineal no trivial

$$\beta_1^0 v_1 + \ldots + \beta_{m+1}^0 v_{m+1} = 0,$$

cuya presencia contradice, no obstante, a la condición de que $B \in \mathcal{J}$. Por consiguiente, nuestra suposición no es cierta y la condición (i3) tiene lugar para el sistema $\mathcal{J}$.

8.8. La primera afirmación se deduce de que el determinante no es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Cuando $F = GF(2)$, el matroide vectorial M es isomorfo al matroide homogéneo $U_{2,3}$.

8.9. c) Sea $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (u_i - u) = 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Entonces $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) u = 0 \cdot u = 0$, y, por ser los vectores $u_1, \ldots, u_n$ independientes de manera afín, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. De este modo, $u_1 - u, \ldots, u_n - u$ son independientes de un modo afín.

d) los vectores $u_1, \ldots, u_n$ son independientes de un modo afín cuando y sólo cuando de $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ se deduce que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, o bien si y sólo si de $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i + \left(-\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) u_n = 0$ se deduce que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, o bien si y sólo si de $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (u_i - u_n) = 0$ se desprende que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, es decir, si y sólo si el conjunto de vectores $\{u_1 - u_n, \ldots, u_{n-1} - u_n\}$ es linealmente independiente.

e) Demostremos por reducción al absurdo. Supongamos que la afirmación no es cierta. En tal caso el conjunto A se contiene en un subespacio lineal $(n-2)$-dimensional V de L. Por consiguiente, el conjunto de vectores $\{u_1 - u_n, \ldots, u_{n-1} - u_n\}$ es linealmente dependiente, puesto que yace en V. Pero, en virtud de d), el conjunto de vectores $u_1, \ldots, u_n$ es dependiente de un modo afín, lo que contradice la hipótesis del problema.

8.10. Las condiciones (*i*1) y (*i*2) de la definición de matroide para el sistema $\mathcal{J}$ se desprenden de la afirmación a) del problema 8.9. Demostremos la validez de (*i*3), es decir, que para A, $B \in \mathcal{J}$ arbitrarios, donde $|B| = |A| + 1$, existe $v \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{v\} \in \mathcal{J}$. Sean $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $B = \{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ los conjuntos independientes de un modo afín. Entonces el conjunto $\{v_1 - u_n, \ldots, v_{n+1} - u_n\}$ será también independiente de un modo afín (problema 8.9 c), y, en virtud de la afirmación e) del problema 8.9, podemos considerar (sin restringir la generalidad de los razonamientos) que $B' = \{v_1 - u_n, \ldots, v_n - u_n\}$ es un conjunto linealmente independiente. Debido a la afirmación d) del problema 8.9, el conjunto de vectores $A' = \{u_1 - u_n, \ldots, u_{n-1} - u_n\}$ es también linealmente independiente. Además, $|B'| = |A'| + 1$, pero, entonces, en virtud del problema 8.7, existe un i, $i = 1, \ldots, n$, tal que el conjunto $A' \cup \{v_i - u_n\}$ es linealmente independiente, o bien, lo que es equivalente (problema 8.9 d), el conjunto $\{u_1, \ldots, u_n, v_i\}$ es independiente de un modo afín o $A \cup \{v_i\} \in \mathcal{J}$.

8.11. Se demuestra igual que el problema 8.7.

Un sistema $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{ji} m_i \beta_i = 0$, $j = 1, \ldots, m$, donde α_{ji}, m_i son números enteros, tiene solución entera no nula $(\beta_1^0, \ldots, \beta_{m+1}^0)$. En efecto, al hallar la solución racional no nula $(\beta_1', \ldots, \beta_{m+1}')$ multipliquémosla por el denominador común de los números $\beta_1', \ldots, \beta_{m+1}'$ y obtendremos los valores enteros de $\beta_1^0, \ldots, \beta_{m+1}^0$ que son precisamente las soluciones del problema.

8.12. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son números algebraicos, y π y e, números reales transcendentes sobre el campo de números racionales.

8.13. b) Convengamos en considerar que $a_1, \ldots, a_{n-1}$ están unidos al campo F. Entonces b depende algebraicamente de a_n sobre el campo $F(a_1, \ldots, a_{n-1})$, es decir, tiene lugar la correlación algebraica

$$f_0(a_n) b^m + f_1(a_n) b^{m-1} + \ldots + f_m(a_n) = 0. \qquad (8.1')$$

Escribamos esta ecuación según las potencias del elemento a_n y obtengamos

$$g_0(b) a_n^h + g_1(b) a_n^{h-1} + \ldots + g_h(b) = 0. \qquad (8.2')$$

Por hipótesis, el elemento b es transcendente sobre el campo $F(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Por esta razón no todos los polinomios $g_0(b), \ldots, g_h(b)$ son idénticamente iguales a cero, puesto que en el caso contrario el primer miembro en (8.1') sería idénticamente igual a cero, es decir, se verificarían las igualdades $f_0(a_n) = \ldots = f_m(a_n) = 0$, lo que contradice la hipótesis. De aquí, en virtud de (8.2'), el elemento a_n depende algebraicamente de b sobre el campo $F(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

d) Si $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ tiene por corolario suyo el que el polinomio f es igual a cero, entonces, evidentemente, ninguno de los elementos a_i puede ser algebraicamente dependiente de los demás a_j.

Al contrario, supongamos que los elementos $a_1, \ldots, a_n$ son algebraicamente independientes. Si $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ y si el polinomio f está dispuesto por potencias del elemento a_n, entonces los coeficientes $f_i(a_1, \ldots, a_{n-1})$ de este polinomio resultan ser idénticamente iguales a cero. Dispongamos estos coeficientes por potencias del elemento a_{n-1} y de la misma manera estableceremos que sus coeficientes son también idénticamente iguales a cero; procediendo de esta manera, llegamos al fin y al cabo a que los coeficientes del polinomio f son nulos.

8.14. Hace falta comprobar que $\mathcal{J}$ satisface las condiciones (*i*1) — (*i*3) en la definición del matroide. La demostración de (*i*1) y (*i*2) se contiene en la resolución del problema 8.13 d).

Demostremos (*i*3) por reducción al absurdo. Supongamos que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_{n+1}\} \in \mathcal{J}$, mas para todos los b_j, $j = 1, \ldots, n+1$, el conjunto $A \cup \{b_j\} \notin \mathcal{J}$. Llegamos, pues, a una contradicción debido a que el conjunto B es algebraicamente independiente sobre F. En efecto, sean $\{a_1, \ldots$

$\ldots, a_n\}$ y $\{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ dos conjuntos algebraicamente independientes sobre el campo F y sea b_j algebraico sobre $F(a_1, \ldots, a_n)$ para $j = 1, \ldots, n+1$. Demostremos por inducción respecto de k que con una reenumeración adecuada de los elementos a_i y b_j para cada $k \leqslant n$ tenemos que

el elemento b_{k+1} es algebraico sobre $F(b_1, \ldots, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ (8.3')

el elemento a_k es algebraico sobre $F(b_1, \ldots, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. (8.4')

Cuando $k = 0$, la afirmación (8.3') es evidente, mientras que en (8.4') no se analiza. Supongamos que para $k > 0$ las afirmaciones (8.3') y (8.4') son verídicas; demostrémoslas para $k + 1$. Por cuanto el elemento b_{k+1} es algebraico sobre $F(b_1, \ldots, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ y el conjunto $\{b_1, \ldots, b_{k+1}\}$ es algebraicamente independiente sobre F, entonces de la solución del problema 8.13 b) se ve que existe un elemento a_j (puede considerarse sin restringir la generalidad de nuestros razonamientos que $j = k + 1$) bajo la condición: a_{k+1} es algebraico sobre $F(b_1, \ldots, b_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n)$, lo que demuestra (8.4'). De este modo, para cada i, $i = 1, \ldots, k + 1$, el elemento a_i es algebraico sobre el campo $F(b_1, \ldots, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Aplicando reiteradamente el problema 8.13 c), llegamos a que cada elemento a_i, $i = 1, \ldots, k + 1$, depende algebraicamente de $b_1, \ldots, b_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$. Luego, b_{k+2} depende algebraicamente de $a_1, \ldots, a_n$, el elemento a_i depende algebraicamente de $b_1, \ldots, b_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ para todo i, $i = 1, \ldots, k + 1$. Por eso, en virtud del problema 8.13 c), b_{k+2} depende algebraicamente sobre F de $b_1, \ldots, b_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$, lo que sirve de demostración en (8.3'). La inducción queda finalizada. Suponiendo ahora $k = n$, obtenemos de (8.3') que b_{n+1} es algebráicamente dependiente sobre el campo F de $b_1, \ldots, b_n$, lo que contradice la condición del problema.

8.16. Supongamos al contrario que $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$ y $|B_1| \neq |B_2|$, por ejemplo, $|B_1| < |B_2|$. Entonces, en virtud de (*i*3), existe un $x \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_1 \cup \{x\} \in \mathcal{J}$, lo que contradice el que B_1 es la base del matroide.

8.17. La validez de (*b*1) para la familia $\mathcal{B}(M)$ de bases del matroide M se deduce de que la base es máxima. Ahora, si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$ y $x \in B_1$, entonces $B_1 \setminus \{x\} \in \mathcal{J}$ y $|B_2| = |B_1 \setminus \{x\}| + 1$ (véase el problema 8.16). Por eso, en virtud de (*i*3), existe $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\})$ tal que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{J}$. Además, $|(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}| = |B_1|$, y, en virtud del problema 8.16, $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}(M)$. La validez de (*b*2) está establecida también.

Viceversa, supongamos que la familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$ satisface las condiciones (*b*1) y (*b*2). Definamos la familia $\mathcal{J}$ del modo siguiente: $A \in \mathcal{J}$, donde $A \subseteq S$, si existe tal $B \in \mathcal{B}$ que $A \subseteq B$. Obviamente, $\mathcal{J}$ satisface las condiciones (*i*1) y (*i*2). Demostremos la validez del axioma (*i*3) para $\mathcal{J}$. Sean X e Y dos conjuntos diferentes de $\mathcal{J}$ tales que $X \subseteq B_1$, $Y \subseteq B_2$ y $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Supongamos que $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $B_1 = \{x_1, \ldots, x_k, b_1, \ldots, b_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}\}$ y $B_2 = \{y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$. Examinemos el conjunto $B_1 \setminus \{b_n\}$. Para él existe, de acuerdo con (*b*2), un $z \in B_2$ tal que $(B_1 \setminus \{b_n\}) \cup \{z\} \in \mathcal{B}$. Si $z \in Y$, entonces $X \cup \{z\} \in \mathcal{J}$, y la condición (*i*3) se cumple. Si $z \notin Y$, examinemos el conjunto $((B_1 \setminus \{b_n\}) \cup \{z\}) \setminus \{b_{n-1}\} = B'$. Para éste existe, de nuevo en virtud de (*i*2), un $z_1 \in B_2$ tal que $B' \cup \{z_1\} \in \mathcal{B}$. Si $z_1 \in Y$, entonces $X \cup \{z_1\} \in \mathcal{J}$, y (*i*3) queda demostrada. Si $z_1 \notin Y$, pasamos al conjunto $(B' \cup \{z_1\}) \setminus \{b_{n-2}\}$, etc. Por cuanto $|\{b_1, \ldots, b_n\}| > |\{c_1, \ldots, c_{n-1}\}|$, entonces, tras n pasos como máximo, obtendremos una situación en la cual b_i se sustituye por un elemento de Y. Por consiguiente, $\mathcal{J}$ satisface la condición (*i*3) y $\mathcal{J}$ es una familia de conjuntos independientes del matroide.

Es evidente que de bases en $(S, \mathcal{J})$ sirven precisamente los conjuntos de $\mathcal{B}$.

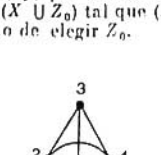
8.18. Supongamos que se cumple la afirmación (*b*2). Admitamos que $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \neq B_2$, $X \subseteq B_1$, $B_2 \subseteq Y$, y $X \subseteq Y$. En la familia $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos que contienen X elijamos B_3 tal que $B_2 \cap B_3$ sea máximo por el número de elementos. Supongamos que existe $x \in B_3 \setminus Y$. Entonces, de acuerdo con la suposición, existe $y \in B_2$ tal que $(B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$, y $X \subseteq (B_3 \setminus \{x\} \cup \{y\})$, $B_2 \cap B_3 \subset |(B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\}| \cap B_2$, lo que contradice el modo de elegir B_3. Así pues, $X \subseteq B_3 \subseteq Y$ y (*b*2′) queda demostrada.

Viceversa, supongamos que se cumple la afirmación (*b2'*). Mostremos, en primer lugar, que si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $|B_1 \setminus B_2| = 1$, entonces $|B_2 \setminus B_1| = 1$. En efecto, sea que $x \in B_1 \setminus B_2$ y $A = B_1 \cap B_2 = B_1 \setminus \{x\}$. Entonces existe $y \in B_2 \setminus A$. De aquí tenemos que $B_2 \supseteq A \cup \{y\} \subseteq B_1 \cup \{y\} \supseteq B_1$, lo que conduce a la existencia de tal $B_3 \in \mathcal{B}$ que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} = A \cup \{y\} \subseteq B_3 \subseteq B_1 \cup \{y\}$. Por cuanto $\mathcal{B}$ es una anticadena, entonces $B_3 \neq B_1 \cup \{y\}$, y, por consiguiente $B_3 = (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} = B_2$ y $|B_2 \setminus B_1| = 1$.

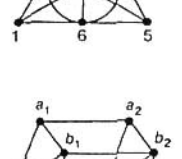
Ahora, supongamos que $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \neq B_2$, $x \in B_1 \setminus B_2$ y $X = B_1 \setminus \{x\}$, $Y = B_2 \cup X$. Por hipótesis, se encontrará un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $X \subseteq B_3 \subseteq Y$. Es evidente que $X = B_1 \cap B_3$ y $|B_1 \setminus B_3| = 1$. De aquí se deduce que $|B_3 \setminus B_1| = 1$, es decir, existe $y \in Y = X \cup B_2$ tal que $B_3 = X \cup \{y\}$. Está claro que $y \in B_2$. Así pues, (*b2*) queda también demostrada.

8.19. Entre todos los subconjuntos $Z \subseteq Y \setminus X$ tales que $X \cup Z \in \mathcal{J}$ elijamos Z_0 con un valor mínimo de $|X \cup Z_0|$. Si $|X \cup Z_0| < |Y|$, existe $Y_0 \subseteq Y$, $|Y_0| = |X \cup Z_0| + 1$, y, por cuanto $Y \in \mathcal{J}$, entonces, en virtud de (*i3*), se encontrará un $y \in Y \setminus (X \cup Z_0)$ tal que $(X \cup Z_0) \cup \{y\} \in \mathcal{J}$. El conjunto $Z_0 \cup \{y\}$ contradice el modo de elegir Z_0.

8.20.



8.21.



8.22. Sea $M = (S, \mathcal{J})$ un matroide sobre el conjunto finito S. Las afirmaciones (*r1*) y (*r2*) son corolarios triviales de la definición de función de rango. Para demostrar (*r3*) supongamos que $X \subseteq A \cap B$ es un subconjunto independiente máximo de $A \cap B$. Al extender X con elementos nuevos, obtenemos $Y \subseteq A \cup B$ tal que $X \subseteq Y$, e Y es un subconjunto independiente máximo de $A \cup B$ (véase la fig. 8.1') Es obvio que $|Y \cap A| + |Y \cap B| = |X| + |Y|$, puesto que en el primer miembro de la igualdad están calculados exactamente dos veces aquellos elementos de Y que yacen en X. Por cuanto Y es un conjunto independiente, serán también conjuntos independientes $Y \cap A$ e $Y \cap B$. Entonces $|Y \cap A| \leqslant r(A)$ y $|Y \cap B| \leqslant r(B)$ conducen a que $r(A) + r(B) \geqslant |Y| + |X| = r(A \cup B) + r(A \cap B)$.

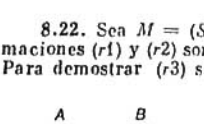


Fig. 8.1'.

Las afirmaciones (*r4*), (*r5*) y (*r6*) se obtendrán de (*r1*), (*r2*) y (*r3*). Ante todo, (*r4*) se deduce de manera trivial de (*r1*), si $A = \varnothing$. La afirmación $r(A) \leqslant r(A \cup \{a\})$ es un caso particular de (*r2*), y $r(A \cup \{a\}) \leqslant r(A) + 1$ se deduce de (*r3*), si ponemos $B = \{a\}$ y hacemos uso del corolario (*r1*) consistente en que

$r(\{a\}) \leqslant 1$. Así pues, (r5) queda demostrada. Por fin, al aplicar (r2) a los conjuntos A y $A \cup \{a, b\}$, como también (r3) a los conjuntos $A \cup \{a\}$ y $A \cup \{b\}$, llegamos a que $r(A) \leqslant r(A \cup \{a, b\}) + r(A) \leqslant r(A \cup \{a\}) + r(A \cup \{b\})$, es decir, $r(A) \geqslant r(A \cup \{a, b\})$. De aquí, $r(A \cup \{a, b\}) = r(A)$ y (r6) queda establecida.

Viceversa, demostremos que una función de valores enteros r, que satisface (r4), (r5) y (r6), es una función de rango de cierto matroide $M = (S, r)$. Diremos que $X \in \mathcal{J}$, $X \subseteq S$, si $r(X) = |X|$. Está claro que $\varnothing \in \mathcal{J}$. Supongamos que $A \in \mathcal{J}$ y $B \supseteq A$. Admitamos que $B \in \mathcal{J}$. Entonces, $r(B) < |B|$, y por eso, si $\{c_1, \ldots, c_k\} = A \setminus B$, entonces $r(B \cup \{c_1\}) \leqslant r(B) + 1 < |B| + 1$. Aplicando reiteradamente (r2), obtendremos: $r(A) = r(B \cup \{c_1\} \cup \ldots \cup \{c_k\}) < |B| + k = |A|$, lo que contradice la hipótesis. Por consiguiente, $\mathcal{J}$ satisface (i2). Supongamos ahora que A, $B \in \mathcal{J}$ y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_t, c_{t+1}, \ldots, c_k\}$, $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_t, b_{t+1}, \ldots, b_h, b_{h+1}\}$, donde $c_t \neq b_t$ para cualesquiera i y j. Si $A \cup \{b_i\} \in \mathcal{J}$ para $i = t + 1, \ldots, k + 1$, entonces $r(A) = r(A \cup \{b_i\}) = |A|$. De aquí, en virtud de (r6), tenemos $r(A \cup \{b_t\} \cup \{b_j\}) = r(A) = |A|$ para $i, j = t + 1, \ldots, k + 1$. Aplicando varias veces (r6), obtenemos

$$r(B) \leqslant r(A \cup \{b_{t+1}\} \cup \ldots \cup \{b_{h+1}\}) = |A| < |B|,$$

lo que contradice el hecho de que $B \in \mathcal{J}$. Por consiguiente, $A \cup \{b_i\} \in \mathcal{J}$ para cierto i, $\mathcal{J}$ satisface (i3). De este modo, $(S, \mathcal{J})$ es un matroide. No es difícil demostrar que su función de rango coincide con r.

Por cuanto la función de valores enteros r', para la cual resultan ser verídicas las condiciones (r1), (r2) y (r3), satisface las condiciones (r4), (r5) y (r6), entonces r' será precisamente la función de rango r del matroide $(S, \mathcal{J})$.

8.23. Si en el matroide de Vamos (problema 8.21) ponemos $A = \{b_1, b_2\}$, $B = \{c_1, c_2\}$, $C = \{d_1, d_2\}$, $\mathcal{D} = \{a_1, a_2\}$, entonces todos los conjuntos de cuatro elementos, salvo $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup \mathcal{D}$, $B \cup C$ y $B \cup \mathcal{D}$ son independientes. Por eso, $r(A) + r(B) + r(A \cup B \cup C) + r(A \cup B \cup C) + r(C \cup \mathcal{D}) = 2 + 2 + 4 + 4 + 4 = 16$, y $r(A \cup B) + r(A \cup C) + r(A \cup \mathcal{D}) + r(B \cup C) + r(B \cup \mathcal{D}) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$, es decir, la desigualdad no es cierta para el matroide de Vamos. Esto también interviene como demostración de que el matroide de Vamos no es vectorial.

8.25. La validez de (c1) se deduce de la minimalidad del ciclo y (c2) es un corolario evidente de (c2'). Demostremos ahora la validez de (c2'). Sea $C_1, C_2 \in \mathfrak{C}(M)$, $C_1 \neq C_2$, $x \in C_1 \cap C_2$ e $y \in C_1 \setminus C_2$. Entonces $C_2 \setminus \{x\} \in \mathcal{J}$ y $C_2 \setminus \{x\} \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{y\}$. Por eso, se encontrará un subconjunto independiente máximo B de $(C_1 \cup C_2) \setminus \{y\}$ tal que $C_2 \setminus \{x\} \subseteq B$. Por cuanto $C_2 \not\ni \mathcal{J}$, de aquí se deduce que $x \in B$, y, por consiguiente, B es un subconjunto independiente máximo del conjunto $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\}$. Análogamente, si B' es un subconjunto independiente máximo del conjunto $C_1 \cup C_2$ tal que $C_1 \setminus \{y\} \subseteq B'$, entonces $y \not\ni B'$ y B' es un subconjunto independiente máximo del conjunto $(C_1 \cup C_2) \setminus \{y\}$. Por consiguiente, si r es una función de rango del matroide M, entonces $r(C_1 \cup C_2) = r((C_1 \cup C_2) \setminus \{y\}) = r((C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\})$ y, como $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\} \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\} \subseteq C_1 \cup C_2$, entonces $r(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}) = r((C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\})$. Por eso, $B \cup \{y\}$ es un subconjunto dependiente del conjunto $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$, el cual contiene y, en tanto que la extracción de y del citado subconjunto lo hace independiente. Por eso $B \cup \{y\}$ contiene tal ciclo C^* que $y \in C^* \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$.

Con el fin de demostrar la afirmación inversa, comprobemos el cumplimiento para $\mathcal{J}$ de los axiomas (i1) — (i3). Es evidente que $\varnothing \in \mathcal{J}$. Si el conjunto A no contiene a título de subconjuntos los términos de $\mathfrak{C}$ y si $B \subseteq A$, entonces, obviamente, B tampoco contiene términos de $\mathfrak{C}$. De este modo, (i1) y (i2) se cumplen. Comprobemos (i3). Sean A, $B \in \mathcal{J}$ de tal índole que $|A| = m$, $|B| = m + 1$. Demostremos que existe un subconjunto del conjunto $A \cup B$ de potencia $m + 1$ que pertenece a la familia $\mathcal{J}$. Supongamos que B' tiene, entre todos los conjuntos de este tipo, el valor mínimo $|A \setminus B'|$. Queremos mostrar también que $A \setminus B' = \varnothing$, es decir que $A \subseteq B'$. Supongamos lo contrario.

Entonces existe un $x \in A \setminus B'$. Para cada $y \in B' \setminus A$ el conjunto $B_y = (B' \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ es de potencia $m + 1$ y constituye un subconjunto del conjunto $A \cup B$, para el cual $|A \setminus B_y| < |A \setminus B'|$. Por consiguiente, en virtud de la suposición de minimalidad, $B_y \notin \mathcal{J}$ y contiene, a título de subconjunto, C_y de $\mathcal{C}$. Es evidente que $x \in C_y$ e $y \notin C_y$. Si cada $y \in B' \setminus A$ conduce a un mismo término de $\mathcal{C}$, por ejemplo, a C, entonces para todo $y \in B' \setminus A$ tenemos $y \notin C$. Pero, en tal caso $C \subseteq A$, lo que es imposible, puesto que $A \in \mathcal{J}$. Por consiguiente, entre los términos de $\mathcal{C}$ construidos más arriba existen al menos dos distintos, por ejemplo, C_{y_1} y C_{y_2}. De este modo, $C_{y_1}, C_{y_2} \in \mathcal{C}$, $C_{y_1} \neq C_{y_2}$ y $x \in C_{y_1} \cap C_{y_2}$. Entonces, en virtud de (c2), se encontrará un $C^* \in \mathcal{C}$ tal que $C^* \subseteq (C_{y_1} \cup C_{y_2}) \setminus \{x\} \subseteq B' \in \mathcal{J}$. Hemos llegado a una contradicción con la hipótesis. Por consiguiente, $A \subset B'$. Así pues, la validez de (i3) está establecida.

Designemos temporalmente con $\mathcal{C}'$ la familia de todos los ciclos del matroide $M = (S, \mathcal{J})$. Ahora, $C \in \mathcal{C}'$ cuando, y sólo cuando, $C \notin \mathcal{J}$ y $C \setminus \{x\} \in \mathcal{J}$ para cada $x \in C$, es decir, cuando y sólo cuando existe $C' \subseteq C$ tal que $C' \in \mathcal{C}$ y para todo $x \in C$ no existe ningún $C_x \in \mathcal{C}$ tal que $C_x \subseteq C \setminus \{x\}$, es decir, cuando y sólo cuando $C \in \mathcal{C}$ (en virtud de (c1). Por eso, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ y la familia de ciclos del matroide $M = (S, \mathcal{J})$ es precisamente la familia $\mathcal{C}$.

8.26. Supongamos que el conjunto $(A \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ contiene, para cierto $y \in C$, un ciclo C'. Está claro que $C \neq C'$. Por cuanto $A \in \mathcal{J}$, entonces $x \in C'$. De aquí, en virtud de (c2), existe un ciclo C^* que satisface la condición: $C^* \subseteq (C \cup C') \setminus \{x\} \subseteq A$, lo que es imposible, puesto que $A \in \mathcal{J}$. Por consiguiente, $(A \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ no contiene ciclos, o bien, lo que es equivalente, $(A \cup \{x\}) \setminus \{y\} \in \mathcal{J}$ para cualquier $y \in C$. En efecto, hemos demostrado también que $A \cup \{x\}$, donde $A \in \mathcal{J}$ y $x \in S$, contiene como máximo un ciclo del matroide M.

8.27. c) si C_1, C_2 son dos ciclos distintos en $B \cup \{y\}$, entonces, en virtud de (c2), existe un ciclo que contiene $(C_1 \cup C_2) \setminus \{y\} \subseteq B$. Es obvio que esto no es posible.

d) Si $x \notin C$, entonces $C \subseteq (B \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ y $(B \cup \{y\}) \setminus \{x\} \notin \mathcal{J}$. Viceversa, si $(B \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ no es una base del matroide M, entonces, en virtud de (c2), $(B \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ es un conjunto dependiente y contiene cierto ciclo, el cual es igual, en virtud de c), a C. Por consiguiente, $x \notin C$.

8.29. Compruébense los axiomas (c1) y (c2) para la familia de ciclos del grafo G.

8.31. Sí, pueden. Por ejemplo, los grafos G_1 y G_2 en las figs. 8.2′ y 8.3′ no son isomorfos, mientras que sus matroides cíclicos son isomorfos.

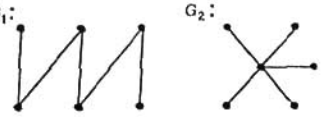


Fig. 8.2′.

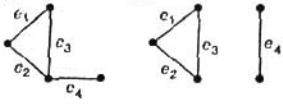


Fig. 8.3′.

8.32. La citada propiedad no se cumple, por ejemplo, para el matroide homogéneo $U_{2,4}$. El matroide de Fano (véase el problema 8.20) sirve de ejemplo de un matroide no gráfico, para el cual se cumple la propiedad mencionada.

8.34. Si $x \in B_1 \cap B_2$, podemos elegir $y = x$. Supongamos ahora que $x \in B_1 \setminus B_2$ y sea C el único ciclo en $B_2 \cup \{x\}$. Para todo $y \in B_2 \setminus B_1$ existe un ciclo $C_y \subseteq B_1 \cup \{y\}$. En virtud del problema 8.27 d), para tal y el conjunto $(B_2 \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ es una base cuando y sólo cuando $y \in C$, y $(B_1 \cup \{y\}) \setminus \{x\}$, una base del matroide M cuando y sólo cuando $x \in C_y$. Por eso, para finalizar la demostración basta mostrar que existe un $y \in C \cap (B_2 \setminus B_1)$ tal que $x \in C_y$. En efecto, sea C^* un ciclo en $B_1 \cup C$ tal que $x \in C^*$ y supongamos que entre todos

los ciclos de este tipo C^* tiene valor mínimo $|C^* \cap (C \setminus B_1)|$. En tal caso se encontrará el requerido $y \in C^* \setminus B_1$. Por cuanto, si $x \notin C_y$, la existencia del ciclo C' que satisface la condición: $x \in C' \subseteq (C_y \cup C^*) \setminus \{y\}$ contradice la suposición de que C^* es mínimo.

8.36. Supongamos que $x \sim A$ y $\mathcal{D}$ es un subconjunto independiente máximo del conjunto A. Entonces, o bien $x \in A$, o bien $x \notin A$ y $\{x\} \cup B \notin \mathcal{J}$ para cierto subconjunto independiente B del conjunto A. En el primer caso $x \sim \mathcal{D}$. En el segundo, B queda contenido en cierto subconjunto independiente máximo D' del conjunto $\{x\} \cup A$. Está claro que $x \notin \mathcal{D}'$. Por consiguiente, $\mathcal{D}'$ es un subconjunto independiente máximo de A y $|\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}|$. Por cuanto todos los subconjuntos independientes máximos de $\{x\} \cup A$ tienen potencia igual, de aquí se deduce que $\mathcal{D}$ es también un subconjunto independiente máximo de $\{x\} \cup A$. Así pues, $\{x\} \cup \mathcal{D} \notin \mathcal{J}$ y $x \sim \mathcal{D}$.

8.37. La propiedad (*d*1) proviene de la definición. Demostremos (*d*2). Si $x = y_1$, la demostración no se necesita. Supongamos que $x \neq y_1$, $x \sim \{y_1, \ldots, y_m\}$ y $x \not\sim \{y_2, \ldots, y_m\}$. Entonces $\{x\} \cup B \notin \mathcal{J}$ para cierto conjunto independiente $B \subseteq \{y_1, \ldots, y_m\}$, mas $\{x\} \cup C$ es independiente para todos los conjuntos independientes $C \subseteq \{y_2, \ldots, y_m\}$. En particular, $y_1 \in B$ y $B' = \{x\} \cup (B \setminus \{y_1\})$ es independiente. Por consiguiente, $\{y_1 \cup B'\} (= \{x\} \cup B) \notin \mathcal{J}$ para cierto conjunto $B' \subseteq \{x, y_2, \ldots, y_m\}$ e $y_1 \sim \{x, y_2, \ldots, y_m\}$, lo que se trataba de demostrar. Antes de pasar a la demostración de (*d*3), hemos de notar que si $x \sim A$ y $A \subseteq B$, entonces, obviamente, $x \sim B$. Sea ahora $x \sim \{y_1, \ldots, y_m\}$ e $y_k \sim \{z_1, \ldots, z_n\}$ para cualquier k, $k = 1, \ldots, m$. Supongamos que Z es un subconjunto independiente máximo del conjunto $\{z_1, \ldots, z_n\}$. Entonces, en virtud del problema 8.36, $y_k \sim Z$ para $k = 1, 2, \ldots, m$, y, por lo tanto, $\{w\} \cup Z$ es un conjunto dependiente para cierto $w \in \{y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n\} \setminus Z$, es decir, Z es un subconjunto independiente máximo del conjunto $\{y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n\}$. Ahora $x \sim \{y_1, \ldots, y_m\}$ y, por eso, debido a la observación, $x \sim \{y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n\}$. En virtud del problema 8.36, $x \sim Z$. Por eso $x \sim \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Con el fin de demostrar la afirmación inversa, hace falta comprobar el cumplimiento de los axiomas (*i*1) - (*i*3) para la familia $\mathcal{J}$. Pero, esto ya está realizado en el problema 8.14, donde, basándonos en las propiedades (*d*1) — (*d*3) (véase el problema 8.13 *a*) — *c*)) quedó establecida la validez de (*i*1) — (*i*3) para la familia $\mathcal{J}$.

8.38. Si $x \sim A$ y $x \notin A$, entonces $\{x\} \cup B \notin \mathcal{J}$ para cierto subconjunto independiente $B \subseteq A$. Por consiguiente, existe un ciclo $C \subseteq \{x\} \cup B$ y, evidentemente, $x \in C \subseteq \{x\} \cup B \subseteq \{x\} \cup A$.

Viceversa, la existencia de tal ciclo C conduce a que $C \setminus \{x\} \in \mathcal{J}$, $C \setminus \{x\} \subseteq A$ y $C \notin \mathcal{J}$. Por eso, $x \sim A$.

8.39. Supongamos que $\mathcal{J}$ es una familia de conjuntos independientes del matroide M. Entonces, si (*i*3') no se cumple, existen unos subconjuntos B_1 y B_2 tales que $|B_1| \geqslant |B_2| + 1$. En virtud de (*i*3) existe un conjunto $B_2 \cup \{y\}$ tal que $B_2 \cup \{y\} \subseteq A$, $B_2 \cup \{y\} \in \mathcal{J}$ e $y \in B_1 \setminus B_2$, lo que contradice el hecho de que el conjunto B es máximo.

Viceversa, admitamos que $\mathcal{J}$ satisface (*i*1), (*i*2) y (*i*3') y $A = X \cup Y$, donde X, $Y \in \mathcal{J}$ son tales que $|X| = |Y| + 1$. Entonces, por cuanto todos los subconjuntos independientes máximos del conjunto $X \cup Y$ deben ser de igual potencia, existe un $x \in X \cup Y$ tal que $|\{x\} \cup Y| = |X|$, lo que se trataba de demostrar.

8.40. En términos del problema 8.37, $x \in \overline{A}$ cuando y sólo cuando $x \sim A$. De aquí proviene directamente (*d*1) y (*d*2). Es evidente que si X es un subconjunto independiente máximo del conjunto $A \subseteq S$, entonces $\overline{X} = \overline{A}$. Además, para todo $A \subseteq S$ tenemos $r(A) = r(\overline{A})$. En efecto, sea $r(\overline{A}) \geqslant r(A) + 1$ y sea Y el subconjunto independiente máximo del conjunto A. Existe en este caso $Z = \varnothing$, $Z \subseteq \overline{A} \setminus A$ tal que $Z \cup Y$ es un conjunto independiente. Sea $x \in Z$. Entonces $\{x\} \cup Y$ es un conjunto independiente tal que $x \notin \overline{Y}$, lo que es imposible, puesto que $\overline{Y} = \overline{A}$. Demostremos la validez de (*d*3). Sea A un subconjun-

to independiente máximo del conjunto X. En este caso, debido a la observación A será un subconjunto independiente máximo del conjunto $\overline{X}$. De aquí $\overline{\overline{X}} = \overline{A} = \overline{X}$.

Comprobemos la propiedad (*d4*). Sea $y \notin \overline{X}$, $y \in \overline{X \cup \{x\}}$, pero $x \notin \overline{X \cup \{y\}}$, es decir, (*d4*) no se cumple. Entonces

$$r(X \cup \{y\}) = r(X) + 1; \quad r(X \cup \{x\} \cup \{y\}) = r(X \cup \{x\})$$

y

$$r(X \cup \{y\} \cup \{x\}) = r(X \cup \{y\}) + 1 = r(X) + 2.$$

Por consiguiente $r(X \cup \{x\}) = r(X) + 2$, lo que es imposible. De este modo, la aplicación $A \to \overline{A}$ satisface los axiomas (*d1*) — (*d4*).

Viceversa, supongamos que $A \to \overline{A}$ es la aplicación que satisface los axiomas (*d1*) — (*d4*) y $\mathcal{J}$, una familia de subconjuntos A del conjunto S tales que de lo que $x \in A$ proviene $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$. Mostremos que $\mathcal{J}$ es la familia de conjuntos independientes de cierto matroide. Con este fin comprobemos para $\mathcal{J}$ la validez de los axiomas (*i1*), (*i2*) y (*i3'*). Es evidente que $\varnothing \in \mathcal{J}$. Supongamos que $A \in \mathcal{J}$, $B \subseteq A$, pero $B \notin \mathcal{J}$. Existe entonces $x \in B$ tal que $x \in B \setminus \{x\}$. De aquí, en virtud de (*d2*), $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Esto significa que $x \notin \mathcal{J}$, lo que contradice la suposición. Por consiguiente, $B \in \mathcal{J}$. De este modo, los axiomas (*i1*) y (*i2*) quedan comprobados. Llamemos al conjunto $A \subseteq S$ independiente, si $A \in \mathcal{J}$. Antes de establecer la validez para $\mathcal{J}$ del axioma (*i3'*), demostremos dos afirmaciones auxiliares:

a) si $A \subseteq S$ y B es un subconjunto independiente máximo del conjunto A, entonces $\overline{B} = \overline{A}$:

b) si X es un conjunto independiente e $Y \subseteq X$, entonces $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$.

a) Supongamos que $A \not\subseteq \overline{B}$. Entonces existe $a \in A \setminus \overline{B}$ y afirmamos que $B \cup \{a\}$ es un conjunto independiente. Es obvio que $a \notin \overline{B}$. Supongamos que existe $x \in B$ tal que

$$x \in \overline{(B \cup \{a\}) \setminus \{x\}} = \overline{(B \setminus \{x\}) \cup \{a\}}.$$

Debido a (*d4*) y a que $x \notin \overline{B \setminus \{x\}}$, tenemos $a \in \overline{(B \setminus \{x\}) \cup \{x\}} = \overline{B}$, lo que contradice la suposición. Por consiguiente, $B \cup \{a\}$ es un subconjunto independiente del conjunto A. Pero esto contradice la condición de maximilidad del subconjunto B. De este modo, $A \subseteq \overline{B}$. Por cuanto, $B \subseteq A$, entonces, en virtud de (*d2*), $\overline{B} \subseteq \overline{A}$. Por consiguiente, $A \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{A}$, y, en virtud de (*d2*), $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{B}} \subseteq \overline{\overline{A}}$, es decir, $\overline{A} = \overline{B}$ (hemos aprovechado (*d3*)). De aquí, $\overline{A} = \overline{B}$.

b) Sea $x \in X \setminus Y$, $x \notin \overline{X \setminus \{x\}}$. En virtud de (*d2*), $Y = \overline{X \setminus \{x\}}$. De este modo, $x \in \overline{X} \setminus \overline{Y}$, lo que se trataba de demostrar.

Supongamos que (*i3'*) no se cumple. Entonces entre todos los subconjuntos independientes máximos X e Y del conjunto A tales que $|X| < |Y|$ elijamos aquellos, donde $|X \cap Y|$ es máximo. Obviamente, $X \not\subseteq Y$. Escojamos $y \in Y \setminus X$ y pongamos $\mathcal{D} = \overline{X} \setminus \overline{Y}$. En virtud de las afirmaciones auxiliares a) y b), $\mathcal{D} \subseteq \overline{A}$. Vamos a añadir los elementos $x_1, \ldots, x_k$ de X al conjunto $Y \setminus \{y\}$ hasta que se obtenga la igualdad:

$$\overline{(Y \setminus \{y\}) \cup \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_k\}} = \overline{A}.$$

Este proceso se interrumpe en el peor de los casos tras $k = |X|$ pasos, por cuanto, en virtud de a), $\overline{X} = \overline{A}$. Examinemos ahora un conjunto $Y' = (Y \setminus \{y\}) \cup \{x_k\}$ y mostremos que es independiente. De lo contrario tenemos o bien $x_k \in \overline{Y \setminus \{y\}}$, o bien, para cierto $y_i \in Y \setminus \{y\} = Z$: $y_i \in \overline{(Z \setminus \{y_i\}) \cup \{x\}}$. De-

bido al modo de elegir x_h y a la condición $\overline{Y \setminus \{y\}} \subseteq \overline{A}$, tenemos que $x_h \notin \overline{Y \setminus \{y\}}$. Por consiguiente, $y_i \in \overline{(Z \setminus \{y_i\}) \cup \{x\}}$. Pero, en este caso $y_i \notin \overline{Z \setminus \{y_i\}}$, y en vista de ($d4$), $x \in \overline{(Z \setminus \{y_i\}) \cup \{y_i\}} = \overline{Z} = \overline{Y \setminus \{y\}}$, lo que es imposible. Por consiguiente, Y' es un conjunto independiente y $| Y' \cap X | > | Y \cap X |$. La última desigualdad contradice el modo de elegir de los conjuntos X e Y. De aquí, $| X | = | Y |$. De este modo, $\mathcal{J}$ es una familia de conjuntos independientes del matroide. Es fácil ver que el operador de clausura de este matroide coincide con la aplicación $A \to \overline{A}$.

8.41. Hágase uso del problema 8.38.

8.42. Aplicando ($d1$) y ($d2$), tenemos

$$X \cap Y \subseteq \overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y} = X \cap Y.$$

Por consiguiente, $X \cap Y = \overline{X \cap Y}$, es decir, $X \cap Y$ es una superficie del matroide M.

8.45. No representa ninguna dificultad el comprobar que $L(G)$ es un retículo puntual completo. Demostremos que $L(G)$ es un retículo semimodular.

Supongamos que $A, B \in L(G)$, $B = \overline{A \cup \{x\}}$ y $x \notin A$. Afirmamos que $A \prec\!\!\!- B$. Efectivamente, si $C \in L(G)$ y $A \subset C \subseteq B$, existe un elemento $y \in C \setminus A$ e $y \in C \subseteq B = \overline{A \cup \{x\}}$. Por eso, de acuerdo con ($d4$), $x \in \overline{A \cup \{y\}} \subseteq C$. Por consiguiente, $B = \overline{A \cup \{x\}} \subseteq C$. Resulta que $B = C$ y de aquí $A \prec\!\!\!- B$. Sea ahora $\mathcal{D} \in L(G)$. Entonces $B \vee \mathcal{D} = \overline{B \cup \mathcal{D}} = \overline{A \cup \mathcal{D} \cup \{x\}}$ y $A \vee \mathcal{D} = \overline{A \cup \mathcal{D}}$. De aquí, o bien $x \in \overline{A \cup \mathcal{D}}$ y, por eso, $A \vee \mathcal{D} = B \vee \mathcal{D}$, o bien $x \notin \overline{A \cup \mathcal{D}}$, y en este caso $A \vee \mathcal{D} \prec\!\!\!- B \vee \mathcal{D}$.

8.46. Sea $a \in A$. Para cada $A \subseteq S$ se cumple $a \leqslant \sup A$. Esto quiere decir que $A \subseteq \overline{A}$. Si $A \subseteq \overline{B}$ para $A, B \subseteq S$ y $a \in S$, entonces $a \leqslant \sup B$. De aquí, $\sup A \leqslant \sup B$ y, por lo tanto, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. De este modo, $A \to \overline{A}$ es un operador de clausura.

La definición de retículo geométrico asegura el cumplimiento de la condición del carácter cerrado de los subconjuntos de un solo elemento y del conjunto vacío. Comprobemos el cumplimiento de la propiedad ($d4$). Sea $x \in \overline{A \cup \{y\}}$ y $x \notin \overline{A}$. Por cuanto y es un átomo, entonces, debido a la semimodularidad, $\overline{A \cup \{y\}} = \overline{A} \vee y \succ\!\!\!- \overline{A}$, por lo cual de $A \subset \overline{A \cup \{x\}} \subseteq \overline{A \cup \{y\}}$ se desprende que $\overline{A \cup \{x\}} = \overline{A \cup \{y\}}$. Así pues, $y \in \overline{A \cup \{x\}}$. De este modo queda establecido que $(S, \bar{\ })$ es una geometría.

Demostremos el isomorfismo de los retículos. Denotemos por φ la aplicación $A \to \sup A$, donde $A \subseteq S$, $A \in L(G)$, que aplica $L(G)$ en L. Por cuanto todo elemento del retículo L es una reunión de átomos, la inclusión $A \subseteq B$ será equivalente a la desigualdad $\sup A \leqslant \sup B$. Por eso φ es una aplicación biunívoca «sobre» y ambas aplicaciones φ y φ^{-1} son monótonas. Por consiguiente, φ es un isomorfismo.

8.60. *a*) $\Rightarrow$ *b*). Del carácter optimal del conjunto B en la familia $\mathcal{J}$ se deduce que B es un subconjunto máximo por inclusión en $\mathcal{J}$ y que B es un subconjunto de peso máximo en $\mathcal{J}$.

b) $\Rightarrow$ *a*). Sea B un máximo lexicográfico en $\mathcal{B}$. Supongamos que B no es óptimo en $\mathcal{J}$, es decir, que existen $A \in \mathcal{J}$ y $k \in \{1, \ldots, r(S)\}$ tales que $w(a_k) > w(b_k)$, donde los elementos de los conjuntos B y A están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos. Sea $A' = \{b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Entonces $r(A') \geqslant k$ y, por tanto, existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $A'' = \{b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, a_j\} \in \mathcal{J}$ (hemos aprovechado el axioma ($i3$)). Más aún, existe una base $B' \in \mathcal{B}$ tal que $A'' \subset B'$. Pero en tal caso la base B' es lexicográficamente mayor que B, puesto que $w(a_j) \geqslant w(a_k) > w(b_k)$. Hemos llegado a una contradicción con el hecho de que B es el máximo lexicográfico en $\mathcal{B}$. Esto significa que B es óptimo en $\mathcal{J}$.

$b) \Rightarrow c)$. Sea B un máximo lexicográfico en $\mathcal{B}$, y B', la base de peso máximo. Por cuanto es válida la implicación $b) \Rightarrow a)$, B es óptimo en la familia $\mathcal{J}$ y, por consiguiente, para todo $i \in \{1, \ldots, r(S)\}$ tiene lugar la desigualdad $w(b_i) \geqslant w(b_i')$, donde los elementos de los subconjuntos B y B' están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos. Por cuanto B' es la base del peso máximo, resulta que $w(b_i) = w(b_i')$ para todo i, donde $i = 1, \ldots, r(S)$. Por eso B' es también máximo lexicográfico en $\mathcal{B}$.

La condición d) se obtiene fácilmente de a) o de b).

$d) \Rightarrow b)$. Sea B' una base de peso máximo y B, una base que satisface la condición d). Supongamos que existe $k \in \{1, \ldots, r(S)\}$ tal que $w(b_k) < w(b_k')$, donde los elementos de las bases B y B' están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos. Entonces, el conjunto $A = \{b \in B \mid w(b) > w(b_k)\}$ no es un subconjunto independiente máximo del conjunto $C = \{a \in S \mid w(a) > w(b_k)\}$ para $|A| \leqslant k$ y $\{b_1', b_2', \ldots, b_k'\}$ será un subconjunto independiente del conjunto C que contiene k elementos. De aquí, la base B no satisface la condición d), lo que contradice la suposición. Por consiguiente, para todo i, donde $i = 1, \ldots, r(S)$, tenemos: $w(b_i) \geqslant w(b_i')$, es decir, $w(b_i) = w(b_i')$, puesto que B' es la base de peso máximo. De este modo, B es también una base de peso máximo.

8.61. Muéstrese que la aplicación del algoritmo ávido a $\mathcal{J}$ nos da la base lexicográficamente máxima del matroide M y hágase uso del problema 8.60.

8.62. Comprobemos que la familia $\mathcal{F}$ satisface el axioma (*i3*). Con este objeto mostremos que si $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in \mathcal{F}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}\} \in \mathcal{F}$, existe tal $b_i \notin A$ que $A \cup \{b_i\} \in \mathcal{F}$. Para esto definamos los pesos de los elementos a del conjunto S del modo siguiente:

$$w(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in A; \\ x, & \text{si } a \in B \setminus A; \\ 0, & \text{si } a \in S \setminus (A \cup B), \end{cases}$$

donde $0 < x < 1$. En este caso el algoritmo ávido elegirá primero los elementos $a_1, \ldots, a_k$. Si no existe b_i tal que $\{b_i, a_1, \ldots, a_k\} \in \mathcal{F}$, el algoritmo elegirá los elementos restantes de $S \setminus (A \cup B)$. Por eso, cuando el algoritmo da por terminado su trabajo, se obtendrá, como resultado, un conjunto cuyo peso será igual al del conjunto A. Si $|B \cap A| = t$, entonces $w(A) = k$, y $w(B) = t + (k + 1 - t)x$. Es evidente que se puede elegir x, $0 < x < 1$, tal que sea $w(A) < w(B)$. Pero, en tal caso el trabajo del algoritmo ávido no nos proporciona un subconjunto de $\mathcal{F}$ que tenga peso máximo, lo que contradice la afirmación del problema 8.61.

8.66. Para $A \subseteq S$ arbitrario definamos una aplicación $\overline{A}$ del modo siguiente:

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{si } |A| \leqslant n-1; \\ B, & \text{si } |A| \geqslant n \text{ y } A \text{ está contenido en el conjunto } B \in \mathcal{F}; \\ S, & \text{en todos los demás casos.} \end{cases}$$

Está claro que para todos los $A \subseteq S$ tenemos $A \subseteq \overline{A}$. Sea $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Entonces, o bien $\overline{B}$ tiene menos de n elementos, o bien $\overline{B} \in \mathcal{F}$, o bien, $B = S$. En el primer caso A tiene $m < n$ elementos y es cerrado. En el segundo caso A está cerrado, o de su clausura sirve $\overline{B}$. En cualquier caso $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ y, por tanto, $A \to \overline{A}$ es el operador de clausura. Demostremos ahora el axioma de sustitución (*d4*). Supongamos que $a \in \overline{A \cup \{b\}}$, $a \notin \overline{A}$ para cierto $A \subseteq S$, y $a, b \in S$. Por cuanto A y $A \cup \{b\}$ se diferencian sólo por un único elemento, se tienen tres posibilidades para $\overline{A}$ y $\overline{A \cup \{b\}}$: (1) $\overline{A \cup \{b\}} = S$ y $\overline{A} \in \mathcal{F}$; (2) $\overline{A \cup \{b\}} \in \mathcal{F}$ y $\overline{A} = A$ tiene $n - 1$ elementos; (3) $A = \overline{A}$ y $A \cup \{b\} = \overline{A \cup \{b\}}$ tienen n elementos.

En el primer caso $a \in \overline{A}$ y, por tanto, $\overline{A \cup \{a\}} = S$. En el segundo caso $A \cup \{a\}$ tiene n elementos y constituye un subconjunto del conjunto $\overline{A \cup \{b\}} \in \mathcal{F}$. *En el tercer caso* $a = b$. *En cada caso* $\overline{A \cup \{a\}} = \overline{A \cup \{b\}}$ y $b \in \overline{A \cup \{a\}}$. De este modo, el retículo de superficies (conjuntos cerrados) es geométrico con coátomos que coinciden exactamente con los elementos de $\mathcal{F}$.

8.68. Muéstrese que el conjunto que figura en el segundo miembro de la igualdad es una superficie y que el conjunto A es una superficie cuando y sólo cuando $\overline{\{a_1, \ldots, a_n, x, y\}} \subseteq A$ para todos los pares $x, y \in A$.

8.69. Demostremos la validez del axioma de sustitución (*d*4). De la definición de geometría de Will de grado n se deduce que todos los subconjuntos $A \subseteq S$ tales que $|A| \leqslant n$ son cerrados. Supongamos que $x, y \in S$, $A \subseteq S$, $x \notin \overline{A}$ y $x \in \overline{A \cup \{y\}}$. Si A contiene menos que n puntos, entonces $A \cup \{y\}$ será un conjunto cerrado y, por tanto, $x = y$. Supongamos ahora que $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ y $B = \{a_1, \ldots, a_n, y\}$. En virtud del problema 6.68, $\overline{A \cup \{y\}} = \overline{A \cup B} = \bigcup_{a \in \overline{A}} \overline{\{a_1, \ldots, a_n, a, y\}}$, de donde se desprende que $x \in \overline{\{a_1, \ldots, a_n, a, y\}}$ para cierto $a \in \overline{A}$. Por cuanto $y \notin \overline{\{a_1, \ldots, a_n, a, y\}}$, entonces los puntos $a_1, \ldots, a_n, a, y$ definen unívocamente una superficie F tal que $x \in F$. Por otra parte, de la condición $x \notin \{a_1, \ldots, a_n, a\}$ se deduce *que la superficie que pasa por los puntos* $a_1, \ldots, a_n, a, x$ debe coincidir con F. Esto nos da una relación $y \in \overline{\{a_1, \ldots, a_n, a, x\}} \subseteq \overline{A \cup \{x\}}$. Por fin, sea A un subespacio de rango n. Entonces, según lo demostrado más arriba, $|A| = n$, y, de este modo, el intervalo $[0, A]$ es isomorfo al álgebra de Boole sobre n elementos. Para argumentar la modularidad del intervalo $[A, 1]$, basta mostrar que $C \wedge \wedge H > A$ para cualesquiera dos subespacios C, $H \in [A, 1]$ tales que $r(C) = r(A) + 2$ y que H es un coátomo. Sea $A \prec B \prec C$ y $C \wedge H = A$. Entonces $C \leqslant B \vee H = S$. Pongamos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y elijamos cualquier punto $y \in C \setminus B$. En virtud del problema 8.68, $y \in \overline{\{a_1, \ldots, a_n, b,\}}$ para ciertos $b \in B$ y $h \in H$. Por cuanto $y \notin \overline{\{a_1, \ldots, a_n, b, b\}}$, de (*d*4) se deduce que $h \in \overline{\{a_1, \ldots, a_n, b, y\}}$. De aquí tenemos: $h \in C \cap H = A \subseteq B$. Por consiguiente, $q \in B$. Pero, eso contradice la suposición de que $q \notin B$.

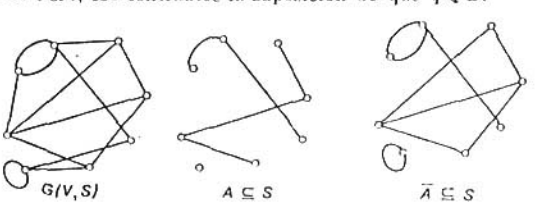


Fig. 8.4'.

8.77. Ilustremos el operador $A \to \overline{A}$ con un ejemplo concreto (véase fig. 8.4'). Es evidente que es un operador de clausura, es decir, para él se cumplen los axiomas (*d*1) — (*d*3).

Hemos de notar que si a y b son A-conexos, existe una sucesión de aristas $(x_0, x_1), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ con el número mínimo n, en la cual ninguna arista se encuentra dos veces. En efecto, supongamos que $0 \leqslant i < j \leqslant n - 1$, y $(x_i, x_{i+1}) = (x_j, x_{j+1})$. Entonces, si $x_i = x_j$ y $x_{i+1} = x_{j+1}$, al tachar las aristas $(x_{i+1}, x_{i+2}), \ldots, (x_j, x_{j+1})$ *en la sucesión, obtenemos una sucesión de conexión* más corta. Si $x_i = x_{j+1}$ y $x_{i+1} = x_j$, pueden tacharse todas las aristas $(x_i, x_{i+1}), \ldots, (x_j, x_{j+1})$.

Comprobemos ahora la validez del axioma (*d*4). Sea $x \in \overline{X \cup \{y\}}$, pero $x \notin \overline{X}$, donde $x = (a, b)$ e $y = (c, d)$. Supongamos que $e_0, \ldots, e_{n-1} \in X \cup \{y\}$

es el camino más corto que une a y b. Por cuanto $x \notin \overline{X}$, una de las aristas $e_0, \ldots, e_{n-1}$ debe coincidir con y. Según la observación hecha, sólo una de las aristas $e_0, \ldots, e_{n-1}$, digamos e_l, es igual a la arista y. Pero, entonces, la sucesión $e_{l+1}, \ldots, e_{n-1}, x, e_0, \ldots, e_{l-1}$ unirá los vértices c y d. De aquí, $y \in \overline{X \cup \{x\}}$.

8.78. El conjunto A de aristas del bosque es independiente. En efecto, la eliminación de cualquier arista $e \in A$ divide el componente conexo que contiene e en dos componentes y, por lo tanto, $e \notin \overline{A \setminus e}$. Por otra parte, si $G(V, A)$ contiene un polígono $\{e_0, e_1, \ldots, e_l\}$, entonces, por definición de operador, de $e_0 \in \{e_1, \ldots, e_l\}$ se deduce que A es dependiente. Estos razonamientos demuestran las afirmaciones a), b) y c). Además, de lo mismo se desprende que $r(A)$ es igual al número de aristas en el bosque engendrador del subgrafo $G(V, A)$. Se sabe que cada árbol tiene un número de aristas que es en una unidad menor que el número de vértices. Por consiguiente, si $V_1, \ldots, V_{k(A)}$ es una familia de aristas de los componentes conexos del grafo $G(V, S)$, entonces $r(A) = \sum_{i=1}^{k(A)} (|V_i| - 1) = |V| - k(A)$. La demostración de la afirmación d) se deduce directamente de esta fórmula.

8.79. Es evidente que $\mathcal{J}$ satisface los axiomas ($i1$) y ($i2$). Para demostrar ($i3$) veamos dos subconjuntos arbitrarios A y B de $\mathcal{J}$ que contienen k y $k+1$ vértices, respectivamente. Sean X e Y unas combinaciones arbitrarias de pares que saturan los vértices de los subconjuntos A y B, respectivamente. Son posibles dos casos: cierto elemento $x \in B \setminus A$ se satura en X y ningún elemento $x \in B$ se satura en X. En el primer caso X satura $A \cup \{x\}$ y el axioma ($i3$) se cumple. En el segundo caso examinemos un subgrafo G' sobre el conjunto de aristas $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. No es difícil mostrar que cada componente conexo del subrgafo G' es o bien un ciclo, cuyas aristas figuran por turno en X e Y, o bien un camino, cuyas aristas figuran por turno en X e Y, mientras que sus vértices terminales en una de las combinaciones de pares no están saturados. Por cuanto $|B \setminus A| > |A \setminus B|$, en el subgrafo G' existe un camino P que lleva del vértice $v \in B \setminus A$ al vértice situado fuera de $A \setminus B$. En este caso el subgrafo sobre el conjunto de aristas $(X \setminus P) \cup (P \setminus X)$ será una combinación de pares que satura v y todos los elementos del subconjunto A. De este modo, $A \cup \{v\}$ figura en $\mathcal{J}$ y se cumple el axioma ($i3$).

8.82. El conjunto $A \subseteq S$ puede ser representado como una unión de ciclos cuando y sólo cuando para todo $a \in A$ existe un ciclo C tal que $a \in C \subseteq A$, es decir, $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$. Para cierto punto $a \in A$, $a \notin \overline{A \setminus \{a\}}$ cuando y sólo cuando existe un conjunto cerrado C tal que $C \supseteq A \setminus \{a\}$, pero $C \not\supseteq A$. Observemos que en este caso $|A \setminus C| = 1$, lo que se trataba de demostrar.

§ 2. Construcciones y operaciones sobre los matroides

8.83. Es evidente que $\mathcal{B}^*$ satisface el axioma ($b1$). Con el fin de demostrar ($b2$), examinemos B_1^* y B_2^* arbitrarias de $\mathcal{B}^*$ tales que $B_1^* = S \setminus B_1$, $B_2^* = S \setminus B_2$, donde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Sea $x \in B_1^* \setminus B_2^*$. Entonces $x \in B_2 \setminus B_1$. En virtud del problema 8.34 existe un $y \in B_1 \setminus B_2$ tal que $B_3 = (B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$. Ahora $y \in B_2^* \setminus B_1^*$ y $(B_1^* \setminus \{y\} \cup \{x\} = S \setminus [B_1 \{y\} \cup \{x\}] = S \setminus B_3 = B_3^*$. De este modo, el axioma ($b2$) se cumple y, por consiguiente, $\mathcal{B}^*$ es el conjunto de bases del matroide M^* sobre S.

8.84. Resolvamos el problema usando dos procedimientos:

Primer procedimiento. Comprobemos que r^* satisface los axiomas ($r1$) — —($r3$). Comencemos por comprobar ($r1$). Por ser monótona la función de rango r del matroide M, tenemos: $r(S \setminus A) \leqslant r(S)$. Por consiguiente, $r^*(A) \leqslant |A|$. Siendo semimodular la función de rango r, tenemos $r(S) + r(\varnothing) \leqslant$

$\leqslant r(A) + r(S \setminus A)$, y por eso $r(S) - r(S \setminus A) \leqslant r(A) \leqslant |A|$. De aquí se deduce directamente que $r^*(A) \geqslant 0$. La comprobación de (r2) no tiene dificultades.

Demostremos la validez de (r3). Para cualesquiera A, $B \subseteq S$ tenemos

$$r^*(A \cup B) + r^*(A \cap B) = |A \cup B| + |A \cap B| +$$
$$+ r(S \setminus (A \cup B)) + r(S \setminus (A \cap B)) - 2r(S) =$$
$$= |A| + |B| + r((S \setminus A) \cap (S \setminus B)) + r((S \setminus A) \cup (S \setminus B)) -$$
$$- 2r(S) \leqslant |A| + |B| + r(S \setminus A) + r(S \setminus B) - 2r(S) =$$
$$= r^*(A) + r^*(B)$$

(de acuerdo con la propiedad de semimodularidad para r).

Segundo procedimiento. Examinemos $A \subseteq S$ y sea B^* una base del matroide M^* tal que $|B^* \cap A|$ es máximo. Entonces B es una base del matroide M tal que $|B \cap (S \setminus A)|$ es máximo. De la definición de función de rango tenemos que $r^*(A) = |B^* \cap A|$ y $r(S \setminus A) = |B \cap (S \setminus A)|$. Además

$$|B^* \cap A| = |A| - |B \cap A|; \quad |B \cap (S \setminus A)| = |B| -$$
$$|B \cap A| = r(S) - |B \cap S|.$$

De aquí se deduce la afirmación del problema.

8.88. Para demostrar b) y d), apliquense las afirmaciones a) y c), respectivamente, al matroide M^*.

a) *Existe una base B del matroide M tal que $A \subseteq B$.* Por eso, $S \setminus A$ contiene la cobase correspondiente B^*.

c) Sea C^* un cociclo del matroide M y supongamos que existe en M una base B que posee la propiedad de que $C^* \cap B = \varnothing$. Entonces C^* está contenido en $S \setminus B$ y es, por esto, un ciclo del matroide M^* contenido en la base $B^* = S \setminus B$ del matroide M^*. Esta contradicción demuestra el resultado requerido.

e) Sea B una base del matroide M tal que $A \subseteq B$, y C^* es un cociclo fundamental contenido en $B^* \cup \{x\}$. Entonces

$$C^* \cap A = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } x \in A; \\ \varnothing, & \text{si } x \in B \setminus A, \end{cases}$$

lo que se trataba de demostrar.

8.89. El conjunto $S \setminus A^*$ contiene, en virtud del problema 8.88 b), una base B del matroide M. Por cuanto $A \subseteq S \setminus A^*$ es un conjunto independiente del matroide M, existe una base B del matroide M tal que $A \subseteq B \subseteq S \setminus A^*$, y, por consiguiente, $A^* \subseteq B^*$.

8.90. Las afirmaciones b) y d) son duales con relación a a) y c).

Demostremos la afirmación a). La necesidad proviene del problema 8.88 c) — e). Para demostrar la suficiencia pongamos que B es un subconjunto mínimo del matroide S que tiene una intersección no vacía con cada cociclo del matroide M. Entonces $S \setminus B$ es un subconjunto máximo que no contiene cociclos del matroide M. Por eso $S \setminus B$ es, por definición, una cobase del matroide M y, *por tanto, B es la base del matroide M.*

La comprobación de la afirmación c) no ofrece dificultades algunas.

8.91. En virtud del problema 8.90 d), el cociclo C^* del matroide M es un subconjunto mínimo que tiene intersección no vacía con cada base del matroide M. Por eso, $S \setminus C^*$ es un subconjunto máximo que no contiene las bases del matroide M. De aquí se desprende directamente la afirmación del problema.

8.92. a) Necesidad. Admitamos lo contrario. Entonces para cualquier subconjunto propio C' del ciclo C existe un cociclo C^* tal que $|C^* \cap C'| = 1$ (véase el problema 8.88 e).).

Supongamos que $|C \cap C^*| = 1$ para ciertos $C \in \mathscr{C}$ y $C^* \in \mathscr{C}^*$, y sea $C \cap C^* = \{x\}$. Examinemos los subconjuntos $S' = S \setminus C^*$ y $C' = C \setminus \{x\}$. Es evidente que $C' \subseteq S'$. *Entonces, en virtud del problema 8.91, el conjunto* $S' \cup \{x\}$ contiene la base del matroide M. Sea $B \subseteq S' \cup \{x\}$ una base tal

que $C' \subseteq B$. Observemos que $x \in B$. Por eso, el ciclo $C = C' \cup \{x\}$ está contenido en B, lo que nos lleva a la contradicción con la suposición admitida. De este modo, $| C \cap C^* | \neq 1$ y la necesidad está demostrada.

Demostremos la suficiencia. Si $x \subseteq S$ es tal que $| X \cap C^* | \neq 1$ para todos los $C^* \in \mathscr{C}^*$, entonces el subconjunto X ha de contener un ciclo, puesto que, si no fuera así, X sería un conjunto independiente y, en virtud del problema 8.88 e), se encontraría un cociclo C^* que tuviese exactamente un elemento de X.

Sea C un ciclo contenido en X. De la condición necesaria demostrada del problema se ve con toda evidencia que $| C \cap C^* | \neq 1$ para todo cociclo $C^* \in \mathscr{C}^*$. Por eso $X = C$, de lo contrario la condición de minimalidad para X conduciría a una contradicción.

La afirmación b) es dual con relación a la afirmación demostrada a).

8.96. Por cuanto los ciclos en $M^*(G)$ son cortes en G, debemos de comprobar que C^* es un ciclo en $(M(G))^*$ cuando y sólo cuando C^* es un corte en G. Supongamos al principio que C^* es un corte en el grafo G. Si el conjunto C^* es independiente en $(M(G))^*$, entonces puede extenderse hasta que se obtenga la base B^* en $(M(G))^*$. Por consiguiente, $C^* \cap (S \setminus B^*) = \varnothing$, donde S es el conjunto de aristas del grafo G. Pero esto no es posible, puesto que $S \setminus B^*$ es un bosque de esqueleto del grafo G. De aquí C^* es un conjunto dependiente en $(M(G))^*$, y por eso contiene un ciclo de $(M(G))^*$.

Por otra parte, si $\mathscr{Z}^*$ es un ciclo en $(M(G))^*$, entonces $\mathscr{Z}^*$ no se contiene en ninguna base de $(M(G))^*$. Por consiguiente, $\mathscr{Z}^*$ se interseca con cada base de $M(G)$, es decir, con cada bosque de esqueleto del grafo G. Por lo tanto $\mathscr{Z}^*$ contiene un corte. Y esto es lo que se trataba de demostrar.

8.97. Por cuanto el grafo G^* es dual con relación al G, existe entre sus aristas una correspondencia biunívoca que posee la propiedad de que los ciclos en G corresponden a los de G^*, y viceversa. De aquí proviene inmediatamente que los ciclos en $M(G)$ corresponden a los cociclos en $M(G^*)$ y, por tanto, en virtud del problema 8.96, el matroide $M(G^*)$ es isomorfo al matroide $(M(G))^*$.

8.99. Es obvio que $C \subseteq \mathcal{J}_{[A,B]}(C)$ y que de $C \subseteq D$ se deduce $\mathcal{J}_{[A,B]}(C) \subseteq \mathcal{J}_{[A,B]}(D)$ para cualesquiera $C, D \subseteq B \setminus A$. Queda por demostrar ($d3$): $\mathcal{J}_{[A,B]}\mathcal{J}_{[A,B]}(C) = \mathcal{J}_{[A,B]}(C)$ para todo $C \subseteq B \setminus A$. En efecto,

$$\mathcal{J}_{[A,B]}\mathcal{J}_{[A,B]}(C) = [[\overline{C \cup A} \cap B) \setminus A] \cup A \cap B] \setminus A = [(\overline{\overline{C \cup A} \cap B) \cup A} \cap B] \setminus A =$$

$$[(\overline{\overline{C \cup A} \cup A) \cap (B \cup A)} \cap B] \setminus A = (\overline{\overline{C \cup A} \cap (B \cup A)} \cap B) \setminus A).$$

De la correlación $\overline{C \cup A} \cap (B \cup A) \subseteq (\overline{C \cup A})$ se deduce que $\overline{\overline{C \cup A} \cap (B \cup A)} \subseteq$ $\subseteq \overline{\overline{C \cup A}} = \overline{C \cup A}$. De aquí, $\overline{\overline{C \cup A} \cap (B \cup A)} \cap B \subseteq C \cup A \cap B$. Por consiguiente

$$[\overline{\overline{C \cup A} \cap (B \cup A)} \cap B] \setminus A \subseteq (\overline{C \cup A} \cap B) \setminus A = \mathcal{J}_{[A,B]}(C),$$

es decir, se ha obtenido que $\mathcal{J}_{[A,B]}\mathcal{J}_{[A,B]}(C) \subseteq \mathcal{J}_{[A,B]}(C)$. Pero $\mathcal{J}_{[A,B]}\mathcal{J}_{[A,B]}(C) \supseteq \mathcal{J}_{[A,B]}(C)$. De aquí

$$\mathcal{J}_{[A,B]}\mathcal{J}_{[A,B]}(C) = \mathcal{J}_{[A,B]}(C),$$

lo que se trataba de demostrar.

8.100. Si en el operador de clausura $\mathcal{J}_{[A,B]}(C)$ del problema 8.99 ponemos $A = \varnothing$, obtendremos $\mathcal{J}(C) = \mathcal{J}_{[\varnothing,B]}(C) = \overline{C} \cap B$. Esto quiere decir que $C \to \mathcal{J}(C)$ es una relación de clausura. La propiedad de sustitución ($d4$) también tiene lugar. Efectivamente, sea $p \in \mathcal{J}(C \cup \{q\})$, $p \notin \mathcal{J}(C)$. Entonces $p \in \overline{C \cup \{q\}} \cap B$, pero $p \notin \overline{C} \cap B$. Esto significa que $p \in \overline{C \cup \{q\}}$, pero $p \notin \overline{C}$. De aquí, según la propiedad de sustitución para la geometría $G(S)$, tenemos $q \in C \cup \{p\}$. Por consiguiente, $q \in \overline{C \cup \{p\}} \cap B$, puesto que $p, q \in B$.

8.101. Si en el operador de clausura $\mathcal{J}_{[A,B]}(C)$ del problema 8.99 ponemos $B = S$, obtendremos $\mathcal{J}(C) = \mathcal{J}_{[A,S]}(C) = \overline{C \cup A} \setminus A$. Esto significa que

$C \to \mathcal{J}(C)$ es una relación de clausura. Queda por comprobar la propiedad (*d4*): para cualesquiera p, $q \in S \setminus A$ y para todo $C \subset S \setminus A$, si $p \in \mathcal{J}(C \cup \{q\})$, $p \notin \mathcal{J}(C)$, entonces $q \in \mathcal{J}(C \cup \{p\})$. En efecto, sea $p \in \overline{C \cup \{q\} \cup A} \setminus A$, $p \notin \overline{C \cup A} \setminus A$. Es evidente que p, $q \notin A$. De aquí $p \in \overline{C \cup A \cup \{q\}}$, $p \notin \overline{C \cup A}$. En virtud de la propiedad de sustitución en la geometría $G(S)$ llegamos a que $q \in \overline{C \cup A \cup \{p\}}$. Pero $q \notin A$. Por consiguiente, $q \in \overline{C \cup A \cup \{p\}} \setminus A = \mathcal{J}(C \cup \{p\})$.

8.102. Compruébese que la familia $\mathcal{J}(M \mid B)$ satisface los axiomas (*i1*) — (*i5*).

8.103. Sea $A \subseteq B$ y X_1, X_2, los conjuntos máximos de A que constituyen elementos de la familia $\mathcal{J}(M.B)$. Entonces existen tales Y_1, Y_2 (ambos son subconjuntos independientes máximos de $S \setminus B$) que $X_1 \cup Y_1$ y $X_2 \cup Y_2$ son independientes en M. De este modo, si $B_1 = (S \setminus B) \cup A$, entonces $X_1 \cup Y_1$ y $X_2 \cup Y_2$ han de ser bases $M \mid B_1$. Por consiguiente, $\mid X_1 \cup Y_1 \mid = \mid X_2 \cup Y_2 \mid$ y por eso $\mid Y_1 \mid = \mid Y_2 \mid$ y $X_1 \cap Y_1 = X_2 \cap Y_2 = \varnothing$, $\mid X_1 \mid = \mid X_2 \mid$. Así pues, la familia $\mathcal{J}(M.B)$ satisface el axioma (*i3*). La validez de los axiomas (*i1*) y (*i2*) se comprueba con facilidad. Por consiguiente, $M.B$ es un matroide sobre el conjunto B.

8.106. Hágase uso de los resultados de los problemas 8.103 y 8.104.

8.107. Para la demostración emplearemos los axiomas para las funciones de rango y las relaciones de los problemas 8.104 d) y 8.105 d). Supongamos que $M \mid A$ tiene una función de rango r_A. Entonces la función de rango r^*_A del matroide $(M \mid A)^*$, dual con relación a $M \mid A$, satisface para todo $B \subseteq A$ la igualdad

$$r^*_A(A \setminus B) = \mid A \mid - r(A) - \mid B \mid - r(B).$$

En virtud del problema 8.105 d), la función de rango $r^*_{S/S \setminus A}$ del matroide $M^*/(S \setminus A)$ se encuentra del modo siguiente:

$$r^*_{S/S \setminus A}(A \setminus B) = r^*[(A \setminus B) \cup (S \setminus A)] - r^*(S \setminus A) =$$
$$= r^*(S \setminus B) - r^*(S \setminus A) = \mid S \setminus B \mid - r(S) + r(S \setminus (S \setminus B)) -$$
$$- \mid S \setminus A \mid + r(S) - r(S \setminus (S \setminus A)) = \mid A \mid - \mid B \mid + r(B) - r(A) =$$
$$= r^*_A(A \setminus B).$$

De este modo queda demostrada la afirmación a). Para demostrar b), hagamos uso de la afirmación a). En efecto,

$$(M^* \mid (S \setminus A))^* = M^{**} / (S \setminus (S \setminus A)) + M/A.$$

De aquí, $(M/A)^* = (M^* \mid (S \setminus A))^{**} = M^* \mid (S \setminus A)$.

8.108. Todo menor de un matroide es matroide, puesto que puede obtenerse como un submatroide de contracción del matroide o, lo que es equivalente, como una contracción del submatroide del matroide.

8.111. Comprobemos para una familia $\mathcal{J}$ el cumplimiento de los axiomas (*i1*) — (*i3*). Es evidente que $\varnothing \in \mathcal{J}_1$, puesto que $\varnothing \in \mathcal{J}_1$ y $\varnothing \in \mathcal{J}_2$. Sea $B \in \mathcal{J}$ y $A \subseteq B$. Escribamos $B = B_1 \cup B_2$ y $A = A_1 \cup A_2$, donde A_1, $B_1 \in \mathcal{J}_1$ y A_2, $B_2 \in \mathcal{J}_2$. Por cuanto $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ y $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, entonces de que $A \subseteq B$ se desprende $A_1 \subseteq B_1$ y $A_2 \subseteq B_2$. De aquí, en virtud de la validez de (*i2*) en los matroides M_1 y M_2, $A_1 \in \mathcal{J}_1$ y $A_2 \in \mathcal{J}_2$, y, por consecuencia, $A_1 \cup A_2 = A \in \mathcal{J}$. De este modo, la validez de (*i1*) y (*i2*) queda establecida.

Demostremos (*i3*). Sea A, $B \in \mathcal{J}$ y $\mid A \mid = \mid B \mid + 1$, $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$, donde A_1, $B_1 \in \mathcal{J}_1$ y B_2, $A_2 \in \mathcal{J}_2$, $\mid A \mid = \mid A_1 \mid + \mid A_2 \mid$, $\mid B \mid = \mid B_1 \mid + \mid B_2 \mid$ (puesto que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ y $B_1 \cap B_2 = \varnothing$). De aquí, o bien $\mid A_1 \mid > \mid B_1 \mid$, o bien $\mid A_2 \mid > \mid B_2 \mid$. Ahora, de la validez de (*i3*) en cada uno de los matroides M_1 y M_2 se deduce la validez de (*i3*) también para la familia $\mathcal{J}$ lo que se trataba de demostrar.

8.113. Hágase uso del problema 8.112.

8.119. Veamos una familia $\mathcal{D} = \{A \subseteq S \mid f(A) < |A|\}$ y demostremos que sus elementos, mínimos por inclusión, son ciclos de cierto matroide, es decir, satisfacen los axiomas (c1) y (c2). Es obvio que (c1) se cumple por construcción.

Sean $C_1 \neq C_2$ los conjuntos mínimos de $\mathcal{D}$ y supongamos que $a \in C_1 \cap C_2$. En este caso $|C_1| \geqslant 2$ y, por tanto, $|C_1| - 1 = |C_1 \setminus \{a\}| \leqslant f(C_1 \setminus \{a\}) \leqslant f(C_1) < |C_1|$, es decir, $f(C_1) = |C_1| - 1$, y $f(B) \geqslant |B|$ para todo $B \subset C_1$. Análogamente obtenemos que $f(C_2) = |C_2| - 1$. En particular, $|C_1 \cap C_2| \leqslant f(C_1 \cap C_2)$, y, de este modo, por ser f monótona y semimodular, tenemos

$$f((C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}) \leqslant f(C_1 \cup C_2) \leqslant f(C_1) + f(C_2) - f(C_1 \cap C_2) \leqslant |C_1| - 1 + |C_2| - 1 - |C_1 \cap C_2| \leqslant |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}|.$$

El conjunto $(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$ pertenece a la familia $\mathcal{D}$ y, por lo tanto, contiene el conjunto mínimo de ésta. El axioma (c2) está comprobado.

La familia $\mathcal{J}$ define de este modo el matroide M. Resta demostrar que la función $r(A) = \min\limits_{B \subseteq A} \{f(B) + |A \setminus B|\}$, definida para todos los $A \subseteq S$, es una función de rango del matroide M. Con este fin basta comprobar, por ejemplo, que r satisface los axiomas (r1) — (r3). Directamente de la definición de r se deduce que $0 \leqslant r(A) \leqslant |A|$ para cada $A \subseteq S$ y que $r(A) \leqslant r(B)$ para $A \subseteq B$, es decir, los axiomas (r1) y (r2) están comprobados. Luego, para todos los subconjuntos $A_1 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B$ se verifica la igualdad $|A \setminus A_1| + |B \setminus B_1| = |(A \cup B) \setminus (A_1 \cup B_1)| + |(A \cap B) \setminus (A_1 \cap B_1)|$. Por consiguiente, siendo semimodular la función f, tenemos

$$(f(A_1) + |A \setminus A_1|) + (f(B_1) + |B \setminus B_1|) \geqslant \geqslant f(A_1 \cup B_1) + |(A \cup B) \setminus (A_1 \cup B_1)| + f(A_1 \cap B_1) + |(A \cap B) \setminus (A_1 \cap B_1)|.$$

De este modo, $r(A) + r(B) = \min\limits_{A_1 \subseteq A;\ B_1 \subseteq B} \{f(A_1) + |A \setminus A_1| + f(B_1) + |B \setminus B_1|\} \geqslant \min\limits_{C_1 \subseteq B \cup B;\ C_2 \subseteq A \cap B} \{f(C_1) + |(A \cup B) \setminus C_1| + f(C_2) + |(A \cap B) \setminus C_2|\} = r(A \cup B) + r(A \cap B)$. De este modo queda establecida la validez del axioma (r3) y el problema está resuelto.

8.120. Sea $f(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i(A)$ para todo $A \subseteq S$. Entonces f es una función semimodular y monótona creciente de números enteros, dado que precisamente tales son las funciones de rango r_i de los matroides M_i. Por consiguiente, en virtud del problema 8.119, la familia $J' = \{A \subseteq S \mid \forall B \subseteq A\colon |B| \leqslant f(B)\}$ define el matroide $M(S, r)$, donde

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \{f(B) + |A \setminus B|\} = \min_{B \subseteq A} \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i(B) + |A \setminus B|\right\}$$

Luego, supongamos que $B \subseteq A$, $A \in \mathcal{J}$ y $B = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i$, donde $B_i \subseteq A_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces

$$|B| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |B_i| = \sum_{i=1}^{n} |B_i| = \sum_{i=1}^{n} r(B_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} r_i(B),$$

puesto que $B_i \in \mathcal{J}_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Por consiguiente, $A \in \mathcal{J}'$. Es cierta también, evidentemente, la afirmación inversa de que si $A \in \mathcal{J}'$, entonces $A \in \mathcal{J}$. Quiere decir, $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$ y el problema está resuelto.

8.121. La implicación (c) $\Rightarrow$ (b) es obvia. Para demostrar la implicación (b) $\Rightarrow$ (a), hagamos uso del problema 8.119. Supongamos que $B \subseteq A$ y $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, donde $B_i \subseteq A_i$ para todo i. Partiendo de que (b) es válida, tenemos: $|B| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |B_i| = \sum_{i=1}^{n} r_i(B_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} r_i(B)$ lo que es, en vista del problema 8.119, simplemente una definición del conjunto independiente del matroide $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$. Resta mostrar que (a) $\Rightarrow$ (b). Elijamos n conjuntos disjuntos dos a dos S_i que tengan la misma potencia que S y n aplicaciones biunívocas φ_i: $S \rightarrow S_i$. Suponiendo que $\varphi_i(B)$ es un subconjunto independiente en S_i si y sólo si B es un conjunto independiente del matroide M_i, obtenemos los matroides N_i sobre los conjuntos S_i que son isomorfos a los matroides M_i, cualesquiera que sean i. Designemos por r_i' la función de rango del matroide N_i, es decir, $r_i'(\varphi_i(A)) = r_i(A)$ para cada $A \subseteq S$, y con r', la función de rango del matroide $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$.

Definamos un grafo bipartido G sobre el conjunto de vértices $S \cup (\bigcup_{i=1}^{n} S_i)$ con el conjunto de aristas $R = \{(p, \varphi_i(p)) \mid p \in S,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Supongamos que T es un matroide de las combinaciones de pares del grafo G sobre el conjunto S (véase el problema 8.79). Está claro que el matroide T se induce por la función semimodular monótona $f(A)$ (definida para todo $A \subseteq S$) tal que

$$f(A) = r'\left(\bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(A) = \sum_{i=1}^{n} r_i'\varphi_i(A)\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i(A).$$

De aquí se deduce que las funciones f y $\sum_{i=1}^{n} r_i$ son, en realidad, iguales o, dicho de otro modo que $\bigcup_{i=1}^{n} M_i = T$. Utilizando la descripción de los conjuntos independientes en el matroide T, tenemos: el conjunto A es un conjunto independiente del matroide $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ cuando y sólo cuando existe tal encaje $\varphi: A \rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ que $\varphi(A)$ es un conjunto independiente del matroide $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$, si y sólo si existe un encaje $\varphi: A \rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ tal que $\varphi(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(A)$, donde $\varphi_i(A)$ son conjuntos independientes del matroide N_i para cualquier i, cuando y sólo cuando $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es una unión de conjuntos disjuntos de dos en dos y A_i son conjuntos independientes del matroide M_i para cualquier i. La demostración está concluida.

8.122. Hágase uso de la solución del problema 6.111.

8.123. Supongamos que $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$ son familias de conjuntos independientes de los matroides M_1 y M_2, respectivamente. Un subconjunto A es independiente en M_2 cuando y sólo cuando $S \setminus A$ contiene la base B del matroide M_2^*. Es evidente que $r_2^*(S) + \text{máx}\{|A|, A \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2\} \leqslant \text{máx}\{|A \cup B|, A \in J_1, B \in J_2^*\} = |A_1 \cup B_1|$, donde podemos considerar que B_1 es la base del matroide

M_2^* y $A_1 \cap B_1 = \varnothing$. Por consiguiente, para $A_1 \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ se verifica, en virtud del problema 8.122, la siguiente igualdad

$$\max_{A \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2} \{|A|\} = -r_2^*(S) + \min_{A \subseteq S} (r_1(A) + r_2^*(A) + |S \setminus A|) =$$

$$= \min_{A \subseteq S} \{r_1(A) + r_2(S \setminus A)\}.$$

8.124. Supongamos, sin limitar la generalidad de los razonamientos, que $S = B_1 \cup B_2$. Pongamos $r(S) = |B_1| = |B_2| = n$. Para la contracción $M_1 = M/Y_1$ tenemos $r_1(X) = r(X \cup Y_1) - |Y_1|$, cualquiera que sea $X \subseteq S \setminus Y_1$. Existe un matroide M_1 con la misma función de rango $r_1(X)$ definida para cualquier $X \subseteq B_2$. Análogamente, existe el matroide M_2 sobre B_2 con $r_2(X) = r(X \cup X_1) - |X_1|$, $X \subseteq B_2$. Para el matroide dual $M_2 = M_2^*$ sobre B_2 obtenemos $r_2(X) = |X| + r((B_2 \setminus X) \cup X_1) - n$. Para $X \subseteq B_2$, $Y = B_2 \setminus X$ tenemos, teniendo en cuenta la condición de semimodularidad de las funciones de rango:

$$r_1(X) + r_2(Y) = r(X \cup Y_1) + r(X \cup X_1) - |Y_1| + |Y| - n \geqslant$$
$$\geqslant r(X \cup B_1) + r(X \cup (X_1 \cap Y_1)) + |Y| - |Y_1| - n =$$
$$= |X| + |Y| - |Y_1| = |X_1|.$$

Entonces, en virtud del problema 8.123, existe $X_2 \subseteq B_2$, $|X_2| = |X_1|$ tal que $r_1(X_2) = r_2(X_2) = |X_2|$. Por consiguiente,

$$r(X_2 \cup Y_1) = r(Y_2 \cup X_1) = n, \text{ donde } Y_2 = B_2 \setminus X_2$$

[Woodall D. R. — J. Comb. Theory, 1974, 16, p. 227—228].

8.125. La demostración se realiza por inducción. El caso de $k = 2$ proviene del problema 8.124. Supongamos que el resultado es válido para las particiones que contienen menos de k bloques. Supongamos que $S_1 \subseteq S$ y $T_1 \subseteq T$ son unos conjuntos, para los cuales $(S \setminus S_1) \cup T_1$ y $(T \setminus T_1) \cup S_1$ son bases del matroide M. Analicemos el matroide $M_1 = M/S_1$ con función de rango $r_1(X) = r(X \cup S_1) - r(S_1)$. Observemos que $r_1(S \setminus S_1) = r_1(T \setminus T_1) = r_1(M_1)$, es decir, $S \setminus S_1$ y $T \setminus T_1$ son las bases del matroide M_1. Entonces, tenemos una partición $S \setminus S_1 = S_2 \cup \ldots \cup S_k$ en $k - 1$ bloques. Según la suposición por inducción, existe una partición correspondiente $T \setminus T_1 = T_2 \cup \ldots \cup T_k$ tal que $(S \setminus S_1 \setminus S_i) \cup T_i$ es una base de M_1 para $i = 2, \ldots, k$. De aquí se deduce que $(S \setminus S_i) \cup T_i$ es la base del matroide M para $i = 2, \ldots, k$. Pero, por cuanto $(S \setminus S_1) \cup T_1$ es también la base de M, la afirmación queda demostrada.

8.126. Sea $G(S)$ una geometría sobre el conjunto S. Construyamos su extensión unipuntual $G'(S \cup \{a\})$, tomando como relación de clausura $A \to \mathcal{J}(A)$, donde

$$\mathcal{J}(A) = \begin{cases} \overline{A}, \text{ si } a \in A \text{ y } \overline{A} \neq S; \\ \overline{A \setminus a} \cup a, \text{ si } a \in A \text{ y } r_G(\overline{A \setminus a}) < r(G) - 1, \\ S \cup a, \text{ si } \overline{A} = S, \text{ o bien } a \in A \text{ y } r_G(\overline{A \setminus a}) = r(G) - 1 \end{cases}$$

para cualesquiera $A \subseteq S \cup \{a\}$. Es obvio que esto es una relación de clausura.

Comprobemos (d4): sea $P \in \mathcal{J}(A \cup \{q\})$, $p, q \notin \mathcal{J}(A)$. Entonces puede haber dos casos. En primer lugar, $p \equiv a \in \mathcal{J}(A \cup q)$. Entonces o bien $q = a$, o bien $r(A) = r(G) - 1$. De aquí $q \in \mathcal{J}(A \cup a)$ ó $\mathcal{J}(A \cup a) = S \cup a \ni q$. En segundo lugar, cuando $p \neq a$, $p \in \mathcal{J}(A \cup \{q\})$, tenemos

$$a \notin A \Rightarrow q \in \mathcal{J}(A \cup \{p\}),$$

$$a \in A \Rightarrow p \in \mathcal{J}(A \cup \{q\}) = \overline{A \setminus a) \cup \{q\} \cup a} \Rightarrow p \in \overline{(A \setminus a) \cup \{q\}} \Rightarrow q \in \overline{(A \setminus a) \cup \{p\}}.$$

La igualdad $r(G') = r(G)$ se cumple por construcción.

8.127. Primero, sea K un ciclo tal que $K \subseteq (A \cup B) \setminus \varnothing$, $K \cap A \neq \varnothing$, y $K \cap B \neq \varnothing$. Tomemos $z \in K \cap B$ y pongamos $C = \overline{(K \cap B) \setminus z}$. Es evidente que $C \subseteq B$, $z \in (\overline{C \cap A}) \cap B$, puesto que $K \setminus Z \subseteq C \cup A$. Esto quiere decir que $C \cup (\overline{A \cap B}) = C$, puesto que $A \cap B \neq \varnothing$. Si $z \in C$, entonces $K \cap B$ contiene ciclo. Obtuvimos una contradicción con el hecho de que ningún ciclo contiene otro ciclo. De este modo, $(\overline{C \cup A}) \cap B \neq C \cup (\overline{A \cap B})$ y el par (A, B) no es modular.

Viceversa, supongamos que el par (A, B) no es modular. En este caso existe una superficie $C \subseteq B$ tal que $\overline{C \cup A} \cap B \neq \overline{C \cup (A \cap B)} = C$. Sea $z \in \overline{C \cup A} \cap B$ y $z \notin C$. Entonces existe un ciclo K tal que $z \in K \subseteq C \cup A \cup z$. Es evidente que en tal caso $K \subseteq (A \cup B) \setminus \varnothing$ y $K \cap B \neq \varnothing$. Además, $K \cap A \neq \varnothing$, puesto que en el caso contrario $z \in K \subseteq C \cup z$, de suerte que $z \in C$. La contradicción obtenida da por terminada la demostración.

8.128. Supongamos que (A, B) es modular en G. Pongamos $E = A \cap B$, y $H = G/E$. Entonces $A \setminus E$ y $B \setminus E$ son superficies en H. Sea C una superficie arbitraria de H que está contenida en $B \setminus E$. Entonces $\overline{C \cup (A \setminus E)}^H \cap (B \setminus E) = \overline{C \cup A} \cap (S \setminus E) \cup (B \setminus E) = \overline{C \cup A} \cap (B \setminus E) = (\overline{C \cup A} \cap B) \setminus E = (\overline{C \cup (A \cap B)} \cap B) \setminus E =$ (por hipótesis) $= \overline{C \cup (A \cap B)} \cap (B \setminus E) = C^H$. Es obvio que la igualdad se verifica, y el par $(A \setminus E, B \setminus E)$ es modular en H.

Viceversa, supongamos que el par $(A \setminus E, B \setminus E)$ es modular en H. Para mostrar que (A, B) es modular en G, basta probar que para cada superficie C de G tal que $A \cap B \subseteq C \subseteq B$ tiene lugar $\overline{C \cup A} \cap B = C$. Sea $A \cap B \subseteq C \subseteq B$. Entonces, $C \setminus E$ es una superficie en H, y por cuanto $(A \setminus E, B \setminus E)$ es modular en H, llegamos a que $\overline{(C \setminus E) \cup (A \setminus E)}^H \cap (B \setminus E) = C \setminus E$, es decir, $\overline{C \cup A} \cap (B \setminus E) = C \setminus E$, y, por consiguiente, $\overline{C \cup A} \cap B = C$.

8.129. Es evidente que $\mathcal{M}$ es un filtro. La condición de que $A \in \mathcal{M}$ es equivalente a la condición de que $r(A \cup \{p\}) = r(A)$. Por consiguiente, si $A, B \in A \in \mathcal{M}$ es un par modular en G (S), entonces

$$r((A \cap B) \cup \{p\}) \leqslant r(A \cup \{p\}) + r(B \cup \{p\}) - \\ - r(A \cup B \cup \{p\}) = r(A) + r(B) - r(A \cup B) = r(A \cap B).$$

de este modo $A \cap B \in \mathcal{M}$.

8.130. Denotemos con $A \to \bar{A}$ y r el operador de clausura y la función de rango en G (S), respectivamente. Supongamos $\bar{r}$: $S \cup p \to N_0$, donde N_0 es un conjunto de números naturales con 0 tal que

a) $\bar{r}(A) = r(A)$ para $A \subseteq S$;

b) $\bar{r}(A \cup p) = r(A) + 1$ para $A \subseteq S$, $A \notin \mathcal{M}$;

c) $\bar{r}(A \cup p) = r(A)$ para $A \subseteq S$, $A \in \mathcal{M}$.

Comprobemos que $\bar{r}$ es una función de rango, es decir, que para $\bar{r}$ se cumplen los axiomas $(r1) - (r3)$. La comprobación de $(r1)$ y $(r2)$ no ofrece ninguna dificultad. Para demostrar la validez de $(r3)$ examinemos dos casos:

1) los pares $A \cup p$, B son tales que $A, B \subseteq S$;

2) los pares $A \cup p$, $B \cup p$ son tales que $A, B \subseteq S$.

Para cualesquiera $A, B \subseteq S$ tenemos $\bar{r}(A \cup B \cup p) - \bar{r}(A \cup B) \leqslant \leqslant r(\bar{A} \cup p) - \bar{r}(A)$. Observemos que el primer miembro de la desigualdad es siempre $\leqslant 1$, y es igual a 1 cuando $\overline{A \cup B} \in \mathcal{M}$; de este modo $\bar{A} \in \mathcal{M}$, puesto que en este caso el segundo miembro de la desigualdad es también igual a 1. De aquí se deduce:

$$\bar{r}(A \cup B \cup p) - \bar{r}(A \cup p) \leqslant \bar{r}(A \cup B) - \bar{r}(A) = r(A \cup B) - \\ - r(A) \leqslant r(B) - r(A \cup B) = \bar{r}(B) - \bar{r}(A \cup B).$$

El caso 1 queda demostrado. En el caso 2) se debe mostrar que

$$\overline{r}((A \cap B) \cup p) + \overline{r}(A \cup B \cup p) \leqslant \overline{r}(A \cup p) + \overline{r}(B \cup p)$$

Si $\overline{A \cup B} \notin \mathcal{M}$, entonces también $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B} \notin \mathcal{M}$, de donde se deduce la desigualdad. Por otra parte, si $\overline{A \cup B} \in \mathcal{M}$, esto puede ser sólo cuando $\overline{A} \in \mathcal{M}$, $\overline{B} \in \mathcal{M}$ y A, B es un par modular en $G(S)$. En tal caso $\overline{A}$, $\overline{B}$ será también un par modular y $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B} \in \mathcal{M}$.

8.131. Indicación. Hágase uso de la solución del problema 8.130.

8.137. No, no para todo matroide. Por ejemplo, el matroide de Fano F_7 no puede ser incrementado, puesto que cada subconjunto que contiene cuatro elementos contiene obligatoriamente, por lo menos, una terna «prohibida».

8.138. Sí: por ejemplo, un matroide sobre S, de cuyas bases sirven los subconjuntos de S que contienen cuatro elementos, a excepción de los siguientes subconjuntos:

$$\{1, 2, 3, 4\},\ \{1, 2, 3, 5\},\ \{1, 2, 3, 6\} \text{ y } \{1, 2, 3, 7\},$$
$$\{1, 2, 4, 5\},\ \{1, 2, 7, 6\},\ \{1, 3, 4, 5\},\ \{1, 3, 6, 7\},$$
$$\{2, 3, 4, 5\},\ \{2, 3, 6, 7\},\ (\text{ó } \{1, 2, 3, 4\},\ \{1, 2, 3, 5\},$$
$$\{1, 2, 3, 6\},\ \{1, 2, 3, 7\},\ \{3, 4, 5, 6\},\ \{1, 2, 6, 7\},$$
$$\{1, 3, 6, 7\},\ \{2, 3, 6, 7\}).$$

8.142. Crapo H. H. «Annal N.Y. Acad. Sc.», 1970, 175, 89—92.

8.145. El problema fue formulado por primera vez por Crapo en 1971.

8.148. a) Se deduce de la definición de aplicación fuerte y de la propiedad consistente en que cada elemento del retículo geométrico es una unión de cierto número de átomos.

b) Analícese la cadena máxima de 0 a x del retículo L_1 y hágase uso del resultado a).

8.149. Es evidente que si $\sigma\colon L_1 \to L_2$ es un isomorfismo, entonces σ es la aplicación fuerte «sobre» y $r(L_1) = r(L_2)$. Con el fin de demostrar la afirmación inversa, admitamos primeramente que σ es una aplicación biunívoca. Si σ es una aplicación fuerte biunívoca, ella conserva la relación de orden. En efecto, sea $x \not< y$, y $\sigma(x) \leqslant \sigma(y)$. Entonces $y < x \vee y$, y $\sigma(y) = \sigma(x) \vee \sigma(y) = \sigma(x \vee y)$, mas esto contradice la biunivocidad de la aplicación σ. De este modo, la relación de orden se conserva y toda aplicación fuerte biunívoca es un isomorfismo.

Supongamos que $\sigma\colon L_1 \to L_2$ es una aplicación fuerte «sobre» y que $r(L_1) = r(L_2)$. Para finalizar la demostración mostremos que σ es una aplicación biunívoca. Por cuanto σ es una superposición, entonces $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(1) = 1$. Admitamos ahora que $\sigma(x) = \sigma(y)$ para x, $y \in L_1$ tales que $x \neq y$. Entonces $\sigma(x \vee y) = \sigma(x) \vee \sigma(y) = \sigma(x)$. Elijamos una cadena máxima C de 0 a 1 en L_1 que pase por x y $x \vee y$. La imagen de esta cadena $\sigma(C)$ es una cadena máxima de 0 a 1 en L_2, puesto que las aplicaciones fuertes conservan la propiedad de recubrimiento. Pero $r(L_1) = r(L_2)$, por lo cual σ es biunívoca sobre C y, por consiguiente, $x = x \vee y$, lo que contradice nuestra suposición. Por eso σ es una aplicación fuerte biunívoca y el problema está resuelto.

8.150. (a) $\Rightarrow$ (b). Sea X un conjunto cerrado en el matroide $N(T)$. Por cuanto $\sigma\,\overline{[\sigma^{-1}(X)]} \subseteq \overline{\sigma\sigma^{-1}(X)} = \overline{X} = X$, entonces

$$\overline{\sigma^{-1}(X)} \subseteq \sigma^{-1}\sigma\,\overline{[\sigma^{-1}(X)]} \subseteq \sigma^{-1}(X).$$

Por consiguiente, $\overline{\sigma^{-1}(X)} = \sigma^{-1}(X)$ y $\sigma^{-1}(X)$ es un conjunto cerrado.

(b) $\Rightarrow$ (c). Establezcamos primero que σ^* conserva el orden. Si v y u son superficies del retículo $L(M)$, entonces de que $u \leqslant v$ se deduce que $U \subseteq V$, o bien que $\overline{\sigma(U)} \subseteq \overline{\sigma(V)}$, o bien que $\sigma^*(u) \leqslant \sigma^*(v)$. En particular, $\sigma^*(x \vee y) > \sigma^*(y)$ y $\sigma^*(x \vee y) > \sigma^*(y)$, es decir, $\sigma^*(x \vee y) \geqslant \sigma^*(x) \vee \sigma^*(y)$. Demostremos la desigualdad inversa. Sea $z = \sigma^*(x) \vee \sigma^*(y)$. Por eso el conjunto Z

está cerrado en el matroide N (T) y, por tanto, σ^{-1} (Z) también está cerrado en el matroide M (S). Además, Z contiene los conjuntos X e Y. Por consiguiente, si $u = x \vee y$ entonces $U \subseteq Z$. De este modo,

$$\overline{\sigma(U)} \subseteq \sigma\overline{[\sigma^{-1}(Z)]} \subseteq \overline{Z} = Z.$$

Por consiguiente, $\sigma^*(x \vee y) \leqslant \sigma^*(x) \vee \sigma^*(y)$. De aquí y de las desigualdades obtenidas anteriormente tenemos $\sigma^*(x \vee y) = \sigma^*(x) \vee \sigma^*(y)$.

Supongamos ahora que existe un átomo p en L (M) tal que $\sigma^*(p)$ tiene un rango estrictamente superior a 1. Sea q un átomo del retículo L (N) y $q^* < \sigma^*(p)$. Entonces, $\overline{\varnothing} \subset \sigma^{-1}(Q) \subset P$, donde todas las inclusiones son estrictas. De este modo, $\sigma^{-1}(Q)$ no puede ser cerrado y hemos llegado, pues, a una contradicción con la suposición. Por consiguiente, la aplicación σ^* aplica los átomos en los átomos o en los retículos nulos.

(c) $\Rightarrow$ (a). Supongamos que $x \in L$ (M) y $\overline{A} = X$. Sean $p, q, \ldots, r$ los átomos de A. Entonces

$$\sigma^*(x) = \sigma^*(p \vee q \vee \ldots \vee r) = \sigma^*(p) \vee \sigma^*(q) \vee \ldots \vee \sigma^*(r),$$

o bien, lo que es lo mismo, $\sigma(\overline{A}) \subseteq \sigma(A)$.

8.154. La equivalencia de las afirmaciones (a), (b), (c) proviene de la definición y del problema 8.150. Para demostrar la equivalencia entre (c) y (d), hagamos uso de que si $A \subseteq S$, entonces

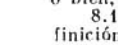
$$\overline{A}^* = A \cup \{a \mid a \notin \overline{S \setminus (A \cup \{a\})}\},$$

donde $\overline{A}^*$ es la clausura del conjunto A en el matroide M^*, y $M^{**} = M$.

8.160. **Higgs D. A.** «J. London Math. Soc.», 1966, 41, 612—618; **Higgs D. A.** «J. Combin. Theory», 1966, 5, 185—191.

8.161. Hágase uso del hecho de que σ^* conserva el supremo reticular y aplica los átomos en átomos o en un conjunto vacío.

8.162. Tal es, por ejemplo, la aplicación débil de la geometría G:



en su pregeometría:

, inducida por la siguiente función:

$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \neq c; \\ 0, & \text{si } x = c. \end{cases}$$

8.166. Si la función idéntica τ sobre el conjunto $S \cup 0$ induce una aplicación débil del matroide M (S) en el matroide N (S), donde $r(M) = m$, $r(N) = n$ y $m > n$, *entonces, evidentemente,* τ *induce* la aplicación débil del n-truncamiento M_n del matroide M (S) en el matroide N (S).

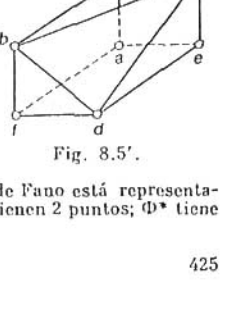


Fig. 8.5'.

8.167. Muéstrese que τ induce una aplicación débil conservadora de rango M en N cuando y *sólo cuando cada base de* N *es también base en* M. Hágase uso del hecho de que la base del matroide M^* es exactamente un complemento de la base del matroide M.

8.172. **Lucas D.** «Trans. Amer. Math. Soc.», 1975, 206, 247—279.

8.173. **Lucas D.** «Trans. Amer. Math. Soc.», 1975, 206, 247—279.

8.174. El matroide dual con relación al matroide de Fano está representado en la fig. 8.5'. Todas las rectas del matroide Φ^* contienen 2 puntos; Φ^* tiene 7 planos de potencia 4, y 7 planos de potencia 3.

§ 3. Coordinatización y representabilidad de los matroides

8.175. Sea M un matroide con la función de rango r y una familia de conjuntos independientes $\mathcal{J}$. Entonces, para cada aplicación φ: $S \to V$ y $A \subseteq S$ arbitrario se cumplen las siguientes relaciones:

a) $\dim \varphi(A) \leqslant |\varphi(A)|$, con la particularidad de que $\dim \varphi(A) = |\varphi(A)|$ cuando y sólo cuando $\varphi(A)$ es linealmente independiente en V;

b) $r(A) \leqslant |A|$, con la particularidad de que $r(A) = |A|$ cuando y sólo cuando $A \in \mathcal{J}$;

c) $|\varphi(A)| \leqslant |A|$, con la particularidad de que $|\varphi(A)| = |A|$ cuando y sólo cuando φ es una aplicación biunívoca.

Por eso, si φ: $S \to V$ conserva el rango, entonces $A \in \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando $|A| = r(A) (= \dim \varphi(A) \leqslant |\varphi(A)| \leqslant |A|)$, es decir, cuando y sólo cuando $|A| = \dim \varphi(A) = |\varphi(A)|$, o bien si y sólo si $\varphi|_A$ es biunívoca y $\varphi(A)$, un conjunto linealmente independiente en V.

Demostremos la afirmación inversa. Sea φ: $S \to V$ tal que $A \in \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando $\varphi|_A$ es biunívoca y $\varphi(A)$, linealmente independiente en V. Tomemos un subconjunto arbitrario $X \subseteq S$. Sea B una base del matroide $M|X$ y sea $\varphi(B')$ un subconjunto máximo (por inclusión) de vectores linealmente independientes en $\varphi(X)$, donde $B' \subseteq X$ y $\varphi|_{B'}$ es biunívoca. En este caso tenemos

$$r(X) = |B| = |\varphi(B)| = \dim \varphi(B) \leqslant \dim \varphi(X)$$

y

$$r(X) \geqslant r(B') = |B'| = |\varphi(B')| = \dim \varphi(X).$$

De este modo,

$$r(X) = \dim \varphi(X)$$

y φ: $S \to V$ es la aplicación conservadora del rango, lo que se trataba de demostrar.

8.176. Sea φ: $S \to V$ una coordinatización del matroide M sobre el campo F. Para cada átomo p del retículo $L(M)$ (es decir, para cada superficie $P = \overline{P}$ del matroide M) elijamos un elemento determinado $a_p \in \overline{\varphi(P)}$, $a_p \neq 0$, de V (esto es bien factible, puesto que $\overline{P} = \overline{Q}$ cuando y sólo cuando $\overline{\varphi(P)} = \overline{\varphi(Q)}$) y definamos la aplicación φ_0: $S \to V$, donde S_0 es un conjunto de átomos del retículo $L(M)$, del modo siguiente:

$$\varphi_0(p) = a_p.$$

La aplicación φ_0 es una coordinatización de la geometría G sobre el campo G. La afirmación inversa es evidente.

8.177. Sea φ: $S \to V$ una coordinatización del matroide de Fano Φ sobre cierto campo F. Sin limitar la generalidad de los razonamientos pongamos: $\varphi(a) = (1, 0, 0)$; $\varphi(b) = (0, 1, 0)$; $\varphi(c) = (0, 0, 1)$ y $\varphi(d) = (1, 1, 1)$. Por cuanto e depende de $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$, ha de cumplirse la igualdad $\varphi(e) = \lambda(1, 1, 0)$, donde $\lambda \neq 0$, y, análogamente, $\varphi(f) = \mu(1, 0, 1)$, $\varphi(g) = j(0, 1, 1)$, donde μ, $j \neq 0$. Los vectores $\varphi(e)$, $\varphi(f)$, $\varphi(g)$ son linealmente dependientes, por lo cual $\det(\varphi(e); \varphi(f); \varphi(g)) = \lambda\mu j(-2) = 0$, lo que es posible sólo para un campo de característica 2.

8.178. Hágase uso de la solución del problema 8.177.

8.179. Es suficiente convencerse de que para cada $(k \times p)$-submatriz A_1 de la matriz A tiene lugar la relación $r(A_1) = r(BA_1)$ y que con las operaciones citadas el rango de la matriz queda intacto. Aquí, mediante r se designa la función de rango de la matriz.

8.180. Sea φ: $S \to V$ una coordinatización del matroide M sobre el campo F. Entonces $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_h)\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en V y para cada $e \in S$ tenemos

$$\varphi(e) = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i(e)\, \varphi(e_i)$$

para ciertos coeficientes unívocamente definidos $\lambda_i(e)$ del campo F. Fijemos una aplicación 0: $S \to F^h$, poniendo

$$0(e) = (\lambda_1(e), \ldots, \lambda_h(e)), \quad \text{donde } e \in S.$$

Entonces

$$0(e_i) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \text{ para todo } i, \text{ donde}$$
$$i' = 1, 2, \ldots, k.$$

Mostremos que 0 es una aplicación que conserva el rango. En efecto, sea A un subconjunto arbitrario del conjunto S. Entonces $\sum_{e \in A} \alpha_e 0(e) = 0$, donde $\alpha_e \in F$ en aquel único caso cuando

$$\sum_{e \in A} \alpha_e (\lambda_1(e), \ldots, \lambda_h(e)) = 0,$$

o bien cuando y sólo cuando

$$\sum_{e \in A} \alpha_e \lambda_1(e) = \ldots = \sum_{e \in A} \alpha_e \lambda_h(e) = 0,$$

o bien cuando y sólo cuando

$$\sum_{e \in A} \alpha_e \left(\sum_{i=1}^{h} \lambda_i(e)\, \varphi(e_i) \right) = 0,$$

o bien cuando y sólo cuando

$$\sum_{e \in A} \alpha_e \varphi(e) = 0.$$

Por consiguiente, $0(e)$ y $\varphi(e)$ satisfacen precisamente las mismas relaciones, lo que significa que 0 es una aplicación conservadora de rango de S en F^h. Así pues, hemos establecido que 0 es la coordinatización del matroide M sobre el campo F.

8.181. Hágase uso del problema 8.180 y fórmese la matriz A con las columnas $0(e_1), \ldots, 0(e_h)$, donde $e_1, \ldots, e_h$ son elementos de la base B del matroide M, la cual será precisamente la que buscamos.

8.182. Es fácil mostrar que el matroide $U_{2,4}$, definido sobre el conjunto $S = \{a, b, c, d\}$, no es representable sobre el campo $GF(2)$. Supongamos que esto no es así. Entonces, en virtud del problema 8.181, para la base $\{a, b\}$ del matroide $U_{2,4}$ existe una (2×4)-matriz de representación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & 1 & r & s \end{pmatrix},$$

donde $p, q, r, s \in GF(2)$ y ningún elemento de p, q, r, s es igual a cero. En efecto, si, por ejemplo, $p = 0$, entonces $\{b, c\}$ no puede ser independiente. Por eso la matriz de representación $U_{2,4}$ sobre el campo $GF(2)$ debe tener la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que no es posible, puesto que en tal caso el conjunto $\{c, d\}$ será dependiente en $U_{2,4}$. De este modo, el matroide $U_{2,4}$ no es representable sobre el campo $GF(2)$. Al mismo tiempo el matroide $U_{2,4}$ es representable sobre cualquier otro campo F, distinto de los campos de característica 2. Efectivamente, en el campo F se tiene por lo menos un elemento t, distinto de 0 y 1, y, por tanto, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

será la representación buscada de $U_{2,4}$ sobre el campo F.

8.185. Sea G un grafo arbitrario con el conjunto de vértices V, $|V| = n$, y el conjunto de aristas S, y sea F un campo arbitrario. Enumeremos todos los vértices del grafo G de 1 a n y pongamos

$$f(v_i) = e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)^T,$$

para todo i, donde $i = 1, 2, \ldots, n$. Muéstrese que $\varphi: S \to F^n$, definida para todo $a = (v_i, v_j) \in S$ del modo siguiente: $\varphi(a) = e_i - e_j$, es la coordinatización del matroide $M(G)$ sobre el campo F. Además si $F = GF(2)$, entonces $\varphi(a) = e_i + e_j$.

8.186. Sea M un matroide de rango k sobre el conjunto $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y sea A una $(k \times n)$-matriz arbitraria con los coeficientes del campo F tal que la aplicación que pone en correspondencia al elemento $e_i \in S$ la i-ésima columna de la matriz A conserva el rango (la existencia de tal matriz fue establecida en el problema 8.181). Entonces un sistema de ecuaciones

$$Ax = 0, \quad \text{donde } x \in F^n$$

tiene $n - k$ soluciones linealmente independientes en F^n. Sea B una $(n \times (n - k))$-matriz, de cuyas columnas sirven las soluciones linealmente independientes del sistema $Ax = 0$. Demostremos por turno dos afirmaciones respecto de la matriz B, de las cuales se deducirá la afirmación del problema.

(1) Un conjunto de k columnas de la matriz A es linealmente dependiente cuando y sólo cuando el conjunto complementario de $(n - k)$ columnas de la matriz B^T es linealmente dependiente.

Por ser simétrica la relación entre las matrices A y B y debido a la posibilidad de enumerar las columnas de la matriz A, para demostrar la afirmación (1) basta mostrar que las primeras k columnas de la matriz A son linealmente dependientes cuando y sólo cuando las últimas $(n - k)$ columnas de la matriz B^T son linealmente dependientes. Dividamos las matrices A y B en submatrices del modo siguiente: $A = (A_1, A_2)$ y $B = (B_1, B_2)^T$, donde A_1 es una $(k \times k)$-submatriz, A_2 es $((k \times (n - k))$-submatriz de la matriz A, y B_1 es $(k \times (n - k))$-submatriz, B_2 es $((n - k) \times (n - k))$-submatriz de la matriz B.

El conjunto de las primeras K columnas de la matriz A es linealmente dependiente cuando y sólo cuando A_1 es una matriz degenerada, o bien cuando y sólo cuando existe tal $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0) \in F^n$, $y \neq 0$, que $Ay^T = 0$, o bien si y sólo si existe tal $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}) \in F^{n-k}$, $z \neq 0$ que $y^T = Bz^T$ (por cuanto las columnas de la matriz B engendran un espacio de soluciones del sistema $Ax = 0$), o bien cuando y sólo cuando $B_2 z^T = 0$ y $z \neq 0$, o bien cuando y sólo cuando B_2 es una matriz degenerada, o bien si y sólo si las últimas $(n - k)$ columnas de la matriz B^T son linealmente dependientes.

(2) La aplicación $\varphi: S \to F^{n-k}$ que a todo elemento e_i le pone en correspondencia la i-ésima columna de la matriz B conserva el rango del matroide dual M^*.

Sea $X \subseteq S$ y $r^*(X) = m$, donde r^* es la función de rango del matroide M^*. Se requiere demostrar que $\dim \{\varphi(a) \mid a \in X\} = m$. Sin limitar la generalidad de razonamientos podemos considerar que $X = \{e_1, \ldots, e_s\}$. Notemos que $r^*(X) = r^*(\{e_1, \ldots, e_s\}) = m$, cuando y sólo cuando existe una base del matroide M que contiene $(s - m)$ elementos de X y ninguna otra base de M

contiene un número mayor de elementos de X, o bien si, y sólo si, existe un conjunto linealmente independiente de k columnas de la matriz A que contiene exactamente $(s - m)$ columnas de las primeras s columnas y ningún otro conjunto linealmente independiente de k columnas contiene un número mayor de columnas entre las primeras s columnas, o bien cuando y sólo cuando existe un conjunto linealmente independiente de $(n - k)$ columnas de la matriz B^T que contiene exactamente m columnas de las primeras s y ningún otro conjunto de este género contiene un número mayor de columnas entre las primeras columnas de la matriz B^T (hemos tomado los complementos y aprovechamos la afirmación demostrada (I)), o bien si y sólo si entre las primeras s columnas de la matriz B^T, a saber, entre $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_s)$, hay no más de m linealmente independientes, es decir,

$$\dim \{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_s)\} = m.$$

De este modo, φ es una coordinatización del matroide M^* sobre el campo F.

8.187. Hágase uso del problema 8.186 y muéstrese que las columnas de la matriz $(-A^T, E_{n-k})$ engendran un espacio de soluciones del sistema $(E_k, A) \times x^T = 0$.

8.189. a) Es evidente que si φ es una coordinatización del matroide M en el conjunto S sobre el campo F, entonces $\varphi|_A$, donde $A \subseteq S$, es una coordinatización del submatroide $M \mid A$ sobre el campo F. En virtud del problema 8.186 y de la igualdad $(M/A)^* = M^* \mid (S \setminus A)$ del problema 8.107, como también de la observación anterior, concluimos que cualquier contracción del matroide M es también representable sobre el campo F. Por cuanto cualquier menor puede ser representado mediante una sucesión de contracciones y exclusiones, la afirmación a) del problema queda demostrada.

b) Si A_1 y A_2 son matrices de representaciones de los matroides M_1 y M_2 sobre el campo F, respectivamente, entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

es una matriz de representación del matroide $M = M_1 \oplus M_2$ sobre el campo F. La afirmación inversa se deduce de a).

8.190. La suma directa del matroide de Fano Φ (problemas 8.20 y 8.177) y del matroide Φ_1 (problema 8.178) no es representable sobre ningún campo. Esto se deduce de la afirmación b) del problema 8.189.

8.194. La coordinatización de los matroides de nuestro problema sobre el campo F es equivalente al encaje de las configuraciones en consideración en un plano proyectivo de dimensión 2 sobre el campo F, en el que se cumplen los teoremas de Desargue y de Pappo (véase el capítulo 5, § 2 de [1]). Para nuestras configuraciones dichos teoremas no se cumplen, puesto que los puntos 7, 8, 9 en el primer caso y los puntos 8, 9, 10 en el segundo caso, no son colineares. Por consiguiente, los matroides de «no Pappo» y «no desargueano» no pueden ser representados sobre ningún campo.

8.195. Supongamos lo contrario. Admitamos que el matroide de Vamos M puede ser encajado en la geometría proyectiva de dimensión 3 sobre cierto campo F. Entonces la recta d_1d_2, que no es coplanar con $b_1b_2c_1c_2$, debe intersecarse con el plano $b_1b_2c_1c_2$ en cierto punto e. Pero, por cuanto $e \in b_1b_2d_1d_2 \cap \cap c_1c_2d_1d_2$, entonces e debe yacer en la intersección de las rectas b_1b_2 y c_1c_2. Análogamente, la recta a_1a_2 debe intersecarse con el plano $b_1b_2c_1c_2$ en el punto e, mas en tal caso a_1, a_2, d_1 y d_2 son coplanares y esto contradice el hecho de que $\{a_1, a_2, d_1, d_2\}$ es la base del matroide M.

8.196. **Lazarson T. J.** London Math. Soc., 1958, 33, 21—25.

8.197. Hágase uso de que $2^{29} - 1 = 1103 \cdot 2089 \cdot 233$.

8.201. **Whitney H.** Ann. J. Math., 1935, 57, 509—533; Rado R. Proc. London Math. Soc., 1957, 7, 300—320; **Minty G. J.** J. Math. Mech., 1966, 15, 485—520; **Bixby R. E.** Discrete Math., 1974, 8, 139—145; **Tutte W. T.** J. Res.

Nat. Bur. Stand., 1965, 69 B, 1—47; Seymour P. D. J. London Math. Soc., 1976, 12, 356—360.

8.202. Fourmer J.— C. J. Comb. Theory, 1974, 16 B, 181—190.

8.203. Tutte W. T. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1965, 69B, 1—47.

8.204. Hágase uso de los problemas 8.173 y 8.203.

8.205-8.210. Lucas D. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 206, 247—279.

8.213. Seymour P. D. J. Comb. Theory, 1979, 26B, 159—173; Bixby R. E. J. Combin. Theory, 1979, 26B, 174—204.

8.216. Necesidad. Sea φ una coordinatización del matroide M sobre el campo F. De las propiedades elementales de los determinantes se desprende inmediatamente la validez de las relaciones (a) y (b) para los paréntesis de la coordinatización φ. Para demostrar (c), notemos que la ecuación es trivial, si algún sumando en (c) no es igual a cero y, por lo tanto, si los conjuntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ son bases del matroide M, o bien si para cierto i los conjuntos $\{y_i, x_2, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \ldots, y_n\}$ son también bases del matroide M. En realidad podemos considerar que los primeros de ellos son bases. En efecto, si $\{y_i, x_2, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \ldots, y_n\}$ son bases del matroide M, es fácil comprobar, haciendo uso de (b), que las sicigias del tipo (c) con el primer término $[y_i, x_2, \ldots, x_n]\,[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \ldots, y_n]$ son equivalentes a las sicigias con el primer término $[x_1, \ldots, x_n]\,[y_1, \ldots, y_n]$. Empleemos ahora la aplicación lineal regular T: $V \to V$, que aplica $\varphi(x_j)$ en el j-ésimo vector unitario e_j del espacio lineal V para cada j. Sea $T(\varphi(y_j)) = w_j \in V$ y sea W una $(n \times n)$-matriz cuya j-ésima columna es igual a w_j, donde $j = 1, 2, \ldots, n$. Al aplicar la transformación T para multiplicar el determinante en (c) por una misma constante, llegamos a que la relación (c) es equivalente a la siguiente:

$$\det E \cdot \det W = \sum_{i=1}^{n} \det(w_i, e_2, \ldots, e_n) \det(w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, e_1, w_{i+1}, \ldots, w_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_{1i} (-1)^{i-1} \det W_{1i},$$

donde W_{1i} es un menor de la submatriz de la matriz W, obtenido de W por exclusión de la primera fila y la i-ésima columna. Pero la ecuación (8.5′) es simplemente un desarrollo de la matriz W respecto de la primera fila. Por cuanto T es una transformación invertible, las sicigias definidas por los paréntesis de la coordinatización φ satisfacen la relación (c).

Suficiencia. Supongamos que $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es un elemento del campo F, definido para todos los $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$, y de este modo las sicigias dadas satisfacen las relaciones (a) — (c). Construyamos una coordinatización φ, para cuyos paréntesis se verificará la siguiente condición:

$$\det(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)) = [x_1, x_2, \ldots, x_n]. \qquad (8.6')$$

Sea $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ una base del matroide M sobre el conjunto S. Entonces $[Y] \neq 0$ y podemos normalizar los valores de los paréntesis, al dividir cada uno de ellos por $[Y]$. Por cuanto las sicigias son homogéneas, las sicigias normalizadas satisfacen también las relaciones (a) — (c). Por eso podemos considerar que $[Y] = 1$. Definamos la i-ésima coordenada $\varphi_i(x)$ del modo siguiente:

$$\varphi_i(x) = [y_1 y_2, \ldots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \ldots, y_n]$$

y demostremos que φ: $S \to F^n$ es una coordinatización del matroide M. Si demostramos que para la aplicación φ definida de este modo se verifica la relación (8.6′), la deducción de que φ es una coordinatización del matroide M se deducirá de la correlación (a) para las sicigias.

Sea $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una sucesión arbitraria tal que $x_i \in S$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$. Puede considerarse que todos los elementos de la sucesión X

son diferentes, por cuanto de lo contrario $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \det(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))$. Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $k = [X \setminus Y]$. Demostremos por inducción respecto de k que la relación (8.6') se cumple. Si $k = 0$ ó 1, entonces (8.6') *tiene lugar por construcción. Supongamos que* (8.6') *se cumple para* todo $n < k$, donde $k \geqslant 2$. Entonces, sirviéndonos de la suposición de inducción, tenemos:

$$[X][Y] = \sum_{i=1}^{n} [y_i, x_2, \ldots, x_n][y_1, \ldots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \ldots, y_n] = \sum_{i=1}^{n} \det(\varphi(y_i),$$

$\varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))\det(\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_{i-1}), \varphi(x_1), \varphi(y_{i+1}), \ldots, \varphi(y_n)) =$
$= \det(\varphi(X))\det(\varphi(y))$, puesto que ya nos hemos convencido de que los determinantes satisfacen la correlación (c). Pero $[Y] = \det(\varphi(y)) = 1$, *por consiguiente*, queda demostrada (8.6'). Ahora podemos invertir la normalización, multiplicando la primera coordenada de cada vector $\varphi(x)$ por el valor inicial $[Y]$. *De este modo, la demostración está concluida.*

8.217. Si φ es un isomorfismo de los matroides, los menores correspondientes deben ser isomorfos. Por cuanto las columnas de la matriz cuadrada N_1 *son vectores coordinatizadores de cierto menor del matroide* $M(R_1)$ (*véase el* problema 8.198), entonces han de ser dependientes cuando y sólo cuando lo mismo es válido también para N_2, o bien, lo que es equivalente, el determinante *sobre el campo* F_1 de la *matriz* N_1 *es igual a* 0 cuando y sólo cuando el determinante sobre el campo F_2 de la matriz N_2 es igual a cero.

Viceversa, demostremos que B es la base del matroide $M(R_1)$ cuando y sólo cuando las columnas correspondientes de la matriz R_2 forman una base del matroide $M(R_2)$. En otras palabras, mostremos que la $(n \times n)$-submatriz B de la matriz R_1 es regular sobre el campo F_1 cuando y sólo cuando la submatriz correspondiente de R_2 es regular sobre el campo F_2. Para la submatriz B de la matriz A_1 esto se deduce de la suposición del problema. Si $B = B' \cup B''$, donde B' es una submatriz de la matriz E_n, y B'', una submatriz de la matriz A_1, entonces, al desarrollar el determinante de la matriz B respecto de las columnas de la submatriz B', obtenemos que $\det_{F_1} B = \pm \det_{F_1} N$, donde N es una submatriz cuadrada de la matriz A_1. De aquí se deduce directamente la afirmación que se trataba de demostrar.

8.223. Las implicaciones (a) $\Rightarrow$ (b) y (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (f) son evidentes, mientras que las (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) se desprenden del problema 8.216, donde los valores de los paréntesis 0 ó ± 1 del campo de números racionales se consideran como elementos del campo F. Por cuanto las relaciones para las sicigias son válidas sobre el campo de números racionales, serán válidas también respecto del módulo p, donde p es la característica del campo F. Para finalizar la demostración de la equivalencia de las afirmaciones del problema, mostremos que (f) $\Rightarrow$ (a).

Sea $R = (E_n, A)$ una matriz estándar de representación del matroide M sobre el campo F, cuya característica es distinta de 2. Hace falta mostrar que la matriz R puede transformarse en una matriz totalmente unimodular R', multiplicando las filas y columnas correspondientes por los elementos no nulos del campo F. De aquí, en virtud del problema 8.179, se deducirá la afirmación (a). Debido al problema 8.217, si $R' = (E_n, A')$ es una matriz estándar de representación del matroide M sobre el campo $GF(2)$, entonces $a_{ij} \neq 0$ en la matriz R cuando y sólo cuando $a'_{ij} \neq 1$ en la matriz R'. En otras palabras, la aplicación $\varphi(a_{ij}) = a'_{ij}$ es tal que

$$\varphi(a_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_{ij} = 0; \\ 1, & \text{si } a_{ij} \neq 0, \end{cases}$$

transforma la matriz R en matriz estándar de representación R' del matroide M sobre el campo $GF(2)$. De aquí, en vigor del problema 8.217), para todas las submatrices cuadradas C de la matriz R y para sus φ-imágenes C' de la matriz R', obtenemos $\det_F C = 0$ cuando y sólo cuando $\det_{GF(2)} C' = 0$. En particular,

si B es una submatriz cuadrada de orden 2 de la matriz A, cuyos elementos son todos distintos de 0, entonces $\det_F B = 0$, puesto que el determinante sobre el campo $GF(2)$ de la submatriz $B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es igual a 0.

Sean $a_1, \ldots, a_k$ vectores filas de la matriz R. Supongamos que los elementos no nulos en a_1 son $a_{1i_1} = 1, a_{1i_2}, \ldots, a_{1i_s}$. Dividamos cada elemento de la i_j-ésima columna de la matriz R por a_{1i_j}, donde $j = 2, \ldots, s$. De este modo, hagamos todos los elementos en el vector fila a_1 iguales a 0 ó a 1.

Supongamos ahora que se ha logrado hacer todos los elementos en los vectores filas $a_1, \ldots, a_{h-1}$ iguales a 0 ó a ± 1, multiplicando adecuadamente las filas y columnas, y que $a_{hj_1}, \ldots, a_{hj_t}$ son elementos no nulos del vector fila a_h. Hagamos que C_{j_e} sea un subconjunto de índices de las filas $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ para los cuales los elementos a_{ij_e} en la j_e-ésima columna no son iguales a 0, es decir, $i \in C_{j_e}$ cuando y sólo cuando $a_{ij_e} \neq 0$. Si $i \in C_{j_e} \cap C_{j_m}$, entonces en R existe una submatriz de la forma $\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ a_{hj_e} & a_{hj_m} \end{pmatrix}$. De donde, en virtud de la observación hecha más arriba, su determinante es igual a 0, o bien $a_{hj_e} = a_{hj_m}$. Por consiguiente, si multiplicamos las columnas j_e por $a_{hj_e}^{-1}$ (elemento inverso de a_{hj_e} del campo F), entonces el vector fila a_h contendrá sólo ceros y unidades, mientras que los vectores filas a_i, para $i = 1, \ldots, k-1$, contienen 0, ± 1 y $\pm f_l = 0$ en las columnas j_e, para las cuales $i \in C_{j_e}$. Multipliquemos ahora cada vector fila a_i, $i = 1, \ldots, k-1$, que contiene al menos un f_l (es decir, las filas que tienen ceros no en todas las columnas de números $j_1, \ldots, j_t$), por f_i^{-1}. La nueva matriz obtenida tendrá la forma:

$$\begin{array}{c} m \\ i \\ j \\ k \end{array} \begin{pmatrix} +1 & & \ldots & \ldots & \pm f_m^{-1} & \ldots & \ldots \\ 0 & \pm 1 & \ldots & \ldots & \pm f_i^{-1} & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \pm 1 & \ldots & \pm 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_t & & & \end{pmatrix}$$

Las columnas $j_1, \ldots, j_t$ se hicieron tales como se requería. Esto significa que nuestro último paso consiste en multiplicar cada vector columna con índice $s \notin \{j_1, \ldots, j_t\}$ por ciertos f_m. En este caso debemos estar seguros de que si f_m^{-1} y f_i^{-1} pertenecen al vector columna s, entonces $f_m = \pm f_i$.

Si $m, i \in C_{jl}$ para cierto l, entonces tenemos una submatriz

$$\begin{array}{c} m \\ i \end{array} \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm f_m^{-1} \\ \pm 1 & \pm f_i^{-1} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ j_l \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ s \end{array}$$

De donde, en virtud de que el determinante de esta submatriz es igual a cero, tenemos $f_m = \pm f_i$. De lo contrario, si tal l no existe, se encontrará una submatriz

$$\begin{array}{c} m \\ i \\ k \end{array} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \pm f_m^{-1} \\ 0 & \pm 1 & \pm f_i^{-1} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ s \end{array},$$

que será degenerada, puesto que el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sobre el campo $GF(2)$ es igual a 0. Del hecho de que la penúltima matriz es nula se deduce que $f_m = \pm f_i$.

Pero la columna s puede contener, además, los elementos ± 1 de la fila, digamos, a_j, la cual tiene sólo ceros en las columnas $j_1, \ldots, j_t$. En este caso

multipliquemos primero a_j por f_m^{-1}, si $\pm f_m^{-1}$ se encuentra en la intersección de la j-ésima fila y s-ésima columna. Por consiguiente, resta por demostrar que si a_j tiene ± 1 en las columnas s, $s' \in \{j_1, \ldots, j_t\}$, entonces $f_m = \pm f_i$, donde f_m^{-1} es un elemento en la s-ésima columna distinto de 0 y ± 1, y f_i^{-1} es un elemento en la s'-ésima columna. Esto es factible sólo cuando f_m^{-1} y f_i^{-1} están situados ambos o en la columna s, o bien en la columna s'. En efecto, supongamos que esto no es así. Entonces, si $m, i \in C_{j_l}$, tenemos una submatriz

$$\begin{array}{c} m \\ i \\ j \end{array}\begin{pmatrix} \pm 1 & f_m^{-1} & 0 \\ \pm 1 & 0 & \pm f_i^{-1} \\ 0 & \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} f_l & s & s' \end{matrix}$$

que es degenerada, puesto que el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sobre el campo $GF(2)$ es igual a 0 y, por lo tanto, $f_m = \pm f_i$.

Si $m, i \notin C_{j_l}$, entonces la submatriz

$$\begin{array}{c} m \\ i \\ j \\ k \end{array}\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \pm f_m^{-1} & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & \pm f_i^{-1} \\ 0 & 0 & \pm 1 & \pm 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es también degenerada, por cuanto el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sobre el campo $GF(2)$ es igual a 0, y, por lo tanto, $f_m = \pm f_i$.

Demostremos por fin que $R' = (E_n, A')$, considerada como matriz con coeficientes enteros, es totalmente unimodular. Como ya se ha observado más arriba, la matriz R' no puede contener submatrices cuadradas de segundo orden, cuyos coeficientes son distintos de 0. De aquí, en particular, tenemos que R' no contiene submatrices cuadradas de segundo orden, cuyos coeficientes son distintos de 0, y entre ellos hay exactamente uno que es igual a 1 ó a -1. Designemos este hecho por (*). Sea $M = (m_{ij})$ una $(k \times k)$-submatriz arbitraria de la matriz R' tal que su determinante sobre el campo de números *racionales no sea igual a 0 y* $m_{11} \neq 0$. *Entonces, realizando las transformaciones elementales*, reducimos la matriz M a la M' de la forma siguiente $\begin{pmatrix} m_{11} & N \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$. Notemos que $\det M_1 = \pm \det M$. En virtud de (*) todos *los elementos en* M_1 *son iguales a 0 ó a* ± 1, *de lo contrario la matriz* M tendría una submatriz $\begin{pmatrix} m_{11} & 1 \\ -m_{11} & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} m_{11} & -1 \\ -m_{11} & -1 \end{pmatrix}$, lo que es imposible.

Para la matriz M_1 la condición (*) es también válida. En efecto, si $B_1 = \begin{pmatrix} m_{ij} & m_{ik} \\ m_{lj} & m_{lk} \end{pmatrix}$ es una submatriz de la matriz M_1, para la cual no se cumple la condición (*), entonces para la submatriz $B = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{1j} & m_{1k} \\ 0 & m_{ij} & m_{ik} \\ 0 & m_{lj} & m_{lk} \end{pmatrix}$ de la matriz M tendremos $\det B = m_{11} \cdot \det B = \pm 2$, es decir, el determinante de la matriz B sobre el campo F no es igual a 0, y sobre el campo $GF(2)$, sí lo es. Mas esto contradice el problema 8.217. Por consiguiente, M_1 también satisface la condición (*).

Elijamos ahora un elemento no nulo en la primera columna de la matriz M_1, y hagamos iguales a 0 los demás elementos de la citada columna con ayuda

de las transformaciones elementales. La obtenida matriz nueva M_2 tiene también por elementos suyos 0 y 1, así como satisface la condición (*). Realizados k pasos, llegaremos a que el determinante de la matriz M sobre el campo de números racionales es igual a ± 1. De este modo, todos los menores distintos de cero de la matriz R' son iguales a ± 1, y la matriz R' es totalmente unimodular.

8.224. De acuerdo con la fórmula de Binet-Cauchy para los determinantes, tenemos

$$\det A \cdot A^{\mathrm{T}} \sum (\det B)^2,$$

donde la suma se toma respecto de todas las $(n \times n)$-submatrices B de la matriz A. Por hipótesis del problema, $(\det B)^2$ es igual a 0 ó a 1, con la particularidad de que $(\det B)^2 = 1$ cuando y sólo cuando las columnas de la matriz B corresponden a la base del matroide M. Es fácil ver que la matriz de representación del matroide en la fig. 8.10 tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y es localmente unimodular. De que

$$A \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se deduce que el número de bases en el matroide M es igual a $\det A \cdot A^{\mathrm{T}} = 21$.

8.225. Este admirable resultado fue obtenido por Tutte (véase **Tutte W.T.** Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, 144—174; **Seymour P. D. J.** Comb. Theory, 1979. 26 B, 159—173).

8.230. **Brylawski T.** Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 203, 1—44.

8.231. Esta caracterización constructiva de los matroides unimodulares ha sido empleada para desarrollar algoritmos polinomiales que ayudan a determinar si una matriz es totalmente unimodular, lo que es de gran importancia para los problemas de optimización de números enteros. **Seymour P. D. J.** Comb. Theory, 1980, 28 B, 305—360.

8.232. **Tutte W. T.** Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 90, 527—552.

8.234. El diagrama refleja correctamente las relaciones entre las clases de matroides. Al punto x se le puede poner en correspondencia, por ejemplo, el matroide R_{10}; al punto y, el matroide de Fano Φ; a z, el matroide homogéneo $U_{2,4}$; a u, un matroide cíclico del grafo K_5 o $K_{3,3}$; a v, un matroide de cortes del grafo completo K_5 o $K_{3,3}$; a w, el matroide de Vamos, el «no de Pappo» o el «no desarguesana».

8.239. **Brualdi R. A., Dinolt G. W.** J. Comb. Theory, 1972, 12, 268—286.

8.241. **Brualdi R. A., Dinolt G. W.** J. Comb. Theory, 1972, 12, 268—286.

8.243. **Perfect H. J.** Math. Analysis Appl., 1968, 96—111; **Ingleton A. W., Piff M. J.** J. Comb. Theory, 1973, 15, 51—68.

8.245. La afirmación inversa no es cierta, puesto que el matroide cíclico del grafo en la fig. 8.2 está ordenado por la base, pero no transversal.

§ 4. Problemas mixtos en los matroides

8.251—8.254. **Hausmann D., Korte B.** — in "Spe. Top. Appl. Math. Funct. Anal. Numer Anal. and Optimiz. Proc. Semin., Bonn, 1979". Amsterdam e. a. 1980, 196—211.

8.256—8.259. **Minty G. J.** J. Math. and Mech., 1966, 15, 485—520.

8.260. Represéntese $P(M; \lambda)$ en forma de la suma

$$\sum_{A \subseteq S \setminus e} (-1)^{|A|} \lambda^{r(S)-r(A)} + \sum_{e \in A \subseteq S} (-1)^{|A|} \lambda^{r(S)-r(A)}$$

y hágase uso de las correlaciones para las funciones de rango.

8.261. La hipótesis del problema es equivalente al hecho de que no se pueden colorar de forma regular los vértices de un grafo que contenga por lo menos un bucle.

8.263. a) $P(\Phi; \lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$;

b) $P(M; \lambda) = \prod_{\tau=0}^{r} (\lambda - q\tau)$;

c) $P(M; \lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \ldots (\lambda - n + 1)$;

d) $P(U_{2,4}; \lambda) = \lambda^2 - n\lambda + (n - 1)$, $n \geqslant 2$.

8.264. $\chi(\Phi) = 5$.

8.274. Las relaciones a) — c) se obtienen por cálculo directo. Hágase uso del resultado del problema 8.272 para demostrar la relación f).

8.275. Este notable hecho fue demostrado por primera vez por T. Brylawski [Brylawski T. — Trans. Amer. Math. Soc., 1972, No 171, p. 235—282].

8.281. El método de demostración consiste en mostrar que cualquier grafo G sin puentes puede representarse como una unión de tres grafos eulerianos G_1, G_2, G_3 y esto es equivalente, como es fácil de ver, a que G tiene el $(Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2)$ — flujo [Jaeger F.— Fifth British Comb. Conf., 1976, p. 373—379].

8.282. Se puede mostrar que $P(M^*(P_{10}); \lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \times (\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda^2 - 5\lambda + 10)$. De aquí, en virtud del problema 8.280, P_{10} no tiene el 4-flujo.

8.283. Es una hipótesis abierta de Tutte. Si se demuestra, el grafo de Peterson se hace, en virtud del problema 8.282, grafo mínimo, para el cual no existen los n-flujos cuando $n < 5$.

8.284. Es una hipótesis abierta de Tutte conocida en la literatura como versión fuerte de la hipótesis de Tutte sobre el 4-flujo (Tutte W.T.— In: Combinatorial Math. and it's applications. Univ. of North Carolina, 1969, p. 553—561).

1. K. A. Ríbnikov. Análisis combinatorio. Editorial Mir. Moscú, 1988.
2. G. Birkhoff, T. Bartee, Modern applied algebra. New York, 1970.
3. Н. Я. Виленкин. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969
(N. Ya. Vilenkin. Combinatoria.)
4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. — М.: Наука, 1977
(G. P. Gavrílov, A. A. Sapozhenko. Problemas de las matemáticas discretas.)
5. A. Kaufmann. Introduction a la combinatorique en vue des applications. Paris, Dunod, 1968.
6. G. J. Ryser. Combinatorial Mathematics. New York, 1963.
7. J. Riordan. An introduction to combinatorial analysis. Wiley, New York, 1958.
8. G. Birkhoff. Lattice Theory. Providence, Rhode Island, 1967.
9. В. Н. Сачков. Комбинаторные проблемы дискретной математики. — М.: Наука, 1977
(V. N. Sachkov. Problemas combinatorios de las matemáticas discretas.)
10. Л. А. Скорняков. Элементы теории структур. — М.: Наука, 1982
(L. A. Skorniakov. Elementos de la teoría de estructuras.)
11. R. Wilson. Introduction to graph theory. Oliver an Boyd Edinburgh, 1972.
12. F. Harary. Graph Theory. Addison — Wesley Publishing Company. 1969.
13. F. Harary, E. Palmer. Graphical enumeration. New York, Academic Press, 1973.
14. M. Hall. Combinatorial Theory. Blaisdell Publ. Company. Waltham, Toronto, 1967.
15. P. Erdös, J. Spencer. Probabilistic methods in combinatorics. Budapest, Akademiai Kiado, 1974.
16. Denes J., Keedwell A. D. Latin squares and their applications. Budapest, Akademiai Kiado, 1974.
17. Lovász L. Combinatorial problems and exercises. Budapest, Academiai Kiado, 1979.
18. M. Aigner. Combinatorial Theory. Berlin, Springer — Verlag, 1979.
19. O. Ore. Theory of graphs. Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1962.
20. L. Ford, D. Fulkerson. Flows in networks. Princeton Univ. Press, New Jersey, 1962.
21. В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, Н. К. Кравцов. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981
(V. A. Emélichev, M. M. Kovalev, N. K. Kravtsov. Poliedros, grafos, optimización.)
22. M. Swamy, K. Thulasiraman. Graphs, Networks and Algorithms. John Wiley & Sons, Inc., 1981.
23. А. А. Зыков. Теория конечных графов. — М.: Наука, 1969
(A. A. Zykov. Teoría de los grafos finitos.)
24. L. Mirsky. Transversal theory. New-York, 1971.

25. L. Lovász, M. Plummer. Maching Theory. Budapest, Akademiai Kiado, 1986.
26. G. Grätzer. General lattice theory. Akademie — Verlag, Berlin, 1978.
27. J. Riordan. Combinatorial Identities. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1968.
28. G. Andrews. The Theory of partitions. Addison—Wesley Publ. Comp., Ins., 1976.
29. D. Welsh. Matroid theory, New York, Academic Press, 1976.
30. B. Bollobas. Extremal Graph Theory. London, Academic Press, 1978.
31. R. Graham, B. Rothschild, J. Spencer. Ramsey Theory. New York, Wiley, 1980.
32. H. Minc. Permanents. Addison — Wesley Publ. Comp., Inc., 1978.
33. В. Н. Сачков. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — М.: Наука, 1978
(V. N. Sachkov. Métodos probabilísticos en el análisis combinatorio.)
34. В. Н. Сачков. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982
(V. N. Sachkov. Introducción a los métodos combinatorios de las matemáticas discretas.)
35. В. И. Баранов, Б. С. Стечкин. Экстремальные комбинаторные задачи и их применение. М.: Наука, 1988
(V. I. Baránov, B. S. Stechkin. Problemas combinatorios extremales y su aplicación.)
36. В. Е. Тараканов. Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. М.: Наука, 1985 (V. E. Tarakánov. Problemas combinatorios y (0,1)-matrices.)
37. R. Graham. Rudiments of Ramsey Theory. Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1981.
38. F. Karteszi. Introduction to finite geometry. Budapest, Academiai Kiado, 1976.
39. N. Christofides. Graph Theory. An algorithmic approach. New York, Academic Press, 1975.
40. R. Randow. Introduction to the theory of matroids. — Lect. Notes in Econ. and Math. Syst., 1975, v. 109.
41. E. Minieka. Optimization algorithms for networks and graphs. Marcel Dekker, Inc., New-York, 1978.
42. Ch. Papadimitrion, K. Steiglitz. Combinatorial Optimization. Algorithms and Complexity. Prentice Hall, New Jersey, 1982.
43. E. Lawler. Optimization: networks and matroids. New York, 1976.
44. V. Bryant, H. Perfect. Independence theory in combinatorics. London, Chapman and Hall, 1980.
45. J. Kung. A source book in matroid theory. Boston. Birkhäuser, 1986.
46. Classic Papers in Combinatorics (Ed. by I. Gessel, G—C. Rota) Boston, Birkhäuser, 1987.
47. Theory of matroids (ed. by N. White). Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1986.
48. Combinatorial geometries (ed. by N. White). Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1987.
49. Combinatorial geometries: Advanced Theory (ed. by N. White). Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1988.
50. A. Recski. Matroid theory and it's applications. Budapest, Academiai Kiado, 1988.

INDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

Algebra de incidencia 144
Algoritmo ávido 168
— polinomial 203
Altura de un vértice 90
Análogo de vértice del teorema de Menger 126
— matricial del teorema de Konig 126
Anchura de un conjunto parcialmente ordenado 120
Anticadena 101
Aplicación débil 185
— fuerte 182
— isótona 118
— simple 186
— — conservadora de rango 186
Árbol 77
— radical 77
Arco de un plano proyectivo 93
Arista de un grafo 75
— múltiple 75
Átomo 120
Automorfismo de un conjunto parcialmente ordenado 44
— — — cuadrado latino 56

Base de un matroide 158
Belliano 122, 130
Bloque-esquema 67
— incompleto equilibrado (BIB-esquema) 68
— parcialmente equilibrado con m tipos de conexiones (PBIB(m)-esquema)) 68
— simétrico 69
Booleano 121
Bosque 77
Bucle (lazo) de un matroide 171

Cadena 78, 119
— hamiltoniana 76
— máxima 119
— puntual 139
— saturada 119
— simple 76
Capacidad de un arco 124
Cápsula convexa de los puntos 71
Ciclo de un matroide 158
— euleriano 76
— fundamental 164
Clique de un grafo 76
Cociclo de un matroide 174
Cociente de un matroide (quotiente, inglés) 184
Coeficiente binomial de Gauss 152
Colineación 95
Combinación afín 160
— de pares 99, 125
— lineal de vectores 159
Complemento de un elemento 136
— — — grafo 77
— relativo de un elemento 137
Componente de conexión 76
Condición de recubrimiento 133
— reforzada de Hordan-Hölder 138
Cónica (curva de segundo orden) 92, 97
Conjunto bien ordenado 123
— característico de un matroide 195
— dependiente de manera afín 160
— de vértices (A, B)-separador 125
— engendrador de un matroide 167
— independiente de manera afín 160
— parcialmente ordenado 44, 118
— — — totalmente finito 120
— transitivo 39
Constantes geométricas extremales 115
Convolución de sucesiones 23
Coordinatización 187
Corte de una red 124
Cota superior exacta 128
— inferior exacta 128
Cuadrado latino 56
Cubo de Boole 81
Curva hiperbólica 93
— parabólica 93
— elíptica 94

Desigualdad de Yamamoto-Lubel-Meshalkin 121
Diagrama de Hasse 119
Diamante 131
Dimensión de un grafo 75
Distancia entre vértices 83
Distribución de los vértices de un grafo en grados 76

Ecuación de Polya 89
Elemento máximo 118
— mínimo 118
Elementos de un bloque-esquema 67
Elevador (lift) de un matroide 184
Epiformismo 82
Esqueleto 77
Esquema resoluble 60
Estructura de incidencia 141

Factor de un matroide 184
Filtro modular 181
Flat (superficie) 166
Flujo estacionario de una magnitud 124
Fórmula de Cayley (primera) 87
— — Clark (tercera)
— — inversión de Moebius 147
— — Meir-Moon 90
— — Renyi 87
— — Waring 27
— — Weisner 150
Fuente 124
Función de corrango 174
— — incidencia 143
— — Kronecker 145
— — Moebius 145
— — rango 133
— generatriz 23
— modular 155
— submodular 155

Geometría asociada a un matroide 187
— combinatoria (geometría) 166
— de Wille 171
— proyectiva 142
Grado de un vértice 76, 99
Grafo 75
— bipartido 76, 125
— — completo 76
— completo 76
— de entrelazamiento 61
— — Peterson 207
— finito 75
— isomorfo 77
— monocromático 50
— no orientado 75
— orientado 75
— simple 75

Hammoide 201
— rígido 201
Hiperarista 98
Hipergrafo 98
— dual 101
Hiperplano 167
Hipótesis de Berge 108
— — Dirac 100
— — Erdös-Sos 101
Homomorfismo de un retículo 131

Identidades de Morgan 137
Incremento de un matroide 182
— libre de un matroide 182
Índice cíclico de un grupo 39
Ínfimo 128
Intervalo 120
Intervalos transpuestos 138
Invariante 205
— de Tutte-Grothendiek 205

Inventario de un conjunto 43
Inversión de Moebius 143
Involutividad 139

Lema de Bernsaid 42
Longitud de una cadena 101, 121

Matroide 158
— afín 160
— cíclico 164
— cográfico 172
— conexo 174
— de Fano 162
— — los cortes 172
— — recubrimiento 170
— — Vamos 162
— dual 174
— gráfico 164
— homogéneo 159
— ordenado por bases 201
— orientable 194
— transversal 168
— unimodular 187
— vectorial 160
Menor de un matroide 177
Método de división en sucesiones de Morgan 26
— de inclusión y exclusión 45
Métodos geométricos 75
— lógicos 45
Multigrafo 75

Número de Bell 30
— — Galois 152
— — Stirling 33, 36, 154
— pentagonal 16

Oráculo 202
— polinomialmente reducible 203
Orden de un plano 92
Operador de clausura 131

Par comparable de elementos 118
Paréntesis de una coordinatización 195
Partición 14
Particiones ordenadas 109
— ortogonales 81
Pentágono (diamante) 131
Permanente de una matriz 52
Peso de la clase de equivalencia 39
— — un conjunto 168
— — — elemento 168
Plano de Galois 95
— finito 92
— proyectivo de Desargue 92
Polinomio característico de un conjunto parcialmente ordenado 152
— cromático 205
— — de un grafo 152
— — Bell 30

Polinomio característico Stirling 33
— — Tutte 206
Pregeometría 181
Principio de alojamiento completo 111
— — Dirichlet 109
— — los cajones 110
Problema de empaques 104
— — Erdös-Katona 105
— — Turán 104
— — van der Waerden 71
Problemas enumerativos en los grafos 85
— extremales 108
Producto directo de conjuntos parcialmente ordenados 121
— — — grupos 41
— — — las matrices 52
— — — retículos 130

Rango de un subconjunto 140
— lineal de un conjunto 187
Recta externa 93
— impropia 93
— ordinaria 93
Rectángulo latino 56
Relación de incidencia 142
— — orden 118
Representación de Cayley 40
— — un matroide 168
Retículo 128
— con complementos 136
— completo 130
— de Boole 138
— desarrollable 141
— geométrico 139
— modular 132
— semimodular 133
Retículos isomorfos 131

Salida 124
Separadores de un matroide 179
Símplice 71

Sicigia 195
Sistema de conjuntos 98
— — grupos de pares 62
— — representantes de los conjuntos 48
— — ternas de Kirkman 61
— — — — Steiner 60
Sombra 103
Subgeometría 176
Subgrafo 75
— de esqueleto 77
Subplano baeriano 95
Subpregeometría 181
Superficie 166
Suposición de Erdös-Frankl
Supremo 128

Tangente 93
Teorema de Crapo 148
— — Desargue 92
— — desarrollo 185
— — Dilworth 123
— — Hall 48
— — Ramsey 50
— — Rota 148
— — Singer 96
— — Stanley 146
— — Tutte 193
— sobre el flujo 124
Teoría de Polya 39, 40
Transformación proyectiva 95
Transversal 125
— parcial 167
Traza de una matriz 53
Truncamiento de un matroide 184

Unión de los grafos 77

Vector índice de un grupo de pares 62
Vertedero 124
Vértice de un grafo 75
Vértices A-conexos 172